

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ



Μεταπτυχιακή διατριβή

Προσεγγιστική λύση της εξίσωσης του *Boussinesq* σε
οριζόντιο υδροφορέα

Σταύρος Χαραλάμπους

Λεμεσός 2016

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Προσεγγιστική λύση της εξίσωσης του *Boussinesq* σε
οριζόντιο υδροφορέα

του
Σταύρου Χαραλάμπους

Λεμεσός 2016

ΕΝΤΥΠΟ ΕΓΚΡΙΣΗΣ

Μεταπτυχιακή διατριβή

Προσεγγιστική λύση της εξίσωσης του *Boussinesq* σε
οριζόντιο υδροφορέα

Παρουσιάστηκε από

Σταύρο Χαραλάμπους

Επιβλέπων καθηγητής _____

[ιδιότητα και όνομα]

Μέλος επιτροπής _____

[ιδιότητα και όνομα]

Μέλος επιτροπής _____

[ιδιότητα και όνομα]

Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Κύπρου

Σεπτέμβριος, 2016

Πνευματικά δικαιώματα

Copyright © Σταύρος Χαραλάμπους, 2016

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Η έγκριση της μεταπτυχιακής διατριβής από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Γεωπληροφορικής του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου Κύπρου δεν υποδηλώνει απαραίτητως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Ευάγγελο Ακύλα κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, και την υπομονή που έκανε κατά τη διάρκεια υλοποίησης της διπλωματικής εργασίας. Όπως επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του, για την επίλυση διάφορων θεμάτων. Θα ήθελα επίσης να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στους γονείς μου, οι οποίοι στήριξαν τις σπουδές μου με διάφορους τρόπους, φροντίζοντας για την καλύτερη δυνατή μόρφωση μου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή επικεντρωθήκαμε στη μελέτη και κατασκευή μιας νέας προσεγγιστικής λύσης της εξίσωσης του *Boussinesq* για την περίπτωση του περιορισμένου οριζόντιου υδροφόρου ορίζοντα υπό συνθήκες ομοιόμορφης φόρτισης. Από την αριθμητική επίλυση της *Boussinesq* (3.5) γίνεται ότι σε μικρούς χρόνους ($\tau < 0.4$) επικρατεί μία τάση γρήγορης αλλαγής του προφίλ, το οποίο εξελίσσεται με μορφή κατά προσέγγιση μεταβλητού τραπεζίου του οποίου το ύψος αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Σε μεταγενέστερους χρόνους ($\tau > 0.4$), το προφίλ του νερού στον οριζόντιο υδροφορέα παίρνει ένα σχετικά σταθερό παραβολικό σχήμα (πλησιάζει σε *steady-state*). Σε αυτό το στάδιο οποιαδήποτε έννοια γραμμικότητας στην εξέλιξη με το χρόνο έχει χαθεί. Σε κάθε περίπτωση όμως διαφαίνεται ένας σαφής διαχωρισμός της εξέλιξης του προφίλ σε μικρούς χρόνους, μικρότερους του 0.4, και μεγαλύτερους από το 0.4 χρόνους, συμπέρασμα το οποίο αποτελεί και την κεντρική ιδέα και έμπνευση για μία πιο αποτελεσματική και περιγραφική πρωτότυπη προσέγγιση του προβλήματος με μία νέα πρωτότυπη μέθοδο. Η νέα μέθοδος βασίζεται σε μια εξειδικευμένη εικασία «ansatz» του προφίλ του νερού στον υδροφορέα για κάθε φάση του, που αφήνει ορισμένες λειτουργίες του χρόνου ως βαθμούς ελευθερίας για να καθοριστεί έτσι δυναμικά μέσα από τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση η εξέλιξη τους. Οι προκύπτουσες συνθήκες μπορούν να λυθούν με ακρίβεια έτσι που να οδηγούν σε προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες είναι σαφείς και απλές. Οι λύσεις των δύο φάσεων σε σύγκριση με τις αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* δείχνουν μάλλον πως συμφωνούν εντυπωσιακά αποδίδοντας ποιοτικά και ποσοτικά τα χαρακτηριστικά της πλήρους εξίσωσης. Η μη γραμμικότητα στην εξέλιξη του προβλήματος έχει και σε χρονικούς και σε χωρικούς όρους και σε κάθε στιγμιότυπο είναι πολύ ακριβέστερη από παλαιότερες προσεγγιστικές γραμμικές λύσεις. Σε κάθε περίπτωση η ξεκάθαρη αναλυτική περιγραφή και η ακρίβεια της προσέγγισης θεωρούμε ότι αποδίδει ευκρινώς τη φυσική της εξέλιξης και αποτελεί ένα μικρό βήμα στην κατανόηση του φαινομένου.

Abstract

The Boussinesq equation is a dynamical equation for the free surface of saturated subsurface flows over an impervious bed. Boussinesq equation is non-linear. The non-linearity comes from the reduction of the dimensionality of the problem: The flow is assumed to be vertically homogeneous, therefore the flow rate through a cross section of the flow is proportional to the free surface height times the hydraulic gradient, which is assumed to be equal to the slope of the free surface, (Dupuit, 1863). In general, ‘vertically’ means normally on the bed; combining the Dupuit approximation with the continuity equation leads to the Boussinesq equation (Boussinesq, 1877).

There are very few transient exact solutions. For the confined flow case for zero recharge rate Boussinesq derived for the horizontal aquifer an exact solution assuming separation of variables, (Boussinesq (1904), Polubarinova-Kochina (1962)). This is actually an exact asymptotic solution of the horizontal aquifer recession phase for late times. The kinematic wave, (Boussinesq (1877), Lighthill and Witham (1955), Henderson and Wooding (1964), Beven (1981)), is an interesting solution obtained by dropping the non-linear term in the Boussinesq equation. Although it is an approximate solution, and holds well only for small values of the Henderson and Wooding λ parameter (that is, for steep slopes, high conductivity or small recharge rate), it becomes less and less approximate for smaller values of the parameter, that is, it is asymptotically exact with respect to that parameter.

In the present work we consider the case of the confined subsurface flow over horizontal bed in the build-up phase under constant recharge rate. This is a case with an infinite Henderson and Wooding parameter, that is, it is the limiting case where the non-linear term is present in the Boussinesq while the linear spatial derivative term goes away. Nonetheless, no analogue of the kinematic wave or the Boussinesq separable solution exists in this case. The late time state of the build-up phase under constant recharge rate is very simply the steady state solution. Our aim here is to construct an accurate approximate solution for the built-up phase which clarifies the physical response of the aquifer to the uniform constant recharge.

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη	vii
Abstract	viii
Κατάλογος Πινάκων	x
Κατάλογος Σχημάτων	xi
1. Εισαγωγή στην μελέτη των υπόγειων υδάτινων πόρων	1
1.1 Γενικά στοιχεία	1
1.2 Υδρολογικός κύκλος – Υπόγειοι υδροφορείς και η σημασία τους.....	2
1.3 Ο ρόλος των υπόγειων υδατικών πόρων στην διαχείριση των υδατικών συστημάτων.....	4
1.4 Περιβαλλοντικές επιπτώσεις από την διαχείριση των υδάτινων πόρων.....	5
1.5 Περιγραφή και ταξινόμηση υπόγειων υδροφορέων	8
1.6 Δομή της εργασίας	10
2. Μαθηματική προσέγγιση υπόγειων υδροφορέων	11
2.1 Παράμετροι Υπόγειου Υδροφορέα.....	11
2.2 Ο νόμος του <i>Darcy</i>	16
2.3 Η εξίσωση της Συνέχειας.....	17
2.4 Ιστορική αναδρομή στην εξίσωση του <i>Boussinesq</i>	19
3. Προσέγγιση της επίλυσης της ομοιόμορφης φόρτισης πεπερασμένου οριζόντιου υπόγειου υδροφορέα.....	21
3.1 Η εξίσωση του <i>Boussinesq</i>	22
3.2 Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (3.5).....	23
3.3 Προσεγγιστική λύση της εξίσωσης (3.5).....	24
3.3.2 Συνέχεια του γεμίσματος σε μεγαλύτερους χρόνους.....	31
4. Συμπεράσματα	37
Βιβλιογραφία	38

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2.1 Τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας (Kallergis et al., 1999).....	13
Πίνακας 2.2 Ενδεικτικές Τιμές ολικού πορώδους σε πετρώματα (Kallergis et al., 1999)	16

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1 Ο κύκλος του νερού.....	3
Σχήμα 1.2 Μεταβολή του πορώδους και της ειδικής κατακράτησης σε σχέση με την εδαφική κατάταξη	8
Σχήμα 1.3 Είδη υδροφόρων οριζόντων	9
Σχήμα 2.1 Διαφορικός όγκος αναφοράς (Sotiropoulou 2010).	18
Σχήμα 3.1 Σχηματική αναπαράσταση της ροής σε οριζόντιο υδροφορέα με φόρτιση.....	21
Σχήμα 3.2 Η προσέγγιση της λύσεως ομοιότητας με τη διάδοση μίας κυματικής διαταραχής στα πρώτα στάδια του γεμίσματος	25
Σχήμα 3.3 Η απόκλιση της λύσης από την ακριβή εξίσωση Boussinesq σε επίπεδο φόρτισης για διάφορες χρονικές στιγμές στη διάρκεια των πρώτων σταδίων της φόρτισης.	28
Σχήμα 3.4 Εξέλιξη του προφίλ $H(X,\tau)$ του νερού (πάνω) και του σχήματος $H(X,\tau)/\tau$ (κάτω) σε χρόνους $\tau_0/10$, $\tau_0/4$, $\tau_0/2$ και τ_0 , σύμφωνα με την αριθμητική λύση της Boussinesq (συνεχείς γραμμές) και την προσέγγιση της από την εξίσωση μας (3.10) (διακεκομμένες γραμμές).....	29
Σχήμα 3.5 Σχετική διαφορά της επίλυσης του προφίλ $H(X,\tau)$ (3.10) από την αριθμητική επίλυση της Boussinesq σε χρόνους $\tau_0/10$, $\tau_0/4$, $\tau_0/2$ και τ_0 , (από δεξιά προς τα αριστερά). Στο κάτω σχήμα εστιάζονται τα τελευταία σημεία προς το κατάντη όριο.	30
Σχήμα 3.6 Η χρονική εξέλιξη των συναρτήσεων (διακεκομμένη γραμμή) και , όπως προέκυψε από την αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (7-9) που παρουσιάστηκε.	32
Σχήμα 3.7 Εξέλιξη του προφίλ $H(X,\tau)$ του νερού (πάνω) και του σχήματος $H(X,\tau)/H(0,\tau)$ (κάτω) σε χρόνους τ_0 , $3\tau_0/2$, $2\tau_0$, $3\tau_0$ και $5\tau_0$ σύμφωνα με την αριθμητική λύση της Boussinesq (συνεχείς γραμμές) και την προσέγγιση της από την εξίσωση μας (3.1) (διακεκομμένες γρ)	33
Σχήμα 3.8 Σχετική διαφορά της επίλυσης του προφίλ $H(X,\tau)$ (3.15) από την αριθμητική επίλυση της Boussinesq σε χρόνους $3\tau_0/2$, $2\tau_0$, $3\tau_0$ και $5\tau_0$, (από δεξιά προς τα αριστερά). Στο κάτω σχήμα εστιάζονται τα τελευταία σημεία προς το κατάντη όριο.	34
Σχήμα 3.9 Η πολύ καλή σύμπτωση της εξέλιξης της απορροής κατά τη διάρκεια της φόρτισης του οριζόντιου υδροφορέα από τη λύση μας (διακεκομμένη) σε σχέση με την αριθμητική λύση της Boussinesq (συνεχής).	35

1. Εισαγωγή στην μελέτη των υπόγειων υδάτινων πόρων

Αυτό το κεφάλαιο θα είναι μια εισαγωγή στους υπόγειους υδάτινους πόρους, όπου θα παρουσιαστούν γενικά στοιχεία, βασικές έννοιες και η σημασία τους. Επίσης, θα παρουσιαστεί ο ρόλος των υπόγειων υδάτινων πόρων στη διαχείριση υδάτινων συστημάτων και συνάμα τις περιβαλλοντικές επιπτώσεις που προκύπτουν από τη διαχείριση αυτή. Τέλος, θα γίνει μια προσπάθεια ταξινόμησης των υπόγειων υδροφορέων.

1.1 Γενικά στοιχεία

Η αξία του νερού και κατ' επέκταση των υπόγειων υδάτινων πόρων είναι δύσκολο να αποτιμηθεί, ωστόσο με μία γρήγορη ανασκόπηση στις διαθέσιμες ποσότητες υδάτινων πόρων σε σχέση με την έντονη χρήση τους σε πολλούς τομείς, εύκολα μπορεί να χαρακτηριστεί ως απόλυτα απαραίτητο. Κατ' αρχάς, χωρίς αυτό το πολύτιμο αγαθό δεδομένη πρέπει να θεωρείται η αδυναμία ανθρώπων, ζώων και φυτών να διατηρηθούν στη ζωή και αυτό επιβεβαιώνεται από τις τεράστιες ποσότητες που χρησιμοποιούνται για την ύδρευση πόλεων, την άρδευση καλλιεργειών αλλά και την έντονη χρήση σε βιομηχανικές μονάδες.

Στον πλανήτη Γη το 71% της συνολικής επιφάνειας του πλανήτη καλύπτεται από νερό, ωστόσο τα αποθέματα γλυκού νερού είναι περιορισμένα. Αυτό συμβαίνει διότι το 97.2% της συνολικής ποσότητας νερού του πλανήτη είναι νερό των θαλασσών και των ωκεανών. Επομένως, το νερό αυτό χαρακτηρίζεται ως αλμυρό και χωρίς βιομηχανική επεξεργασία είναι ακατάλληλο για χρήσεις όπως ύδρευση και άρδευση. Από το εναπομείναν ποσοστό το 2.2% είναι οι πάγοι στον Βόρειο και Νότιο Πόλο, χιόνια και υδρατμοί γλυκού νερού που είναι στην ατμόσφαιρα. Έτσι, τα αποθέματα γλυκού νερού τα οποία μπορεί να βρίσκονται επιφανειακά σε ποταμούς, λίμνες και φράγματα ή σε υπόγειους υδροφορείς είναι σε υγρή μορφή και υπάρχει δυνατότητα εκμετάλλευσής τους είναι μόλις το 0.6% της συνολικής ποσότητας γλυκού νερού. Το 98% του εκμεταλλεύσιμου νερού είναι αποθηκευμένο σε υπόγειους υδροφορείς ενώ μόλις το 2.0% είναι αποθηκευμένο επιφανειακά. Ωστόσο, αρνητικό είναι το γεγονός ότι πέραν του 50% του συνολικού γλυκού νερού που είναι αποθηκευμένο σε υπόγειους υδροφορείς βρίσκεται σε πολύ μεγάλα βάθη, γύρω στα 800 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της γης, με αποτέλεσμα να είναι

αυξημένα τα ποσοστά αλατότητας αλλά και η εκμετάλλευση του να χαρακτηρίζεται ως εξαιρετικά δύσκολη και δαπανηρή.

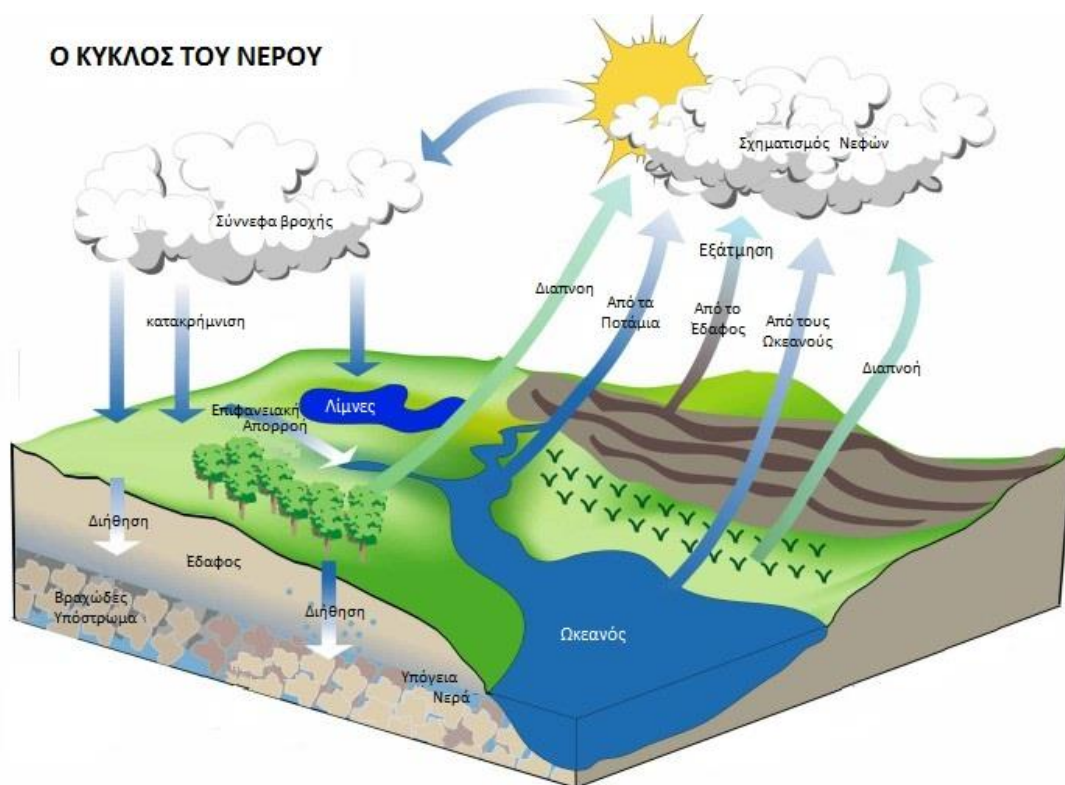
Τα επιφανειακά ύδατα και οι υπόγειοι υδροφορείς χαρακτηρίζονται από μία συνεχή υδραυλική επικοινωνία, αφού υπάρχει δυνατότητα ροής του νερού από το ένα στο άλλο. Το νερό του υπόγειου υδροφορέα μπορεί να αναδυθεί στην επιφάνεια της γης και να ρέει επιφανειακά υπό μορφή ποταμών, αλλά και τα επιφανειακά ύδατα μπορεί να εμπλουτίζουν τους υπόγειους υδροφορείς με ρυθμούς αναλόγως της διαπερατότητας του εδάφους. Οποιαδήποτε μεταβολή στη στάθμη υπόγειων νερών επηρεάζει άμεσα και τα επιφανειακά νερά που τροφοδοτεί. Η τροφοδοσία των επιφανειακών υδάτων από υπόγειους υδροφορείς μπορεί να χαρακτηριστεί από αργό, σταθερό ρυθμό σε αντίθεση με την απορροή των επιφανειακών υδάτων στους υπόγειους υδροφορείς.

Η εκμετάλλευση των επιφανειακών υδάτων χαρακτηρίζεται ως χρονοβόρα και υψηλού κόστους, εφόσον απαιτεί την αποκοπή της ροής ενός ποταμού με τεράστιες υδραυλικές κατασκευές όπως είναι τα φράγματα. Αντίθετα, οι υπόγειοι υδροφορείς λόγω της αχανούς έκτασης που καταλαμβάνουν δίνουν τη δυνατότητα γρηγορότερης και ευκολότερης άντλησης νερού μέσω μίας σειράς γεωτρήσεων.

1.2 Υδρολογικός κύκλος – Υπόγειοι υδροφορείς και η σημασία τους

Όπως προαναφέρθηκε, το νερό είναι ένα πολύτιμο αγαθό που προσφέρει ζωή στον πλανήτη μας και τα μεγαλύτερα αποθέματα γλυκού νερού είναι αποθηκευμένα στους υπόγειους υδροφορείς. Ωστόσο, πολύ σημαντική πρέπει να θεωρείται και η διαδικασία εμπλουτισμού των υπόγειων υδροφορέων που λειτουργεί εδώ και δεκατομμύρια χρόνια και ονομάζεται υδρολογικός κύκλος. Η έναρξη του υδρολογικού κύκλου γίνεται όταν αρχίζει να θερμαίνεται το περιβάλλον και παρατηρείται εξάτμιση, μετατροπή δηλαδή του νερού από υγρή σε αέρια μορφή, τους υδρατμούς, από τα φράγματα, τους ωκεανούς, τις λίμνες, τα ποτάμια αλλά και από το έδαφος. Συνεισφορά στον εμπλουτισμό της ατμόσφαιρας με υδρατμούς παρέχουν και τα φυτά μέσω της διαπνοής τους. Επίσης, μικρή ποσότητα υδρατμών στην ατμόσφαιρα προέρχεται από την εξάχνωση, όπου μόρια πάγου ή χιονιού μετατρέπονται απευθείας από στερεή σε αέρια μορφή, χωρίς να μετατρέπονται πρώτα σε υγρή μορφή.

Στη συνέχεια, ανοδικά ρεύματα αέρα μεταφέρουν τους υδρατμούς στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας όπου παρατηρούνται συνθήκες χαμηλής θερμοκρασίας και πίεσης. Λόγω αυτών των συνθηκών, οι υδρατμοί συμπιέζονται δημιουργώντας τα σύννεφα. Σταγονίδια νερού που σχηματίζουν τα σύννεφα συγκρούονται και μεγαλώνουν και τελικά πέφτουν στην επιφάνεια της γης ως κατακρημνίσματα υπό τη μορφή βροχής ή χιονιού. Δυστυχώς, όμως, τα μεγαλύτερα ποσοστά κατακρημνισμάτων χάνονται αφού πέφτουν κατευθείαν στους ωκεανούς. Ένα άλλο μέρος από το νερό της βροχόπτωσης καταλήγει και πάλι στους ωκεανούς μέσω της επιφανειακής απορροής. Εντούτοις, μέσω επιφανειακής απορροής υπό μορφή ποταμών, νερό καταλήγει σε φράγματα και λίμνες όπου αποθηκεύεται. Ακόμη, από το νερό της βροχής κάποιες ποσότητες μέσω της λειτουργίας της διήθησης διαπερνά το έδαφος, σχηματίζοντας έτσι το υπόγειο νερό, όπου δίνεται η δυνατότητα να εμφανιστεί ξανά στην επιφάνεια της γης μέσω πηγών. Μια άλλη ποσότητα νερού που διαπερνά το έδαφος φτάνει σε μεγαλύτερα βάθη, εμπλουτίζοντας τους υπόγειους υδροφορείς και δίκαια μπορούν να χαρακτηριστούν ως οι σημαντικότεροι αποθηκευτικοί χώροι γλυκού νερού. Προσφέρουν τη δυνατότητα αποθήκευσης τεράστιων ποσοτήτων νερού και για μεγάλα χρονικά διαστήματα.



Σχήμα 1.1 Ο κύκλος του νερού

Όπως διαφαίνεται, το νερό είναι ένα ανακυκλώσιμο προϊόν μέσω φυσικών διεργασιών. Παρ' όλα αυτά, μελέτες έχουν δείξει ότι, ετησίως εξατμίζονται $8.5 * 10^{15} \text{ m}^3$ νερού και μόλις τα $46 * 10^{12} \text{ m}^3$ νερού πέφτουν στην ξηρά και δίνεται η δυνατότητα αποθήκευσης τους σε επιφανειακούς και υπόγειους υδροφορείς. Υπολογίζεται ότι για να ανανεωθεί ολόκληρη ποσότητα νερού που εξατμίζεται χρειάζονται περισσότερα από 200 χρόνια. (Φράγκου και Καλλής, 2010)

1.3 Ο ρόλος των υπόγειων υδατικών πόρων στην διαχείριση των υδατικών συστημάτων

Ως διαχείριση υδατικών πόρων μπορεί να θεωρηθεί το σύνολο των δράσεων, (έργων και μέτρων), μέσω των οποίων επιδιώκεται πληρέστερη δυνατή κάλυψη των σημερινών και μελλοντικών αναγκών σε νερό για κάθε χρήση ή στην περίπτωση που αυτό δεν είναι εφικτό να εξασφαλίζεται η ισότιμη ικανοποίηση όλων των ενδιαφερομένων, σε σχέση με την κοινωνική σημασία της κάθε χρήσης. Οι δράσεις αναπτύσσονται σε πέντε επίπεδα, (θεσμικό, τεχνολογικό, οικονομικό, κοινωνικό και περιβαλλοντικό), έτσι ώστε να επιτυγχάνεται το βέλτιστο αναπτυξιακό, οικονομικό, κοινωνικό και περιβαλλοντικό αποτέλεσμα.

Στο φυσικό περιβάλλον, το νερό μπορεί να εντοπιστεί και να εκμεταλλευθεί ως επιφανειακό ή ως υπόγειο. Στον όρο «επιφανειακό» συμπεριλαμβάνονται λίμνες και ποταμοί, ενώ με τον όρο «υπόγειο» νερό εννοείται το νερό που κινείται και αποθηκεύεται μέσα στο έδαφος και ειδικότερα στους πόρους των εδαφών και για τον λόγο αυτό ονομάζονται υδροφορείς. Στις πλείστες των περιπτώσεων τα επιφανειακά και τα υπόγεια νερά λειτουργούν αλληλένδετα μέσω υδραυλικής επικοινωνίας. Με τον όρο «υδραυλική επικοινωνία» εννοείται μια συνεχή ροή νερού των επιφανειακών υδάτων από ή προς τον υδροφορέα. Επομένως, είναι οφθαλμοφανές ότι, οποιαδήποτε μεταβολή στη στάθμη των υπόγειων νερών θα επηρεάζει άμεσα και την παροχή των επιφανειακών νερών.

Τα επιφανειακά νερά εμφανίζονται σημειακά υπό μορφή λιμνών ή υπό μορφή ποταμών και για την εκμετάλλευσή τους απαιτούνται μεγάλα υδραυλικά έργα, όπως είναι τα φράγματα. Για την κατασκευή φραγμάτων υπάρχουν μεγάλοι περιορισμοί ως προς την τοποθεσία, εφόσον πρέπει να υπάρχουν μεγάλες πηγές επιφανειακών υδάτων. Επιπρόσθετα, η κατασκευή ταμιευτήρων νερού

χαρακτηρίζεται από υψηλό αρχικό κόστος και θεωρείται ιδιαίτερα χρονοβόρα διαδικασία. Το θετικό αυτών των τεράστιων υδραυλικών έργων είναι το χαμηλό κόστος λειτουργίας.

Από την άλλη πλευρά, η αξιοποίηση των υπόγειων νερών θεωρείται κατά κάποιον τρόπο ευκολότερη. Οι τεράστιες εκτάσεις που καταλαμβάνουν τα υπόγεια νερά τα κάνει πιο διαθέσιμα προς χρήση. Η κύρια μέθοδος εκμετάλλευσης είναι μέσω μιας σειράς γεωτρήσεων. Οι γεωτρήσεις χαρακτηρίζονται από χαμηλό αρχικό κόστος, ωστόσο σε αντίθεση με τα φράγματα, παρουσιάζουν υψηλό κόστος λειτουργίας και συντήρησης, το οποίο αυξάνεται αναλόγως του εστιακού βάθους όπου θα επιχειρηθεί η άντληση νερού. (Λατινόπουλος, 2007)

Στόχοι της διαχείρισης υδάτινων πόρων:

1. να προμηθεύσει νερό επαρκούς ποσότητας και κατάλληλης ποιότητας για την ικανοποίηση των πάσης φύσεως αναγκών σε νερό
2. να προστατεύσει τους υδατικούς πόρους από τη ρύπανση
3. να παρέχει ικανοποιητική προστασία από τα ακραία υδρολογικά φαινόμενα (πλημμύρες - ξηρασίες)
4. να μεγιστοποιήσει (Μαμάσης, 2011) την αποδοτικότητα των υδατικών πόρων και των σχετικών δραστηριοτήτων, με ταυτόχρονη μέριμνα για τη διατήρηση των αναγκαίων αποθεμάτων στο μέλλον και των περιβαλλοντικών φυσικών δυνατοτήτων για νέες επιλογές (αποφυγή μη αναστρέψιμων επεμβάσεων)

1.4 Περιβαλλοντικές επιπτώσεις από την διαχείριση των υδάτινων πόρων

Στον 21^ο αιώνα είναι πλέον αποδεδειγμένο ότι οι ανθρώπινες παρεμβάσεις στη φύση προκαλούν σοβαρά περιβαλλοντικά προβλήματα και ανεπανόρθωτες καταστροφές. Δυστυχώς, η διαχείριση των υδάτινων πόρων δεν αποτελεί εξαίρεση, με αποτέλεσμα να είμαστε πλέον αντιμέτωποι με σοβαρές περιβαλλοντικές επιπτώσεις. Η διαχείριση των υδάτινων πόρων θα έπρεπε να αντιμετωπίζεται με σοβαρότητα και υπευθυνότητα, πράγμα το οποίο δεν συνέβαινε, με αποτέλεσμα πολλοί υδάτινοι πόροι σε όλον τον πλανήτη να κινδυνεύουν από αλόγιστη

εκμετάλλευση και ρύπανση. Πλέον για να ανατραπεί αυτή η δυσμενή κατάσταση, χρησιμοποιούνται ορθολογικές πολιτικές ανάπτυξης και διαχείρισης υδατικών πόρων. Μια ορθολογική πολιτική ανάπτυξης λαμβάνει υπόψη της μια πληθώρα θεμάτων με απώτερο σκοπό την προστασία των υδατικών πόρων. Για παράδειγμα, η ετοιμότητα διαχείρισης ακραίων φαινομένων και κρίσεων, όπως τα προβλήματα λειψυδρίας και πλημμύρων θεωρείται ορθολογική πολιτική ανάπτυξης. Βεβαίως, πρέπει να έχει τη δυνατότητα να φέρει εις πέρας μακροπρόθεσμους περιβαλλοντικούς στόχους, όπως η σε βάθος χρόνου προστασία των νερών και των συσχετιζόμενων με αυτά οικοσυστημάτων, η βελτίωση της ποιότητας και της οικολογικής τους κατάστασης καθώς και η σταδιακή μείωση απορριπτόμενων ρυπαντικών ουσιών και η προοδευτική εξάλειψη τοξικών αποβλήτων. Ωστόσο, η εφαρμογή των πιο πάνω απαιτεί εξειδίκευση και εκπαίδευση στο αντικείμενο αυτό, με αποτέλεσμα να μην εφαρμόζεται ακόμα πλήρως λόγω της ελλιπούς γνώσης. Επιπρόσθετα, προϋποθέτει γνώση του χώρου και αυτό μπορεί να προέλθει μόνο από κατά πλάτος αλλά και κατά βάθος μελέτη και διερεύνηση των στοιχείων που τον ορίζουν. Παρ' όλα αυτά, είναι πλέον ξεκάθαρο το γεγονός ότι, όπου υπάρχει ανθρώπινη παρέμβαση, υπάρχουν και περιβαλλοντικές επιπτώσεις.

Αρχικά παρατηρείται η δημιουργία μεγαλουπόλεων, οι οποίες επιβαρύνουν την ατμόσφαιρα με ρύπους που μπορεί να προέρχονται από βιομηχανικές ζώνες ή από τον τεράστιο αριθμό αυτοκινήτων. Οι ρύποι αυτοί ευνοούν την ανάπτυξη φαινομένων, όπως είναι το φαινόμενο του θερμοκηπίου και η όξινη βροχή. Τα φαινόμενα αυτά και κυρίως η όξινη βροχή συμβάλλουν στην καταστροφή μεγάλων δασικών περιοχών και στη μείωση της συνολικής βροχόπτωσης. Η ερημοποίηση μεγάλων δασικών εκτάσεων οδηγεί στην μεταβολή της χωρικής κατανομής των υδάτων. Όμως, οι σημαντικότερες περιβαλλοντικές επιπτώσεις από την διαχείριση υδάτινων πόρων εμφανίζονται κατά την ανθρώπινη παρέμβαση στην επιφανειακή απορροή του νερού. Η ανάγκη του ανθρώπου να προστατευθεί από φαινόμενα λειψυδρίας και πλημμύρων τον οδηγεί στην κατασκευή μεγάλων τεχνικών έργων, λ.χ. φράγματα και εκτροπή ποταμών. Η κατασκευή των φραγμάτων προϋποθέτει την αποκοπή της φυσικής ροής του νερού, έτσι ώστε να του αποκλείσουν τη διαφυγή προς τη θάλασσα. Με τη δημιουργία ενός φράγματος παρατηρούνται δύο σοβαρά προβλήματα. Αρχικά, παρατηρείται αδυναμία τροφοδότησης και εμπλουτισμού των παραποτάμιων περιοχών από τον υδροφορέα που έχει αποκοπεί και αυτό έχει αρνητικές επιπτώσεις στη χλωρίδα και στην πανίδα των περιοχών αυτών. Το δεύτερο σοβαρό πρόβλημα που παρατηρείται είναι η διάβρωση των παράκτιων ζωνών. Αυτό οφείλεται στην αποκοπή

μεταφοράς μεγάλου όγκου υλικών στις παράκτιες ζώνες. Τα υλικά αυτά είναι συνήθως χώμα και πέτρες που παρασύρονται από τους ποταμούς μέχρι τις εκβολές τους στη θάλασσα, προστατεύοντας έτσι τα την ακτογραμμή από διάβρωση.

Τα φράγματα μπορεί να προκαλέσουν και άλλα σοβαρά προβλήματα, όπως είναι οι κοινωνικές επιπτώσεις της υποχρεωτικής μετεγκατάστασης πληθυσμού, την απώλεια καλής ποιότητας γης κάτω από τις τεχνικές λίμνες των φραγμάτων, την απώλεια νερού στις θερμές και ξηρές περιοχές μέσω εξάτμισης και υψηλών διαρροών στα δίκτυα διανομής, την έξαρση ορισμένων ασθενειών όπως η ελονοσία και η σχιστοσωμίαση, η εκδήλωση σεισμών εξαιτίας της πίεσης που ασκεί η μεγάλη ποσότητα νερού σε γεωλογικά εύθραυστα εδάφη και τέλος οι τεχνητές λίμνες – φράγματα γεμίζουν γρήγορα με ιλύ (Λατινόπουλος, 2007).

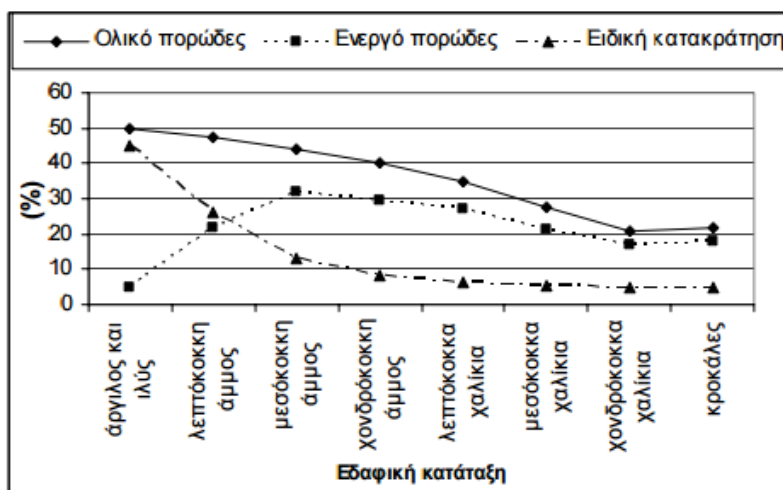
Οι περιβαλλοντικές επιπτώσεις από τη διαχείριση υδάτινων πόρων δεν περιορίζονται μόνο σε επιφανειακά ύδατα· επηρεάζουν και τα υπόγεια ύδατα. Τα υπόγεια ύδατα έχουν τη δυνατότητα αναπλήρωσης τους μέσω της διήθησης των κατακρημνισμάτων. Ο ρυθμός αναπλήρωσης τους εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το κλίμα. Για παράδειγμα, στη Μεσόγειο όπου παρατηρούνται πολύ υψηλές θερμοκρασίες και ξηρά καλοκαίρια, ο ρυθμός αναπλήρωσης είναι μειωμένος. Επίσης, συχνό φαινόμενο είναι η ανάγκη μεγαλύτερων ποσοτήτων νερού κατά τους καλοκαιρινούς μήνες τόσο λόγω της άρδευσης των καλλιεργειών όσο και λόγω της αύξησης του πληθυσμού ως αποτέλεσμα της έντονης τουριστικής δραστηριότητας στην περιοχή. Οι παράγοντες αυτοί οδηγούν σε αλόγιστους και εντατικούς ρυθμούς άντλησης νερού μέσω γεωτρήσεων. Όταν οι ρυθμοί άντλησης του νερού είναι μεγαλύτεροι από τους ρυθμούς αναπλήρωσης, τότε η στάθμη των υπόγειων υδάτων χαμηλώνει προκαλώντας σοβαρά προβλήματα. Η απουσία μηχανισμών ελέγχου των γεωτρήσεων και η έλλειψη συντονισμού ανάμεσα στις υπηρεσίες καθιστούν τις ιδιωτικές γεωτρήσεις μια εύκολη και φτηνή λύση για τους γεωργούς. Έτσι γίνεται μια εκμετάλλευση των υπόγειων υδάτων χωρίς να προηγείται η εκτίμηση της φυσικής αναπλήρωσης του νερού, με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε στην υπερ-εκμετάλλευση.

Ένα άλλο μεγάλο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι υπόγειοι υδροφορείς είναι η μόλυνση και η ρύπανση τους. Η ρύπανση τους μπορεί να οφείλεται σε αστικές, αγροτικές ή βιομηχανικές ζώνες, χωρίς να παίζει μεγάλη σημασία η πηγή προέλευσης της, εφόσον το αποτέλεσμα είναι το

ίδιο. Οι πολύ μικρές ποσότητες ροής που χαρακτηρίζουν τους υπόγειους υδροφορείς οδηγούν σε πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα για την απορρύπανση τους. (Φράγκου και Καλλής, 2010)

1.5 Περιγραφή και ταξινόμηση υπόγειων υδροφορέων

Υδροφορείς ή υδροφόροι (aquifers) είναι οι γεωλογικοί σχηματισμοί που περιέχουν αρκετό κορεσμένο με νερό υλικό, ώστε να τροφοδοτήσουν με σημαντικές ποσότητες νερού γεωτρήσεις ή πηγές. Οι υδροφορείς έχουν αυξημένη ικανότητα να αποθηκεύουν και να μεταβιβάζουν νερό. Το υδροφόρο στρώμα αποτελείται από το γεωλογικό σχηματισμό (σκελετό) και το υπεδάφικό νερό, που βρίσκεται σε βαρυτική μορφή και ως νερό συγκράτησης. Ως υδροφόρος ορίζοντας θεωρείται η άνω επιφάνεια του υδροφόρου, αν και οι έννοιες υδροφορέας, υδροφόρος, υδροφόρο στρώμα, υδροφόρος ορίζοντας χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν το ίδιο πράγμα.



Σχήμα 1.2 Μεταβολή του πορώδους και της ειδικής κατακράτησης σε σχέση με την εδαφική κατάσταση

Οι κυριότεροι τύποι υπόγειων υδροφορέων είναι:

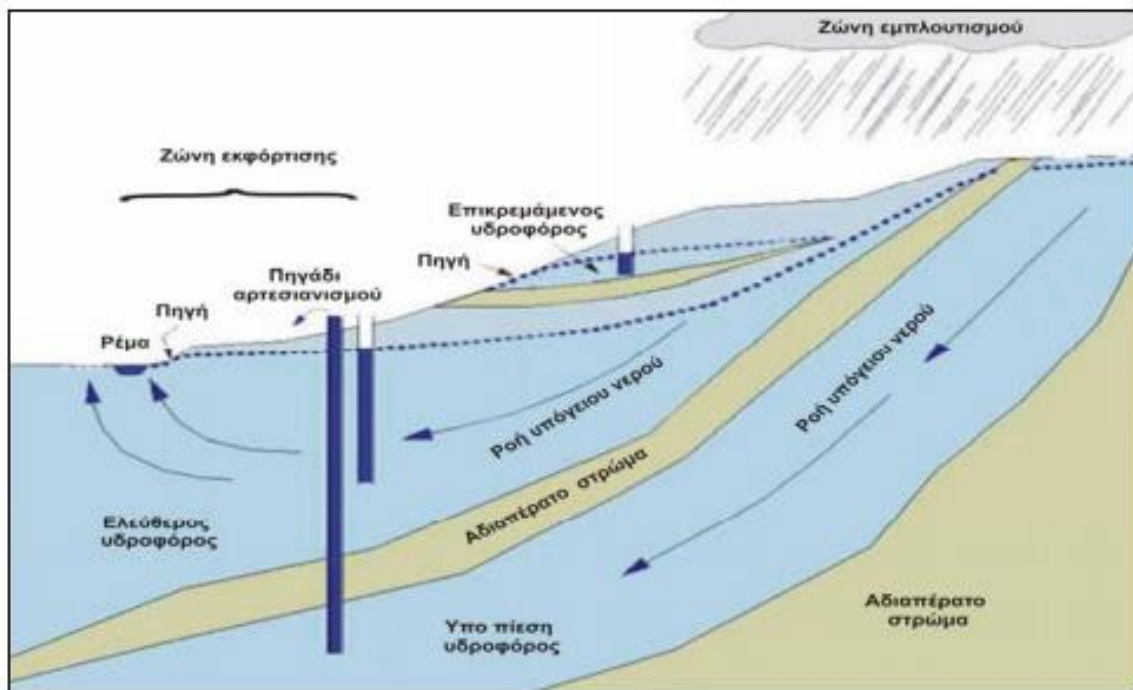
1) Ελεύθεροι υδροφορείς

Είναι οι υδροφόροι που έχουν ως δάπεδο στεγανό στρώμα και στην οροφή τους δεν παρεμβάλλεται αδιαπέρατο γεωλογικό στρώμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στην ελεύθερη

επιφάνεια (φρεάτια) των υπόγειων νερών η υδροστατική πίεση να είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Οι μεταβολές της στάθμης του νερού αντιστοιχούν σε μεταβολές του όγκου του αποθηκευμένου νερού στον υδροφόρο. Ειδική περίπτωση ελεύθερων υδροφόρων είναι οι κρεμαστοί ή επικρεμάμενοι υδροφόροι (perched) (Σχ. 1.3).

2) Υπό πίεση υδροφόροι ή εγκλωβισμένοι ή αρτεσιανοί

Στα υδροφόρα αυτά στρώματα το νερό είναι εγκλωβισμένο ανάμεσα στα αδιαπέρατα στρώματα του δαπέδου και της οροφής (Σχ. 1.3). Είναι κορεσμένοι σε όλο το πάχος τους και η πίεση του νερού είναι μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής. Για τον λόγο αυτό η 10 πιεζομετρική επιφάνεια, η οποία είναι μια εικονική επιφάνεια και συμπίπτει με το επίπεδο της υδροστατικής επιφάνειας στον υδροφόρο, βρίσκεται ψηλότερα από τη βάση της αδιαπέρατης οροφής. Όταν η πιεζομετρική επιφάνεια βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του εδάφους, τότε παρατηρείται αυτόματη ροή με τη μορφή πίδακα (αρτεσιανισμός).



Σχήμα 1.3 Είδη υδροφόρων οριζόντων

3) Ημιαρτεσιανοί (υπό μερική πίεση) υδροφορείς

Πρόκειται για υπόγειους υδροφορείς ανάλογους με τους υπό πίεση με τη διαφορά ότι το υπερκείμενο στρώμα είναι ημιπερατό, παρουσιάζει δηλαδή μικρή υδροπερατότητα. Από πετρογραφικής άποψης διακρίνονται δύο μεγάλες κατηγορίες υδροφορέων:

- καρστικοί (karst aquifers), που αναπτύσσονται στα ανθρακικά πετρώματα και
- πορώδεις (porous aquifers), που αναπτύσσονται σε κοκκώδεις σχηματισμούς (τεταρτογενείς και αδρομερείς νεογενείς αποθέσεις).

1.6 Δομή της εργασίας

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται η γενική μαθηματική περιγραφή της θεωρίας της κίνησης του υπόγειου νερού και οι φυσικές παράμετροι των υδροφορέων, καταλήγοντας στην εξίσωση του Boussinesq. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται με λεπτομέρεια μία νέα εξαιρετική προσεγγιστική λύση που αποδίδει με σαφήνεια τη φυσική λειτουργία της συσσώρευσης του νερού σε οριζόντιο υδροφορέα. Τέλος συνοψίζονται τα κύρια συμπεράσματα αυτής της εργασίας στο 4^ο κεφάλαιο.

2. Μαθηματική προσέγγιση υπόγειων υδροφορέων

Στην ενότητα αυτή αναλύεται η γενική μαθηματική θεωρία περιγραφής της ροής σε υπόγειους υδροφορείς, αναλύονται οι φυσικές παράμετροι των υδροφορέων και παρουσιάζεται η εξίσωση του Boussinesq για οριζόντιο υδροφορέα με τις οριακές συνθήκες της που συνθέτουν το πρόβλημα στο οποίο εστιάζουμε.

2.1 Παράμετροι Υπόγειου Υδροφορέα

Εστιάζοντας στο πρόβλημα της ροής σε υπόγειο και θεωρητικά οριζόντιο υδροφορέα, αρχικά θα γίνει περιγραφή όλων των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν το υδρολογικό σύστημα του. Επιπρόσθετα, θα γίνει ανάλυση των παραγόντων που συμμετέχουν στην ανατροφοδότηση του υπόγειου υδροφορέα και πώς οι παράγοντες αυτοί επιδρούν στη συμπεριφορά ροής του. Πιο συγκεκριμένα, η μόνιμη κίνηση του νερού στα υδροφόρα στρώματα με *ελεύθερη επιφάνεια* περιγράφεται από την εξίσωση του *Boussinesq* (1904), μία μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση. Σύμφωνα με τον *Vasilakopoulos* (2010) μία γενική μορφή της πιο πάνω εξίσωσης που περιγράφει τη ροή σε ένα ελεύθερο υδροφόρο στρώμα σε δύο διαστάσεις και τηρεί την θεμελιώδη αρχή διατήρησης της μάζας είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h K_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (h K_z \frac{\partial h}{\partial z}) = n \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.1)$$

Πιο κάτω περιγράφονται αναλυτικά οι παράμετροι που εμφανίζονται στην πιο πάνω εξίσωση καθώς και περαιτέρω παράμετροι οι οποίοι παρατηρούνται σε ένα υπόγειο υδροφορέα και που θα αναλυθούν στα επόμενα κεφάλαια:

Πιεζομετρικό ύψος (h): Το πιεζομετρικό ύψος, (άλλως πιεζομετρικό φορτίο), θεωρείται η ενέργεια που ισούται με το άθροισμα του φορτίου πίεσης P/γ και του φορτίου ύψους (ή θέσης) της απόστασης από το επίπεδο αναφοράς z . Συγκεκριμένα, το πιεζομετρικό ύψος δίνεται από την

εξίσωση $h = (P/\gamma) + z$, όπου P είναι η υδροστατική πίεση και γ το ειδικό βάρος του νερού που ισούται με το γινόμενο της πυκνότητας του και της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Επιπρόσθετα, μετρείται κάθετα από την επιφάνεια του αδιαπέρατου στρώματος του υπεδάφους του υδροφόρου ορίζοντα με φορά προς τα πάνω και συμβολίζεται με L (m). Το φορτίο h αναφέρεται και ως πιεζομετρικό φορτίο ή πιεζομετρικό δυναμικό και ταυτίζεται με το απόλυτο υψόμετρο της στάθμης του υπόγειου νερού σε μια γεώτρηση ανορυγμένη σε ελεύθερο υδροφορέα. Στους υπό πίεση υδροφορείς το φορτίο είναι το απόλυτο υψόμετρο που θα έφτανε το νερό, αν ο σωλήνας της γεώτρησης επεκτεινόταν πάνω από την επιφάνεια του εδάφους. Συμπεραίνεται ότι, η κίνηση του υπόγειου νερού σε ένα πορώδες μέσο οφείλεται στην υδροστατική πίεση και στη θέση του ως προς το επίπεδο αναφοράς. Η μεταβολή του υδραυλικού φορτίου ανά μονάδα μήκους κατά τη διεύθυνση της υπόγειας ροής ονομάζεται υδραυλική κλίση και δίνεται από τη σχέση: $i=dH/dL$. Το υδραυλικό φορτίο H σε ένα σημείο του πορώδους μέσου πολλαπλασιασμένο με την επιτάχυνση της βαρύτητας g , δίνει το δυναμικό ροής Φ στο σημείο αυτό, δηλαδή $\Phi = H g$. Εν κατακλείδι, το Φ είναι η ενέργεια ανά μονάδα μάζας και το H η ενέργεια ανά μονάδα βάρους. Το υδραυλικό φορτίο δεν μένει σταθερό, αλλά μειώνεται κατά την κίνηση του υπόγειου νερού, λόγω απωλειών όπως οι τριβές.

Υδραυλική αγωγιμότητα (k): Η υδροπερατότητα ή υδραυλική αγωγιμότητα k χρησιμοποιείται στην Υδρογεωλογία για χαρακτηρισμό της ευκολία της κίνησης του νερού δια μέσου του πορώδους μέσου. Συγκεκριμένα, ένα μέσο έχει υδραυλική αγωγιμότητα ίση με τη μονάδα, όταν μεταβιβάζει στη μονάδα του χρόνου κάθετα στη διεύθυνση της υπόγειας ροής, τη μονάδα του όγκου του νερού από μοναδιαία διατομή με υδραυλική κλίση ίση με τη μονάδα και την επικράτηση του κινηματικού ιξώδους. Το κινηματικό ιξώδες σχετίζεται με την εσωτερική τριβή και την αντίσταση του υγρού στην υπόγεια ροή. Η υδραυλική αγωγιμότητα έχει διαστάσεις ταχύτητας LT^{-1} .

Γενικά οι γεωλογικοί σχηματισμοί χαρακτηρίζονται ως ακολούθως (βλ. Πίν. 2.1):

- Πολύ υδροπερατοί $\rightarrow k \geq 10^{-1}$ m/s
- Υδροπερατοί $\rightarrow 10^{-6} < k < 10^{-1}$ m/s
- Λίγο Υδροπερατοί $\rightarrow 10^{-9} < k < 10^{-6}$ m/s

- Πρακτικά στεγανοί $\rightarrow k \leq 10^{-9}$ m/s
- Η υδραυλική αγωγιμότητα υπολογίζεται με επιτόπου πειραματικές μετρήσεις, δοκιμαστικές αντλήσεις, κοκκομετρία με τη βοήθεια εμπειρικών τύπων, εργαστηριακές μεθόδους και με ιχνηθετήσεις. Η ακόρεστη υδραυλική αγωγιμότητα, ως μέτρο κίνησης του νερού σε ακόρεστο μέσο, είναι μικρότερη από την τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας σε κορεσμένο μέσο. Με βάση την περιεκτικότητα του νερού, η υδραυλική αγωγιμότητα ενός ακόρεστου μέσου (k_{unsat}) σε σχέση με την κορεσμένη τιμή (k) δίνεται από τη σχέση: $k_{unsat} = k [(S_s - S_o) / (1 - S_o)]^3$, όπου: S_s είναι ο βαθμός κορεσμού και S_o είναι ο υπολλειματικός κορεσμός που αντιπροσωπεύει το νερό των πόρων που είναι ακίνητο και δεσμεύεται από τις τριχοειδείς δράσεις.

Υλικό	Υδραυλική αγωγιμότητα k (m/s)
Άργιλος	$2,3 \cdot 10^{-9}$
Ίλος	$9,2 \cdot 10^{-7}$
Λεπτόκοκκη Άμμος	$2,9 \cdot 10^{-5}$
Μεσόκοκκη Άμμος	$1,4 \cdot 10^{-4}$
Χονδρόκοκκη Άμμος	$5,2 \cdot 10^{-4}$
Χαλίκια μικρού μεγέθους	$5,2 \cdot 10^{-3}$
Χαλίκια μεσαίου μεγέθους	$3,1 \cdot 10^{-3}$
Μεγάλα χαλίκια	$1,7 \cdot 10^{-3}$

Πίνακας 2.1 Τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας (Kallergis et al., 1999)

Απορροή (q): Απορροή είναι ο όγκος ρέοντος νερού ανά μονάδα χρόνου στο υδροφόρο στρώμα, και έχει διαστάσεις L^2T^{-1} . Για να γίνει όγκος ανά μονάδα χρόνου αρκεί να πολλαπλασιαστεί με το πλάτος του υδροφορέα. Κατά τον υπολογισμό του συγκεκριμένου μεγέθους στο σημείο εξόδου του υδροφορέα, λαμβάνεται υπόψη η συνολική απορροή ανά μονάδα χρόνου.

Ρυθμός επαναφόρτισης (r): Είναι ο ρυθμός φόρτισης των νερών του υπόγειου υδροφορέα λόγω κατείδυσης (κατακρημνίσματα που διαπερνούν την επιφάνεια του εδάφους) και έχει διαστάσεις ταχύτητας LT^{-1} .

Μήκος (L): Είναι το μήκος του υδροφόρου ορίζοντα και έχει διαστάσεις L .

Μεταβιβαστικότητα (T): Είναι το γινόμενο της υδραυλικής αγωγιμότητας (k) επί το πάχος του υδροφόρου στρώματος (D) και δίνεται από την εξίσωση: $T = kD$. Η μεταβιβαστικότητα εκφράζει τον όγκο νερού που διαπερνά μια μοναδιαία διατομή του υδροφόρου στρώματος με υδραυλική κλίση ίση με τη μονάδα και την επικράτηση του κινηματικού ιξώδους.

Αποθηκευτικότητα (S): Ο συντελεστής αποθηκευτικότητας ή υδροχωρητικότητας (S) είναι ο όγκος νερού που δύναται να ληφθεί ή να αποθηκευτεί από ένα κατακόρυφο πρίσμα ενός υδροφόρου στρώματος με μοναδιαία επιφάνεια ανά μονάδα μεταβολής του φορτίου. Η αποθηκευτικότητα ορίζεται από τη σχέση: $S = dV / (A dh)$, όπου dV είναι ο όγκος νερού που απελευθερώνεται ή προστίθεται από τη μονάδα οριζόντιας επιφάνειας A , εξαιτίας μοναδιαίας μείωσης ή αύξησης του φορτίου dh . Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι ο ρυθμός ταπείνωσης (μείωσης) της στάθμης ($dh/\Delta t$) σε έναν υπόγειο υδροφορέα επιφάνειας A και συντελεστή αποθηκευτικότητας S , για άντληση με παροχή q , χωρίς να συμβαίνει εμπλουτισμός, δίνεται από τη σχέση: $dh/\Delta t = q / (SA)$. Στους ελεύθερους υπόγειους υδροφορείς ο συντελεστής αποθηκευτικότητας είναι καθαρός αριθμός και παίρνει τιμές που κυμαίνονται από 1% - 30%, ενώ στους υπό πίεση υδροφορείς κυμαίνεται από 0,0001% - 0,5%. Η μεγάλη αυτή διαφορά οφείλεται στον διαφορετικό μηχανισμό απελευθέρωσης νερού από τα δύο είδη υδροφορέων. Στους υπό πίεση υδροφορείς η αφαίρεση ή η προσθήκη νερού οφείλεται σε διόγκωση του νερού και συμπίεση του υδροφορέα, επομένως η αποθηκευτικότητα συναρτάται με την ελαστικότητα του υδροφορέα και τη συμπιεστότητα του περιεχομένου σ' αυτόν υπόγειου νερού. Πρακτικά αυτό συνεπάγεται ότι για να εξαχθούν αξιόλογες ποσότητες νερού από τα υπό πίεση υδροφόρα στρώματα, απαιτούνται μεγάλες μειώσεις της πιεζομετρικής στάθμης σε μεγάλη έκταση του υπόγειου υδροφορέα. Ο συντελεστής αποθηκευτικότητας S στους ελεύθερους υδροφορείς

συμπίπτει με το ενεργό πορώδες, ενώ στους υπό πίεση υπόγειους υδροφορείς ισχύει η ακόλουθη εξίσωση: $S = \gamma D (\alpha + \beta S_y)$, όπου γ είναι το ειδικό βάρος του νερού, D το πάχος του υδροφορέα, S_y το ενεργό πορώδες, α ο συντελεστής συμπίεστικότητας του υδροφορέα και β ο συντελεστής συμπίεστικότητας του νερού.

Κλίση (α): ορίζεται η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του επιπέδου του υδροφόρου ορίζοντα και του οριζόντιου επιπέδου.

Πορώδες (n): Το πορώδες (n) ή ολικό πορώδες είναι ένα μέτρο των διακένων, δηλαδή των πόρων, των κενών και των ρωγμών που υπάρχουν σε ένα πέτρωμα ή έδαφος και εκφράζεται με το λόγο του συνολικού όγκου των διακένων (V_k) προς τον συνολικό όγκο του πετρώματος ή εδάφους ($V_{ολ.}$), συνεπώς εκφράζεται από την σχέση: $n = V_k/V_{ολ.}$ Μερικοί εδαφικοί και γενικότερα γεωλογικοί σχηματισμοί επιτρέπουν τη διείσδυση και κυκλοφορία του νερού δια μέσω των διακένων. Από την υδραυλική σκοπιά εντάσσονται στη γενική κατηγορία του πορώδους μέσου. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν ιζηματογενή, μη πλήρως στερεοποιημένα εδάφη ή και στερεοποιημένα πετρώματα που έχουν όμως πρώτα αποκτήσει ρωγμές, είτε από χημική διάβρωση, όπως οι ασβεστόλιθοι, είτε από ρηγμάτωση, όπως είναι τα εκρηξιγενή και μεταμορφωσιγενή εδάφη. Τα πορώδη αυτά μέσα χαρακτηρίζονται από στατικές και δυναμικές υδραυλικές ιδιότητες. Χαρακτηρίζοντας τα ως δεξαμενές νερού έχουν ως κύριο χαρακτηριστικό τη χωρητικότητα τους, ενώ ως γνωστοί αγωγοί διέλευσης νερού χαρακτηρίζονται από τις αντιστάσεις που προβάλλουν στην κίνηση του νερού. Όπως προκύπτει με βάση τα πιο πάνω, δεν υφίσταται απόλυτα συμπαγές πέτρωμα, δηλαδή συμπαγής στερεά φάση για δείγμα με διαστάσεις της τάξης των μερικών m^3 ή μερικών δεκάδων m^3 . Αντιθέτως, οι σχηματισμοί πετρωμάτων παρουσιάζουν περισσότερες ή λιγότερες ασυνέχειες, πόρους και γενικότερα κενά διαφόρων τύπων. Γενικά ο βαθμός και η ένταση με τα οποία παρουσιάζονται αυτά τα κενά εκφράζεται με μία υδρογεωλογική παράμετρο, ονομαζόμενη *πορώδες*. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται ενδεικτικές τιμές του ολικού πορώδες από 0 μέχρι 60%.

Προσχώσεις	Πορώδες (%)	Ιζηματογενή πετρώματα	Πορώδες (%)	Κρυσταλλικά πετρώματα	Πορώδες (%)
Μικρά Χαλίκια	24-36	Ψαμμίτες	5-30	Ρωγματομένα	0-10
Μεγάλα Χαλίκια	25-38	Ιλυόλιθοι	21-40	Μη ρωγματομένα	0-5
Χονδρόκοκκη Άμμος	31-48	Ασβεστόλιθοι	0-40	Βασάλτες	3-35
Λεπτόκοκκη Άμμος	26-53	Καρστοποιημένοι Ασβεστόλιθοι	0-40	Αποσαθρωμένοι Γρανίτες	34-57
Ίλος	34-61	Σχιστόλιθοι	0-10		
Άργιλος	34-60				

Πίνακας 2.2 Ενδεικτικές Τιμές ολικού πορώδους σε πετρώματα (Kallergis et al., 1999)

Στην επόμενη ενότητα αναλύεται εκτενώς το μαθηματικό μοντέλο περιγραφής της ροής στους υπόγειους υδροφορείς, εξετάζοντας τις αρχικές και οριακές συνθήκες και τις μαθηματικές εξισώσεις που συνθέτουν το πρόβλημα που θα μελετήσουμε.

2.2 Ο νόμος του Darcy

Σε γενικές γραμμές οι κινήσεις των υπόγειων νερών πραγματοποιούνται από θέσεις υψηλότερων ενεργειακών σταθμών σε θέσεις χαμηλότερων ενεργειακών σταθμών. Η θέση και η πίεση είναι δύο σημαντικοί παράγοντες που συμβάλουν στον καθορισμό της ενεργειακής στάθμης στα υπόγεια ύδατα, καθώς η κινητική ενέργεια είναι πρακτικά ασήμαντη λόγω των μικρών ταχυτήτων των υπόγειων νερών. Η κίνηση του νερού χάνει ενέργεια λόγω των τριβών στα τοιχώματα του στερεού εδαφικού σκελετού, ενώ η απώλειά της ανά μονάδα μήκους έχει βρεθεί πειραματικά ότι είναι ανάλογη της ταχύτητας του υπόγειου νερού για στρωτή ροή (Nanou-

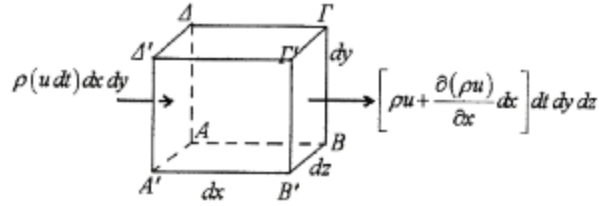
Giannarou, 2006). Ο νόμος του *Darcy* (1856) διατυπώνεται με την εξής μορφή: $q = \frac{Q}{A} = KJ$, όπου q είναι η ειδική παροχή ή ταχύτητα *Darcy*. Ειδική παροχή θεωρείται ο όγκος του νερού που περνά ανά μονάδα χρόνου από μια μοναδιαίου εμβαδού διατομή, κάθετη στην διεύθυνση της ροής. Το K είναι η υδραυλική αγωγιμότητα ή συντελεστής διαπερατότητας και το J είναι η υδραυλική κλίση που εκφράζεται ως $J = \frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{\Delta h}{L}$, όπου h είναι το πιεζομετρικό φορτίο και L το μήκος του υδροφόρου ορίζοντα. Για τρισδιάστατη ροή ομογενούς ισότροπου πορώδους μέσου n , ο νόμος του *Darcy* διατυπώνεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} q_x &= KJ_x = -K \frac{\partial h}{\partial x} = nV_x \\ q_y &= KJ_y = -K \frac{\partial h}{\partial y} = nV_y \\ q_z &= KJ_z = -K \frac{\partial h}{\partial z} = nV_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

όπου n είναι το πορώδες του υφιστάμενου εδάφους, V η ταχύτητα του νερού και το h το πιεζομετρικό φορτίο.

2.3 Η εξίσωση της Συνέχειας

Η ροή σε πορώδη μέσα περιγράφεται από την εξίσωση της συνέχειας ή εξίσωση διατήρησης της μάζας. Η εξίσωση αυτή νοεί ότι η μάζα του νερού σε διαφορικό όγκο διατηρείται, δηλαδή η μάζα που εισέρχεται όταν αφαιρεθεί από την μάζα που εξέρχεται ανά μονάδα χρόνου ισούται με την μεταβολή της μάζας στον διαφορικό αυτό όγκο που φαίνεται και στην πιο κάτω αναπαράσταση.



Σχήμα 2.1 Διαφορικός όγκος αναφοράς (Sotiropoulou 2010).

Η εξίσωση της συνέχειας από μαθηματικής πλευράς διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} \quad (2.3)$$

όπου q_x, q_y, q_z αντιπροσωπεύει την ειδική παροχή στις τρεις διευθύνσεις x, y, z αντίστοιχα, ρ είναι πυκνότητα του ρευστού, (στην παρούσα περίπτωση του νερού), και n το πορώδες εδάφους. Με χρήση του συντελεστή αποθηκευτικότητας S_o για τον περιορισμένο υδροφορέα έχουμε την εξής εξίσωση:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} = -\rho S_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.4)$$

Δεδομένου ότι η πυκνότητα ρ δεν μεταβάλλεται στον χώρο, το ρ ισούται με 1. Επομένως, η προηγούμενη εξίσωση (2.4) απλοποιείται στην πιο κάτω:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -S_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.5)$$

Προσθέτοντας τον όρο φόρτισης W (L^{-1}) στην προηγούμενη εξίσωση (2.5) έχουμε την εξής παραγόμενη εξίσωση:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -S_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} + W \quad (2.6)$$

Στην περίπτωση του φρεατίου υπόγειου υδροφορέα, το πιεζομετρικό φορτίο φ αντικαθίσταται με το βάθος ροής h , ενώ η μεταφορικότητα T ισούται με το γινόμενο της υδραυλικής αγωγιμότητας K και του βάθους ροής h . Επομένως, οι αντίστοιχες εξισώσεις για ομογενή και ισότροπο υδροφορέα εκφράζονται ως ακολούθως:

$$K \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h_x}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (2.7)$$

Θεωρώντας μονοδιάστατη ροή (Dupuit-Forheimer approximation) οδηγούμαστε στη βασική διατύπωση της εξίσωσης του Boussinesq που είναι και το κύριο αντικείμενο αυτής της εργασίας.

2.4 Ιστορική αναδρομή στην εξίσωση του Boussinesq

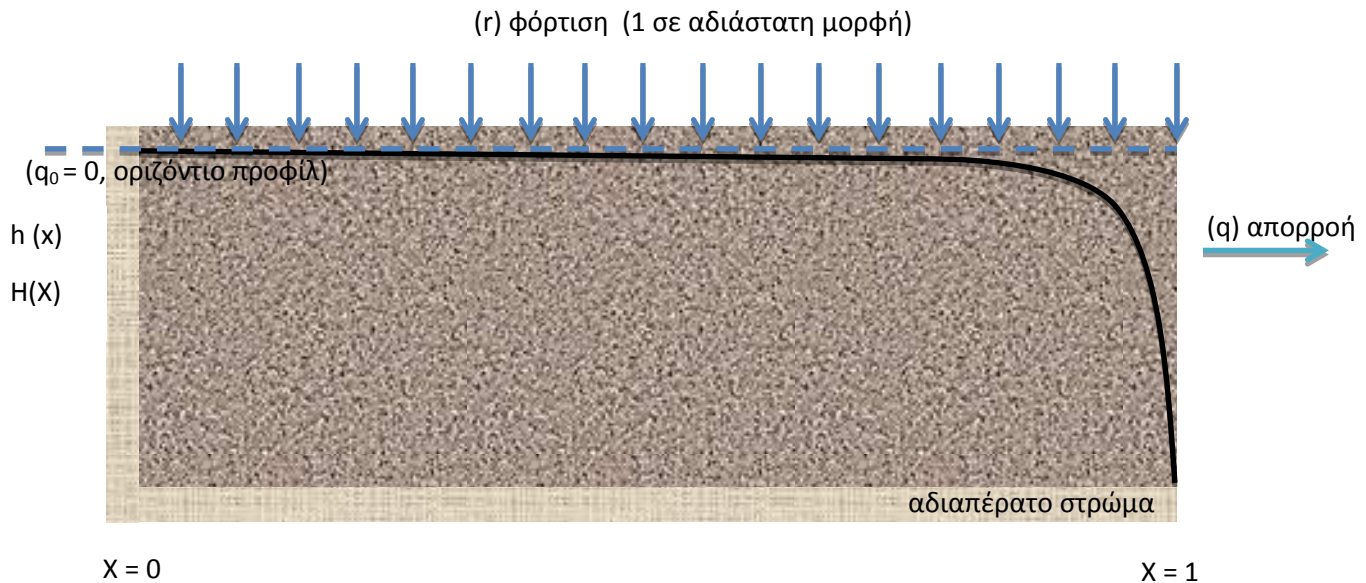
Η εξίσωση Boussinesq είναι μια δυναμική εξίσωση για την ελεύθερη επιφάνεια των ροών σε κορεσμένο υπέδαφος πάνω από ένα αδιαπέραστο στρώμα. Η εξίσωση Boussinesq είναι μη γραμμική. Η μη γραμμικότητα της προέρχεται από τη μείωση της διάστασης του προβλήματος: Η ροή εκλαμβάνεται να είναι κατακόρυφα ομοιογενής, επομένως ο ρυθμός ροής μέσα από μια διατομή της ροής είναι ανάλογη με το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας επί της υδραυλικής κλίσης, η οποία θεωρείται ότι είναι ίση με την κλίση της ελεύθερης επιφάνειας, (Dupuit, 1863). Σε γενικές γραμμές, «κατακόρυφα» σημαίνει καθέτως επί του εδαφικού στρώματος. Συνδυάζοντας την προσέγγιση Dupuit με την εξίσωση συνέχειας προκύπτει η εξίσωση του Boussinesq (Boussinesq, 1877).

Υπάρχουν πολύ λίγες αναλυτικές ακριβείς λύσεις της εξίσωσης αυτής. Για ανεμπόδιστη ροή και για μηδενικό συντελεστή αναπλήρωσης νερού, υπάρχουν ειδικές λύσεις οι οποίες είναι τετραγωνικά πολώνυμα της απόστασης από την είσοδο που προήλθαν και συζητήθηκαν όσον αφορά την οριζόντια περίπτωση από τους Parlange et al., 2000 και για την περίπτωση της βάσης υπό κλίση από τους Daly και Porporato, 2004. Για την εξαγωγή αυτών των λύσεων, χρησιμοποιείται ένας μετασχηματισμός ομοιότητας (Barenblatt, 1996) που είναι ένα κομψό, αλλά όχι όμως και απαραίτητο μέσο. Παρόμοιες λύσεις έχουν προταθεί στο παρελθόν από διάφορους συγγραφείς, και ο αναγνώστης μπορεί να βρει μία εκτενή συζήτηση στον Bear (1972). Μία σειρά δυναμικών λύσεων προήλθε για μία παρόμοια εξίσωση με την Boussinesq από τον Barenblatt (Barenblatt στο Ελ., 1990) για τον οριζόντιο υδροφορέα υποθέτοντας μια σταθερή οριακή συνθήκη για το βάθος του νερού στην είσοδο.

Αυτό το είδος της λύσης έχει μελετηθεί αρκετά στη βιβλιογραφία, βλέπετε π.χ. (Parlange et al., (2000), Lockington et al., (2000), Telyakovsky και Allen (2006)). Για την περίπτωση της περιορισμένης ροής για μηδενικό ρυθμό αναπλήρωσης, ο Boussinesq παρήγαγε για τον οριζόντιο υδροφορέα μια ακριβή λύση στη βάση του διαχωρισμού των μεταβλητών, (Boussinesq (1904), Polubarinova-Kochina (1962)) η οποία είναι ασυμπτωτική λύση μεγάλων χρόνων. Το κινηματικό κύμα, (Boussinesq (1877), Lighthill και Witham (1955), Henderson και Wooding (1964), Beven (1981)), είναι μια ενδιαφέρουσα λύση που προέκυψε με την εξαγωγή του μη-γραμμικού όρου από την εξίσωση Boussinesq. Αν και είναι μια προσεγγιστική λύση και αποδίδει καλά μόνο για μικρές τιμές της παραμέτρου λ των Henderson και Wooding, (δηλαδή για απότομες πλαγιές, υψηλή αγωγιμότητα ή μικρό ποσοστό αναπλήρωσης), γίνεται όλο και λιγότερο προσεγγιστική για τις μικρότερες τιμές της παραμέτρου. Στο όριο του οριζόντιου υδροφορέα δεν υπάρχει πλήρης μαθηματική περιγραφή. Μία ιδιαίτερα ακριβής προσεγγιστική λύση θα παρουσιαστεί στο τελευταίο τμήμα της εργασίας αυτής.

3. Προσέγγιση της επίλυσης της ομοιόμορφης φόρτισης πεπερασμένου οριζόντιου υπόγειου υδροφορέα

Στο κεφάλαιο αυτό κατασκευάζονται νέες προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* για την περίπτωση του περιορισμένου οριζόντιου υδροφόρου ορίζοντα τη φάση της συσσώρευσης. Θα παρουσιάσουμε την εξίσωση του *Boussinesq* για τον οριζόντιο υδροφορέα και την αριθμητική της επίλυση και στη συνέχεια θα αναπτύξουμε σε λεπτομέρεια μία καινούργια προσέγγιση η οποία διατηρεί τη μη γραμμικότητα σε μεγάλο βαθμό. Η νέα μέθοδος βασίζεται σε μια εξειδικευμένη εικασία «*ansatz*» του προφίλ του νερού στον υδροφορέα για κάθε φάση του, που αφήνει ορισμένες λειτουργίες του χρόνου ως βαθμούς ελευθερίας για να καθοριστεί έτσι η δυναμική του προβλήματος. Οι τελευταίοι, στη συνέχεια, προσδιορίζονται μέσω της ικανοποίησης της εξίσωσης *Boussinesq* στα ακραία σημεία του υδροφορέα. Οι προκύπτουσες συνθήκες μπορούν να λυθούν με ακρίβεια οδηγώντας σε προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες είναι πολύ ακριβείς και απλές.



Σχήμα 3.1 Σχηματική αναπαράσταση της ροής σε οριζόντιο υδροφορέα με φόρτιση.

3.1 Η εξίσωση του Boussinesq

Η εξίσωση *Boussinesq* για οριζόντιο υδροφορέα (σχήμα 3.1) είναι:

$$n \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2} k \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = r \quad (3.1)$$

Ο υδροφορέας περιορίζεται στα όρια $x = 0$ (ανάντη όριο) και $x = L$ (κατάντη όριο), έτσι θεωρείται πως ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0, \quad h(L, t) = 0 \quad (3.2)$$

όπου η πρώτη προϋπόθεση συνεπάγει μηδενικές εισροές καθώς ανέρχεται σε τάση φυγής της ροής *Darcy*

$$q = -kh \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.3)$$

που κωδικοποιείται έτσι η παρουσία ενός κάθετου αδιαπέραστου ορίου. Η δεύτερη προϋπόθεση στις οριακές συνθήκες (3.2), υποδηλώνουν ότι ο υδροφόρος ορίζοντας είναι κατακόρυφος, δηλαδή, με άπειρη κλίση στο κάτω όριο του, διότι η διατήρηση μάζας απαιτεί να υπάρχει μια μη μηδενική εκροή στο σημείο αυτό, ενώ το βάθος του νερού είναι μηδέν. Στο σημείο αυτό επικεντρωνόμαστε στη φάση της σταδιακής συσσώρευσης. Θα υποθέσουμε ότι το ποσοστό αναπλήρωσης r είναι σταθερό και έπειτα εισάγουμε αδιάστατες ποσότητες των παραμέτρων των εξισώσεων που θα ακολουθήσουν στην συνέχεια

$$\tau = \frac{rt}{nL}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad H = \frac{h}{L} \quad (3.4)$$

Έτσι, η εξίσωση *Boussinesq* και οι οριακές συνθήκες με τις αδιάστατες παραμέτρους διαβάζονται όπως πιο κάτω:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} = 1, \quad H(1, \tau) = 0, \quad H'(0, \tau) = 0 \quad (3.5)$$

όπου υποδηλώνεται μερική διαφοροποίηση σε σχέση με την αδιάστατη απόσταση X . Η λύση της μόνιμης κατάστασης ισορροπίας αυτού του προβλήματος, που είναι η ασυμπτωτική λύση σε μεγάλες τιμές χρόνου, προκύπτει εύκολα αν μηδενιστεί η χρονική παράγωγος και οδηγεί στη μορφή:

$$H^2 = 1 - X^2 \quad (3.6)$$

Σε κάθε περίπτωση η εξίσωση (3.5) είναι μη γραμμική και δεν υπάρχουν γνωστές αναλυτικές λύσεις της. Θα παρουσιάσουμε μερικές απλοποιημένες γραμμικοποιήσεις της εξίσωσης (3.5) οι οποίες οδηγούν σε επιλύσιμες μορφές και στη συνέχεια θα αναπτύξουμε σε λεπτομέρεια μία καινούργια προσέγγιση η οποία διατηρεί τη μη γραμμικότητα σε μεγάλο βαθμό.

3.2 Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (3.5)

Χρησιμοποιούμε κεντρικές διαφορές στο χώρο και *forward* σχήμα στο χρόνο και η εξίσωση (3.5) θέτοντας $H^2(X, T) \equiv F(X, T) \approx F(i\Delta X, n\Delta T) \equiv F_i^n$, γράφεται ως

$$\frac{\sqrt{F_i^{n+1}} - \sqrt{F_i^n}}{\Delta T} = \frac{1}{2} \frac{F_{i+1}^n - 2F_i^n + F_{i-1}^n}{\Delta X^2} + 1, \quad (3.6)$$

οπότε κάθε νέο χρονικό βήμα υπολογίζεται άμεσα συναρτήσει των προηγούμενων ως

$$H(i\Delta X, (n+1)\Delta \tau) = \sqrt{F_i^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{F_{i+1}^n - 2F_i^n + V}{\Delta X^2} \Delta T + \Delta T + \sqrt{F_i^n} \quad (3.7)$$

Προκειμένου να ελέγξουμε την ακρίβεια του αριθμητικού σχήματος, επιλύουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο την αντίστοιχη προσέγγιση της

$$\frac{\langle \sqrt{F^n} \rangle}{F_i^n} \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta T} = \frac{F_{i+1}^n - 2F_i^n + F_{i-1}^n}{\Delta X^2}, \quad (3.8)$$

και συγκρίνουμε με την αναλυτική της επίλυση. Σε αυτήν την περίπτωση το μέσο βάθος σε κάθε χρονικό βήμα $\langle \sqrt{F^n} \rangle$ υπολογίζεται από αριθμητική ολοκλήρωση με τον κανόνα του *Simson*, δηλαδή

$$\langle \sqrt{F^n} \rangle = \Delta X \frac{F_0^n + 4F_1^n + 2F_2^n + 4F_3^n + 2F_4^n + \dots + 4F_{i_{\max}-2}^n + 2F_{i_{\max}-1}^n + F_{i_{\max}}^n}{3} \quad (3.9)$$

Η σύγκριση με την αναλυτική λύση σε χρονικά βήματα $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ και χωρικά βήματα $\Delta X = 10^{-2}$ οδηγεί σε εξαιρετική συμφωνία με σφάλματα μικρότερα του 0.1%.

3.3 Προσεγγιστική λύση της εξίσωσης (3.5)

Από την παρατήρηση της αριθμητικής επίλυσης προκύπτει μία ποιοτική περιγραφή του φαινομένου όπου σε μικρούς χρόνους ($\tau < 0.4$) επικρατεί μία τάση γρήγορης αλλαγής του προφίλ, το οποίο εξελίσσεται με μορφή κατά προσέγγιση μεταβλητού τραπεζίου του οποίου το ύψος αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Σε μεταγενέστερους χρόνους ($\tau > 0.4$) το προφίλ παίρνει ένα σχετικά σταθερό παραβολικό σχήμα (πλησιάζει σε steady-state). Σε κάθε περίπτωση διαφαίνεται ένας σαφής διαχωρισμός της εξέλιξης του προφίλ σε μικρούς χρόνους, μικρότερους του 0.4, και μεγαλύτερους από το 0.4 χρόνους, συμπεράσμα το οποίο αποτελεί και την κεντρική ιδέα και έμπνευση για μία πιο αποτελεσματική και περιγραφική πρωτότυπη προσέγγιση του προβλήματος που θα ακολουθήσει.

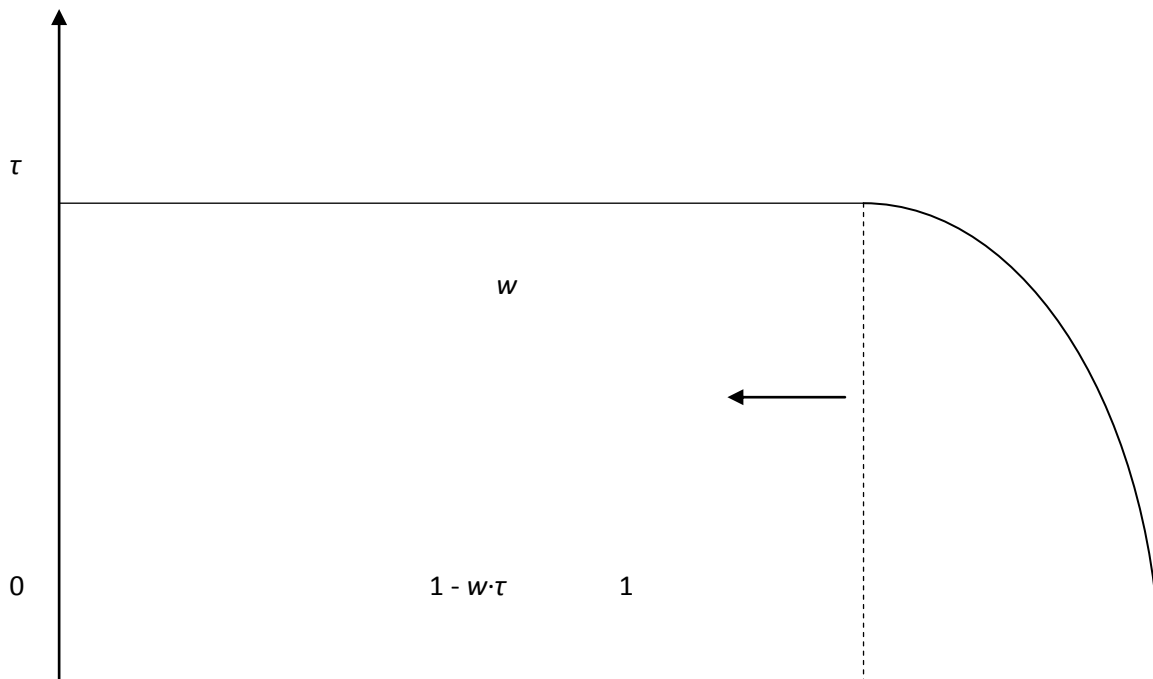
3.3.1 Προσέγγιση με σχήμα ομοιότητας κατά τα πρώτα στάδια της συσσώρευσης

Έστω ότι στους αρχικούς χρόνους της ανόδου του προφίλ από άδειο υδροφορέα, για $0 \leq \tau \leq 1/w$, το πρόβλημα διατηρεί έναν κατά προσέγγιση σχήμα ομοιότητας (που στοιχειοθετείται από την ίδια τη *Boussinesq* όπως έδειξαν οι *Gravanis and Akylas*, 2016) σχήμα του ακόλουθου κυματικού τύπου

$$0 \leq X \leq 1 - w \cdot \tau: H(X, \tau) = \tau, \quad 1 - w \cdot \tau \leq X \leq 1: H(y, \tau) = \tau \sqrt{1 - y^4}, \quad (3.10)$$

$$\text{όπου } y = \frac{X - 1 + w \cdot \tau}{w \cdot \tau}.$$

Η υποθετική αυτή μορφή που έχει προταθεί από τους (Akylas and Gravanis, 2016) έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Το πρώτο τμήμα της προσεγγιστικής λύσης ικανοποιεί προφανώς την εξίσωση Boussinesq λόγω της οριζοντιότητας που έχει υποτεθεί ότι ισχύει, ενώ το δεύτερο μέρος μεταδίδει ανάντι μία διαταραχή με μορφή κύματος με ταχύτητα w , λόγω της ύπαρξης του ορίου στο $X=1$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2. Το συνολικό σχήμα αυτό λίγο διαφέρει από την πραγματική λύση ομοιότητας των Gravanis and Akylas (2016), η οποία ισχύει για τους πρώτους χρόνους του προβλήματος και εκτείνεται σε όλο το εύρος του υδροφορέα. Η μεγαλύτερη απόκλιση από την πραγματική αυτή εικόνα στην περίπτωση μας προέρχεται από την παραδοχή πεπερασμένης ταχύτητας στη διάδοση της διαταραχής ανάντι και από τον προκαθορισμό του σχήματος της κυματικής διάδοσης, $\sqrt{1 - y^4}$.



Σχήμα 3.2 Η προσέγγιση της λύσεως ομοιότητας με τη διάδοση μίας κυματικής διαταραχής στα πρώτα στάδια του γεμίσματος

Στην πραγματικότητα η προσέγγιση μπορεί να γίνει πολύ ακριβέστερη θεωρώντας πολυωνυμική μορφή του τύπου $\sqrt{1 - a_1(t)y^4 - a_2(t)y^6 - \dots}$, όμως αυτό αυξάνει την πολυπλοκότητα της λύσης.

Αυτό που θέλουμε να παρουσιάσουμε εδώ είναι η απλούστερη προσεγγιστική μορφή που μπορεί να αποδώσει με φυσική καθαρότητα και αρκετή αξιοπιστία το μηχανισμό της απόκρισης στη φόρτιση του αρχικώς άδειου οριζόντιου υδροφορέα. Στα πλαίσια της υποθετικής λύσης 3.10 για αυτήν την πρώτη περίοδο του γεμίσματος, η αποθηκευτικότητα του υδροφορέα

$$S(\tau) = \int_0^1 H(X, \tau) dX, \text{ υπολογίζεται εύκολα συναρτήσει της παραμέτρου της ταχύτητας διάδοσης}$$

της διαταραχής w ως

$$S(\tau) = \tau - w \cdot \tau^2 + w \cdot A \cdot \tau^2, \quad (3.11)$$

όπου $A = \int_0^1 \sqrt{1 - y^4} dy = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{4})}{8\Gamma(\frac{7}{4})} = 0.874019\dots$ Προφανώς η απορροή σε αυτό το αρχικό χρονικό

διάστημα προκύπτει μέσω της διατήρησης της μάζας $Q(\tau) = 1 - dS / d\tau$, ως απολύτως γραμμική συνάρτηση του χρόνου και ίση με

$$Q(\tau) = 1 - dS / d\tau = 2w(1 - A)\tau. \quad (3.12)$$

Αντίστοιχα η απορροή στην έξοδο του υδροφορέα ($X = y = 1$), υπολογίζεται επίσης ως γραμμική συνάρτηση του χρόνου και από την τοπική κλίση του H^2 , σύμφωνα με τον ορισμό της απορροής στην εξίσωση του *boussinesq*,

$$Q(X = y = 1, w \cdot \tau \leq 1) = -\frac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial X} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{2w \cdot t} \frac{\partial H^2}{\partial y} \Big|_{x=1} = \frac{2\tau}{w}. \quad (3.13)$$

Ταυτίζοντας τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα (3.12) και (3.13), εκτιμάται, στα πλαίσια των υποθέσεων που παρουσιάστηκαν, η χαρακτηριστική ταχύτητα του προβλήματος $w = (1 - A)^{-1/2} = 2.817395\dots$ Η απορροή σε αυτό το αρχικό χρονικό στάδιο εξέλιξης προκύπτει

ίση με $Q(\tau) = 2(1-A)^{1/2} \tau = 0.709876 \tau$, αποτέλεσμα που υποεκτιμά κατά 3% μόλις, την πραγματική τιμή (0.7314 όπως έχει προκύψει από τη μελέτη των *Gravanis and Akylas*, 2016) της αρχικής χρονικής αναλογίας της απορροής. Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινιστεί ότι με τη θεώρηση αυτής της τιμής στην ταχύτητα της διαταραχής έχει ισοδύναμα ικανοποιηθεί η μηδενική μέση απόκλιση των εκτιμώμενων προφίλ από την ακριβή λύση της εξίσωσης του *Boussinesq* σε όλο το εύρος της. Συγκεκριμένα όταν η προσεγγιστική λύση H , εισαχθεί στην εξίσωση του *Boussinesq* (μπορούμε να τα εκφράσουμε και ως προς y),

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} - 1 = -\frac{\partial e(X, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e^2(X, \tau)}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 H \cdot e(X, \tau)}{\partial X^2} = \delta(X, \tau) \quad (3.14)$$

δημιουργεί μία συστηματική διαφορά $\delta(X, \tau)$. Η μέση χωρική τιμή αυτής της διαφοράς είναι ταυτοτικά μηδενική. Αυτό διαφαίνεται εύκολα ολοκληρώνοντας ως προς X την παραπάνω

εξίσωση, οπότε προκύπτει $1 - \dot{S} = -\frac{1}{2} \partial_X^2 H^2 \Big|_{X=1} - \int_0^1 \delta(X, \tau) dX$, και επομένως η ταύτιση του

αριστερού μέλους και του πρώτου όρου στα δεξιά που εξασφαλίστηκε από την ισότητα της (3.3)

και (3.4), δημιουργεί μηδενική μέση απόκλιση, $\int_0^1 \delta(X, \tau) dX = 0$ (σχήμα 3.3). Φυσικά αυτό δεν

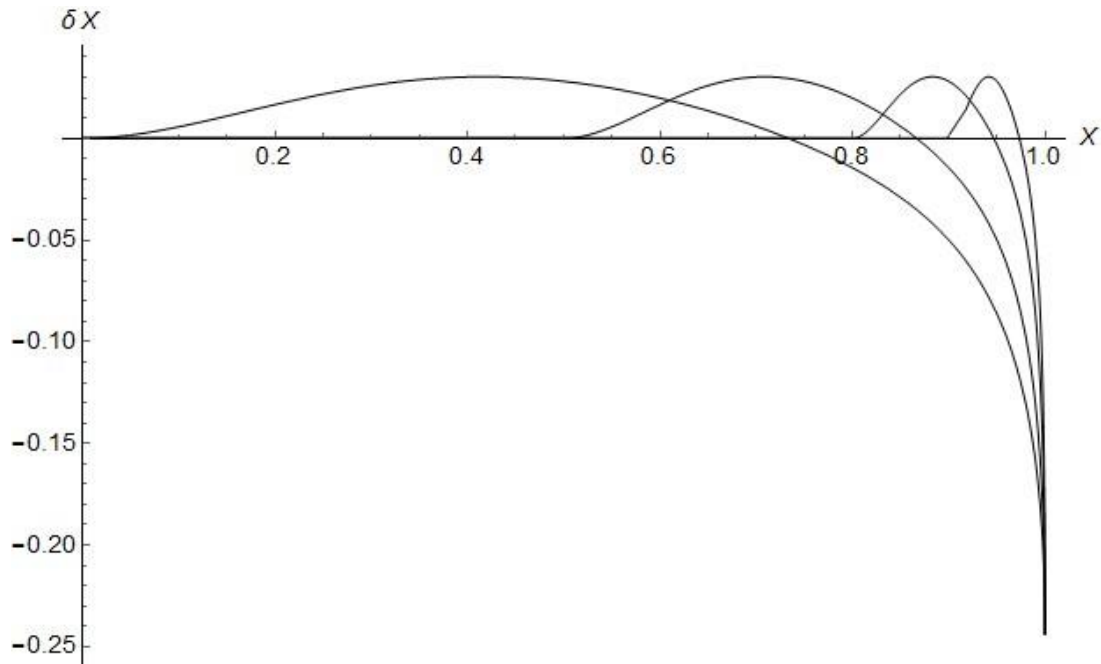
εξασφαλίζει ίδιους ρυθμούς απορροής με την πραγματική λύση, διότι αυτό θα επέβαλε ταύτιση με την πραγματική λύση και στο σημείο $X = 1$. Ο όρος $\delta(X, \tau)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία

χωρο-χρονική μεταβολή της φόρτισης από την ακριβή σταθερή τιμή του 1 που υιοθετήθηκε στο πρόβλημα. Διαφορετικά, η προσέγγιση μας επιλύει ακριβώς την εξίσωση (3.5) με φόρτιση $1 +$

$\delta(X, \tau)$. Από το σχήμα 3.3 προκύπτει ότι η διαφορά αυτή είναι μικρότερη το ± 0.05 στο μεγαλύτερο τμήμα του υδροφορέα και μόνο προς το κατάντι όριο αυξάνεται στο περίπου -25%.

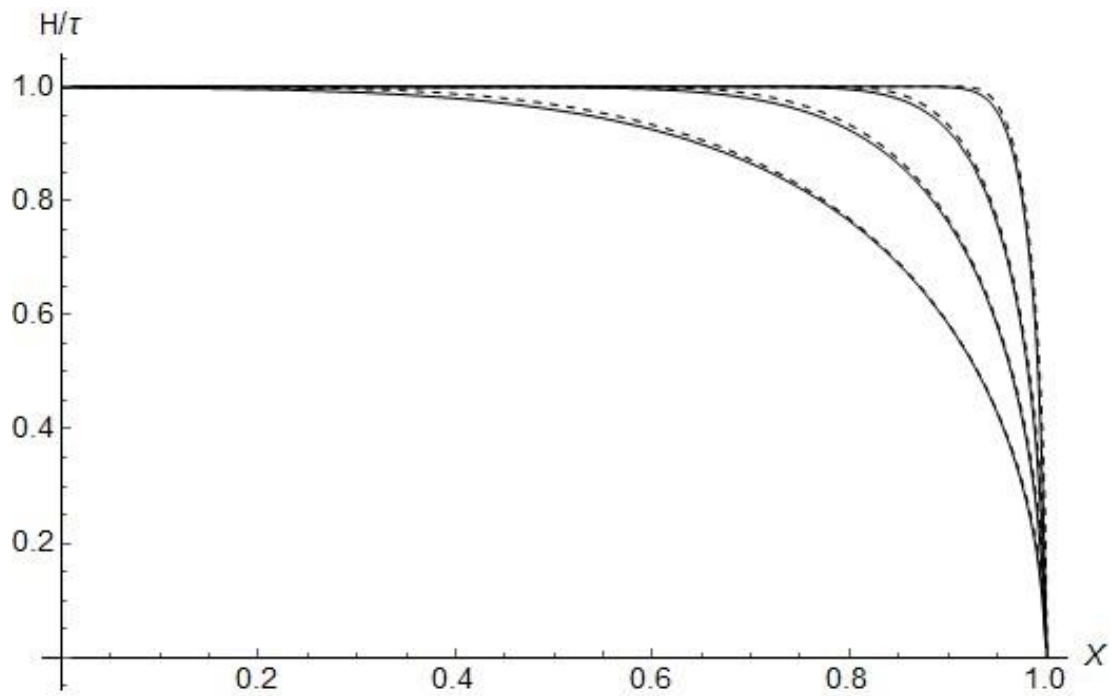
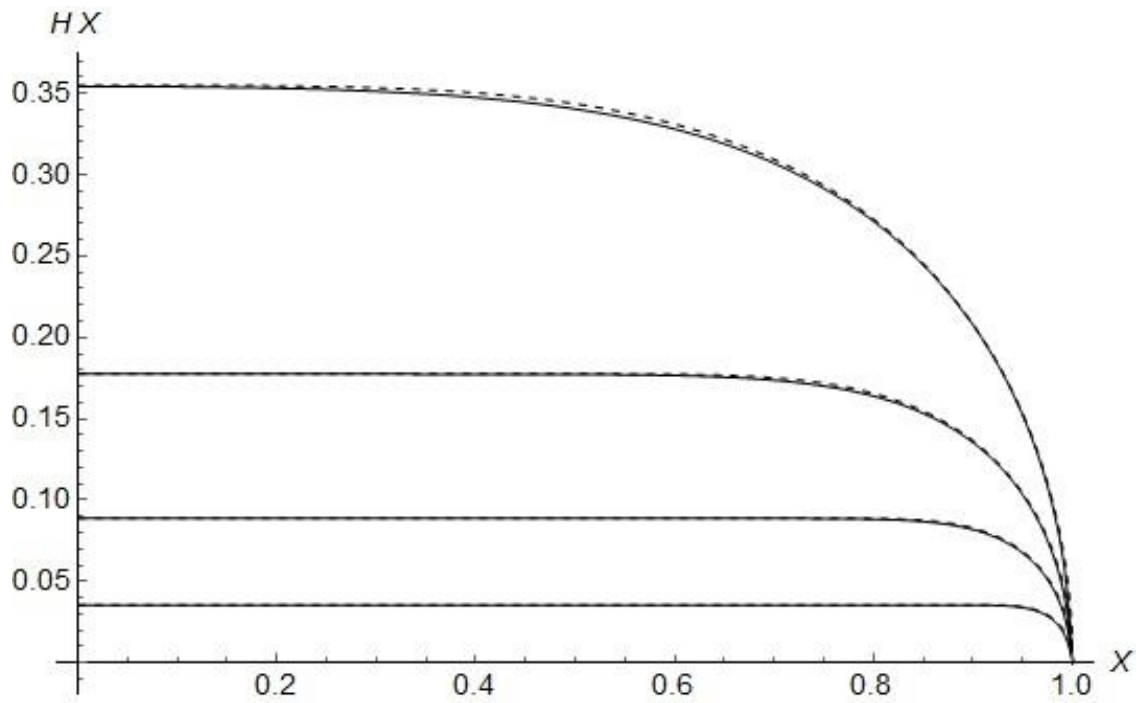
Όταν τελειώσει αυτό το πρώτο χρονικό τμήμα του γεμίσματος, έχει δημιουργηθεί σε χρόνο

ακριβώς $\tau_0 = 1/w = 0.355$, ένα προφίλ της μορφής $H(X, \tau_0) = \tau_0 \sqrt{1 - X^4}$, από $X = 0$ έως 1, εκτείνεται δηλαδή σε ολόκληρο το μήκος του υδροφορέα.

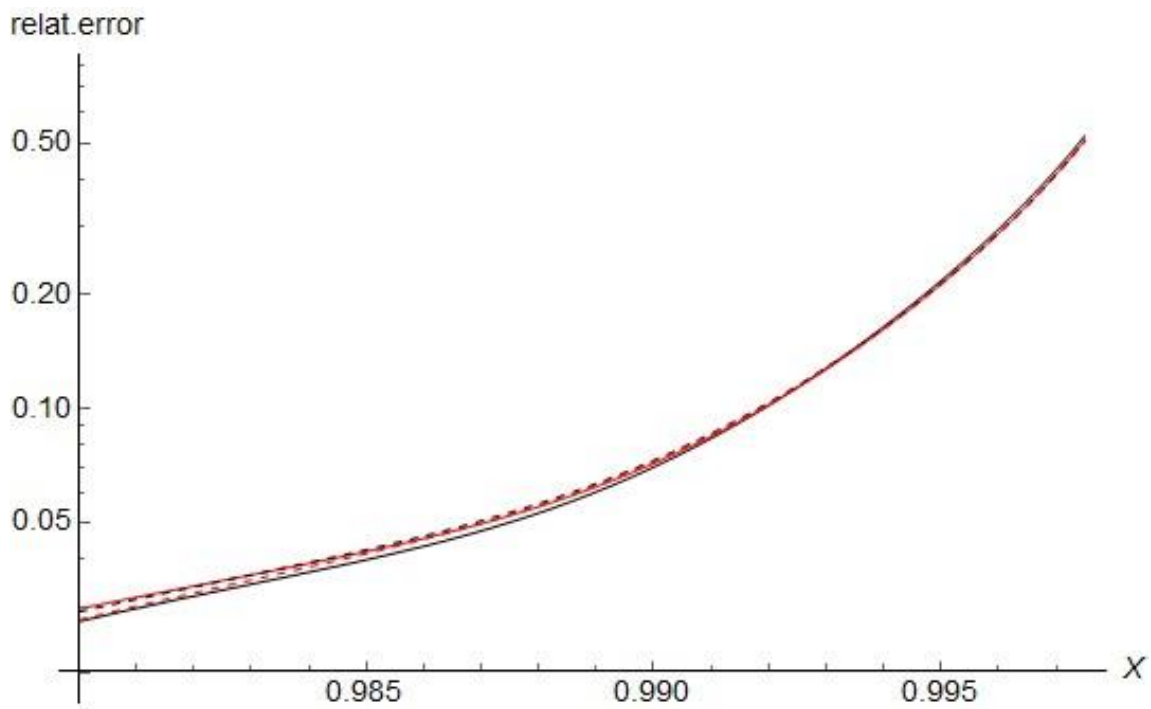
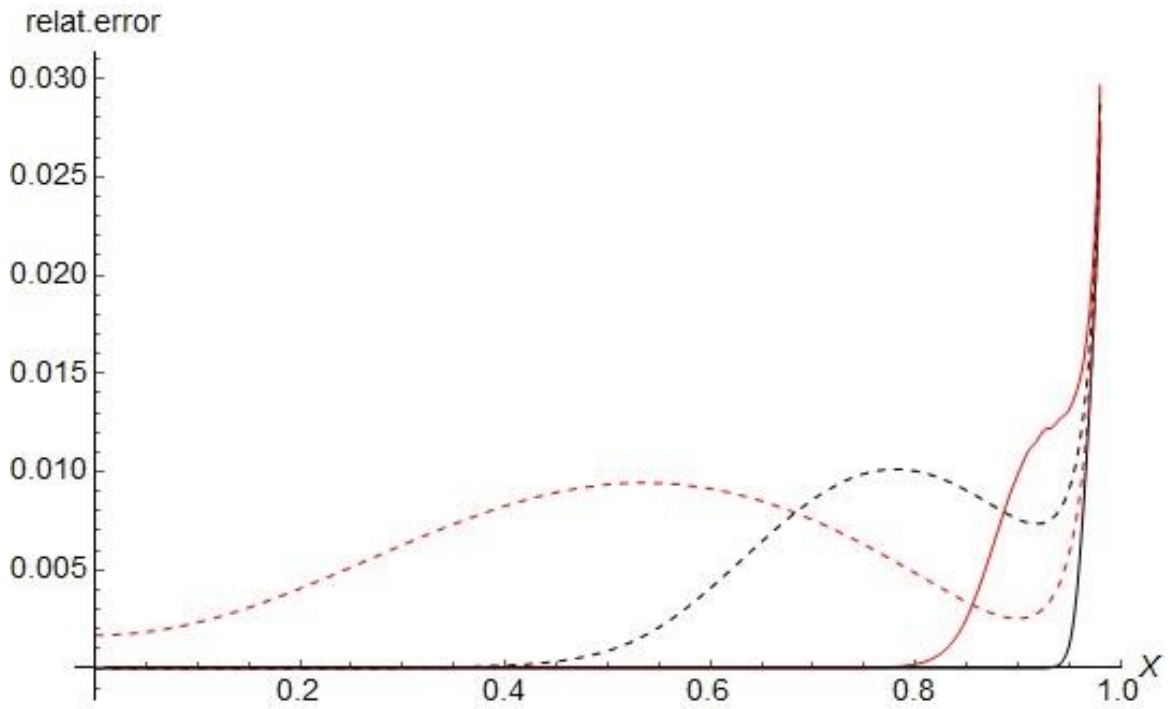


Σχήμα 3.3 Η απόκλιση της λύσης από την ακριβή εξίσωση Boussinesq σε επίπεδο φόρτισης για διάφορες χρονικές στιγμές στη διάρκεια των πρώτων σταδίων της φόρτισης.

Στα σχήματα 3.4 και 3.5 που ακολουθούν παρατίθενται συγκρίσεις της προσεγγιστικής λύσεως (3.10) με την αριθμητική επίλυση της *Boussinesq*, για την εξέλιξη του προφίλ του νερού έως και το χρόνο $\tau_0 = 1/w = 0.355$. Η σύγκριση αποδεικνύει πολύ καλή συμφωνία και σε ποιοτικό και σε ποσοτικό επίπεδο (Σχήμα 3.4), με διαφορές που στο κύριο τμήμα του υδροφορέα, $X \leq 0.98$ είναι μικρότερες του 3% αν και στη συνέχεια φτάνουν το 50% προς το όριο $X=1$ (Σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.4 Εξέλιξη του προφίλ $H(X,\tau)$ του νερού (πάνω) και του σχήματος $H(X,\tau)/\tau$ (κάτω) σε χρόνους $\tau_0/10$, $\tau_0/4$, $\tau_0/2$ και τ_0 , σύμφωνα με την αριθμητική λύση της Boussinesq (συνεχείς γραμμές) και την προσέγγιση της από την εξίσωση μας (3.10) (διακεκομμένες γραμμές).



Σχήμα 3.5 Σχετική διαφορά της επίλυσης του προφίλ $H(X,\tau)$ (3.10) από την αριθμητική επίλυση της Boussinesq σε χρόνους $\tau_0/10$, $\tau_0/4$, $\tau_0/2$ και τ_0 , (από δεξιά προς τα αριστερά). Στο κάτω σχήμα εστιάζονται τα τελευταία σημεία προς το κατάντη όριο.

3.3.2 Συνέχεια του γεμίσματος σε μεγαλύτερους χρόνους

Η συνέχεια της εξέλιξης μπορεί να προσεγγιστεί στη συνέχεια ως

$$H(X, \tau \geq \tau_0) = H(0, \tau) \sqrt{1 - a(\tau)X^2 + a(\tau)X^4 - X^4}, \quad (3.15)$$

με αρχικές συνθήκες $H(0, \tau_0) = \tau_0$, και $a(\tau_0) = 0$. Οι δύο άγνωστες μεταβλητές-συναρτήσεις στο πρόβλημα, $H(0, \tau > \tau_0)$ και $a(\tau > \tau_0)$ θα καθοριστούν από ισάριθμες συνθήκες. Η πρώτη συνθήκη προκύπτει από την ικανοποίηση της δεύτερης χωρικής παραγώγου της *Boussinesq* στο όριο $X = 0$, που απαιτεί

$$\dot{H}(0, \tau) + a(\tau)H^2(0, \tau) = 1. \quad (3.16)$$

Η (3.16) ικανοποιεί την ομαλότητα στην εξέλιξη του $H(0, \tau)$ επιβάλλοντας την χρονική παράγωγο του να είναι ίση με ένα στο χρόνο $\tau = \tau_0$. Η δεύτερη συνθήκη, η οποία διασφαλίζει και τη χρονική συνέχεια στην εξέλιξη της απορροής (όχι σε επίπεδο πρώτης παραγώγου όμως, όπως θα δούμε) μεταξύ των δύο σταδίων εξέλιξης, προκύπτει από την επιβολή της ισότητας (όπως και νωρίτερα) $1 - \dot{S} = -\frac{1}{2} \partial_X^2 H^2|_{X=1}$, θεωρώντας δηλαδή μηδενική μέση απόκλιση,

$\int_0^1 \delta(X, \tau) dX = 0$. Το αποθηκευμένο σε κάθε χρονική στιγμή νερό στον υδροφορέα προκύπτει

από το ολοκλήρωμα του προφίλ σε όλο το μήκος του υδροφορέα

$$S(\tau \geq \tau_0) = \int_0^1 H(X, \tau) dX = H(0, \tau) \int_0^1 \sqrt{1 - a(\tau)X^2 + a(\tau)X^4 - X^4} dX, \text{ που υπολογίζεται αναλυτικά}$$

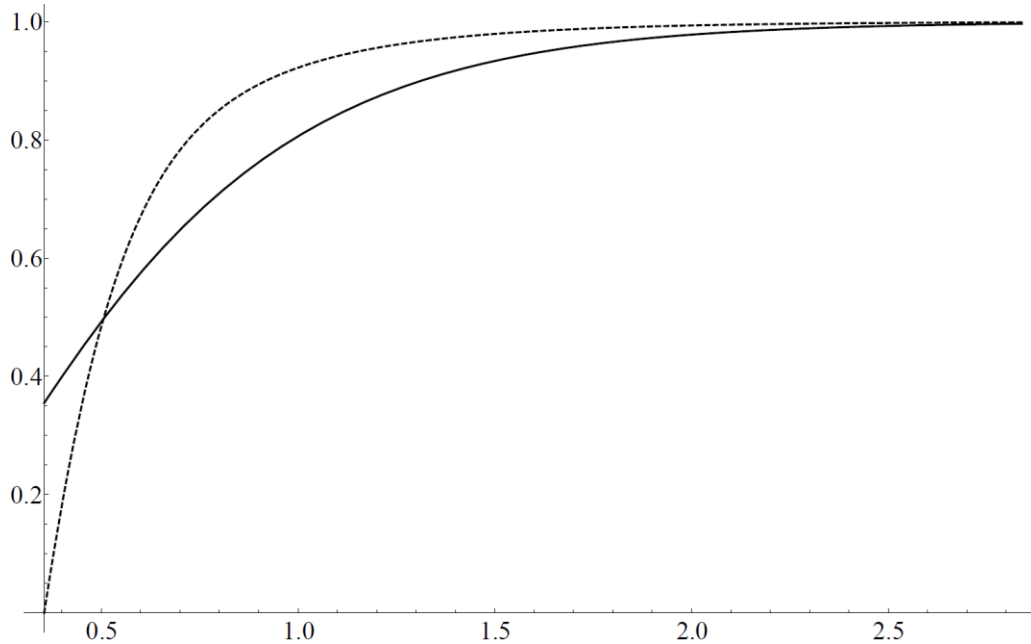
σε αυτήν την περίπτωση

$$S(\tau \geq \tau_0) = h_0(\tau) \frac{a(\tau) \text{EllipticE}(a(\tau)-1) + (a(\tau)-2) \text{EllipticK}(a(\tau)-1)}{3(a(\tau)-1)}. \quad (3.17)$$

Αντίστοιχα ο ρυθμός απορροής μέσω της κλίσης του προφίλ στο κατάντι όριο ($X=1$) υπολογίζεται ίσος με

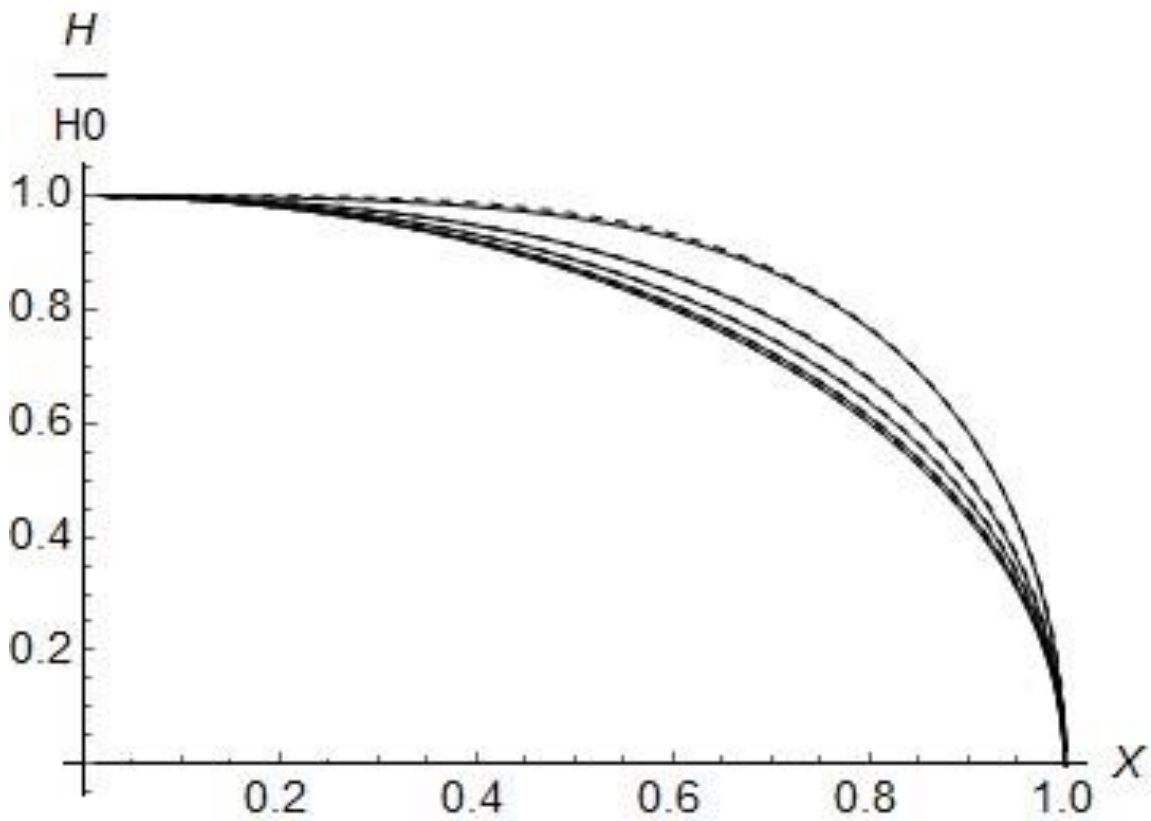
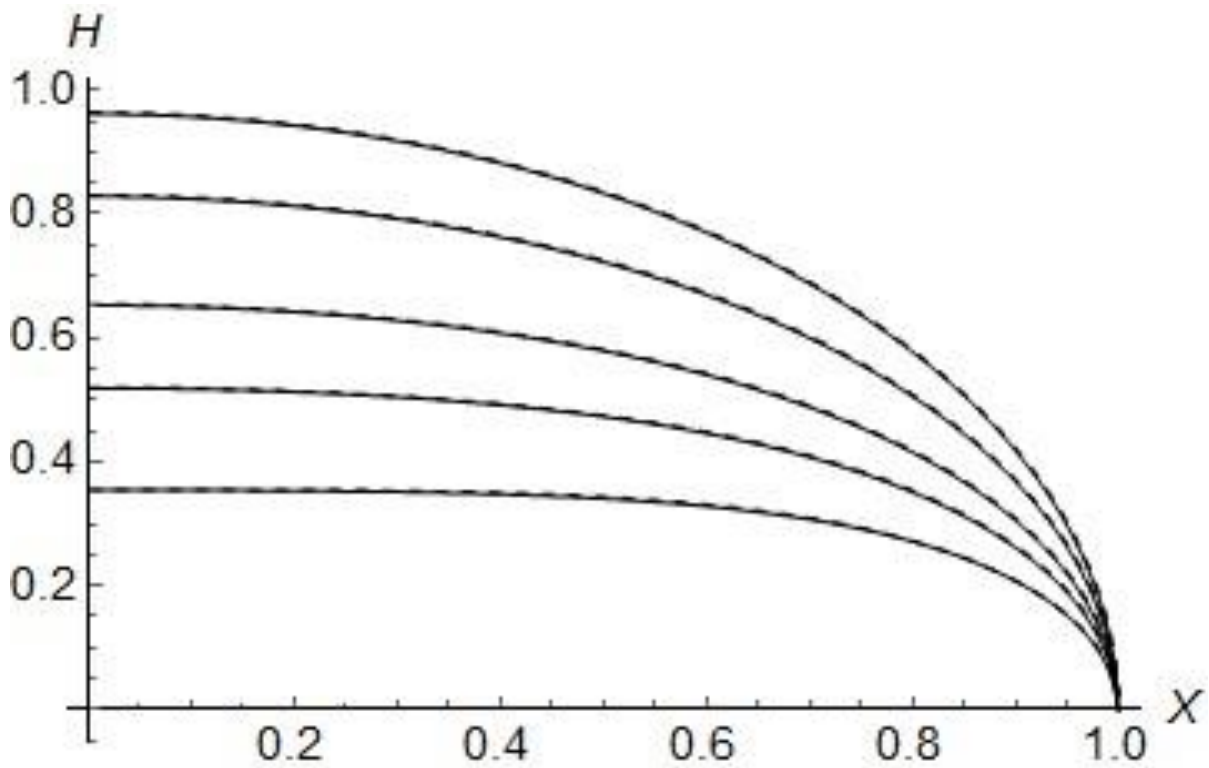
$$Q(X = 1, \tau \geq \tau_0) = H^2(0, \tau)(2 - a(\tau)) = 1 - \dot{S}(\tau) \quad (3.18)$$

Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα εξισώσεων που αποτελείται από την εξίσωση (3.16) και την ισότητα της (3.18) αντικαθιστώντας τον όρο $S(\tau)$ από την 3.17. Το σύστημα αυτό μπορεί να προσεγγιστεί αναλυτικά με εξαιρετική ακρίβεια αλλά αυτό είναι πέρα από τους στόχους αυτής της εργασίας. Η αριθμητική επίλυση του προηγούμενου συστήματος οδηγεί στην εξέλιξη των δύο παραμέτρων που παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα 3.6. Πρακτικά σε χρόνο $10\tau_0$ το σύστημα έχει οδηγηθεί σε μόνιμη κατάσταση, $a(\tau) = H(0, \tau) = 1$.

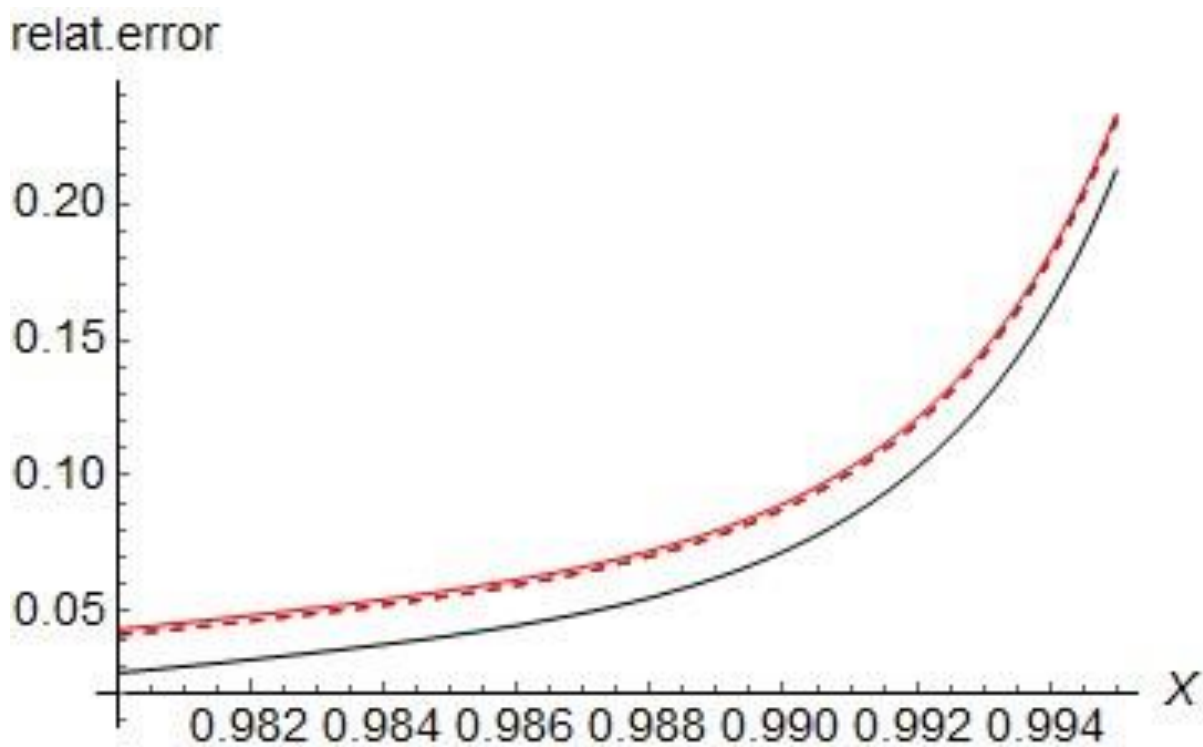
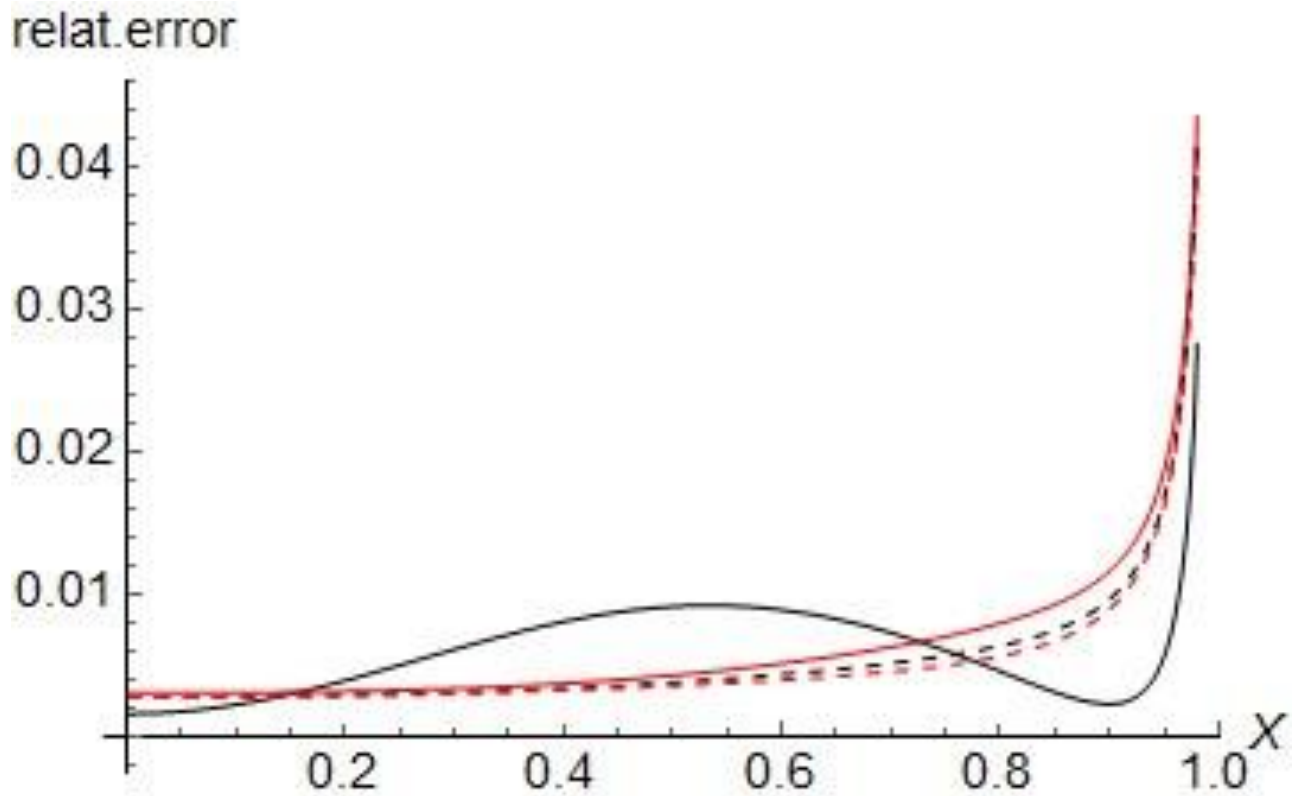


Σχήμα 3.6 Η χρονική εξέλιξη των συναρτήσεων $a(\tau)$ (διακεκομμένη γραμμή) και $H(0, \tau)$, όπως προέκυψε από την αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (7-9) που παρουσιάστηκε.

Στα σχήματα 3.7 και 3.8 που ακολουθούν παρατίθενται συγκρίσεις της προσεγγιστικής λύσεως (3.15) με τις παραμέτρους $a(\tau)$, $H(0, \tau)$ που καθορίστηκαν από την αριθμητική επίλυση (σχήμα 3.6) με την αριθμητική επίλυση της *Boussinesq*, για την εξέλιξη του προφίλ του νερού έως και το χρόνο $5\tau_0$. Η σύγκριση αποδεικνύει πολύ καλή συμφωνία και σε ποιοτικό και σε ποσοτικό επίπεδο (Σχήμα 3.7), με διαφορές που στο κύριο τμήμα του υδροφορέα, $X \leq 0.98$ είναι μικρότερες του 3% αν και στη συνέχεια φτάνουν το 50% προς το όριο $X=1$ (Σχήμα 3.8).

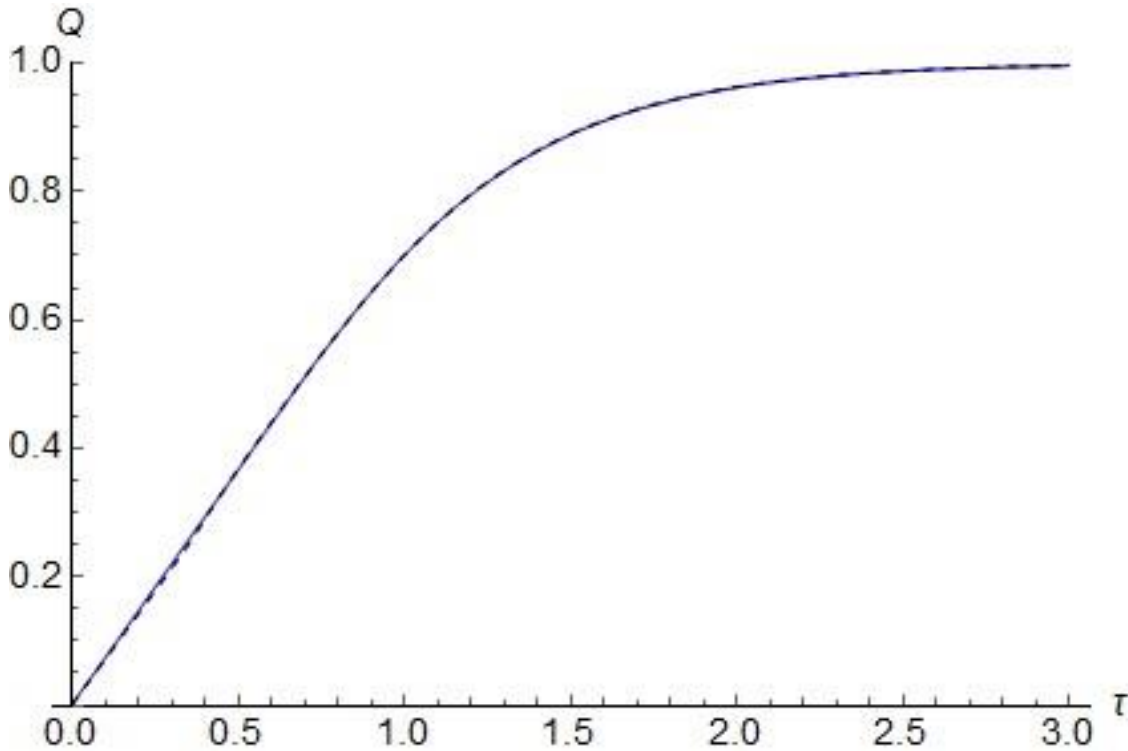


Σχήμα 3.7 Εξέλιξη του προφίλ $H(X,t)$ του νερού (πάνω) και του σχήματος $H(X,t)/H(0,t)$ (κάτω) σε χρόνους τ_0 , $3\tau_0/2$, $2\tau_0$, $3\tau_0$ και $5\tau_0$ σύμφωνα με την αριθμητική λύση της Boussinesq (συνεχείς γραμμές) και την προσέγγιση της από την εξίσωση μας (3.1) (διακεκομμένες γρ



Σχήμα 3.8 Σχετική διαφορά της επίλυσης του προφίλ $H(X, \tau)$ (3.15) από την αριθμητική επίλυση της Boussinesq σε χρόνους $3\tau_0/2$, $2\tau_0$, $3\tau_0$ και $5\tau_0$, (από δεξιά προς τα αριστερά). Στο κάτω σχήμα εστιάζονται τα τελευταία σημεία προς το κατάντη όριο.

Στο σχήμα 3.9 αποδεικνύεται η εξαιρετική σύμπτωση στη χρονική εξέλιξη της απορροής από την προσεγγιστική λύση μας σε σχέση με την αριθμητική λύση της Boussinesq.



Σχήμα 3.9 Η πολύ καλή σύμπτωση της εξέλιξης της απορροής κατά τη διάρκεια της φόρτισης του οριζόντιου υδροφορέα από τη λύση μας (διακεκομμένη) σε σχέση με την αριθμητική λύση της Boussinesq (συνεχής).

Ένα τελευταίο ζήτημα που θα θέλαμε να θίξουμε σχετίζεται με την ομαλότητα στη συνέχεια της απορροής μεταξύ των δύο τμημάτων της λύσης. Για να είναι συνεχής σε πρώτη παράγωγο η εξέλιξη της απορροής μεταξύ των δύο σταδίων εξέλιξης, πρέπει να ταυτίζονται οι χρονικές παράγωγοι του Q από δεξιά και από αριστερά στο $\tau = \tau_0$. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει

$$\dot{Q}(\tau \rightarrow \tau_0^-) = \frac{2}{w} = \dot{Q}(\tau \rightarrow \tau_0^+) = \frac{1}{w} \left(4\dot{H}_0 - \frac{\dot{a}}{w} \right) \Rightarrow 4\dot{H}_0 - \frac{\dot{a}}{w} = 2 \Rightarrow \dot{a} = 2w \approx 5.63 \dots (3.19)$$

Εντούτοις, παίρνοντας το όριο της (3.16) στο $\tau = \tau_0$ προκύπτει ότι $\alpha' = \frac{4w^2 \text{EllipticK}[-1] - 6(-2+w^2)}{w(3 \text{EllipticE}[-1] - 4 \text{EllipticK}[-1])}$, που είναι περίπου 4.38... Επομένως αν και στο χρόνο της εναλλαγής της λύσης το Q ταυτίζεται, εντούτοις υπάρχει μία μικρή ασυνέχεια στην πρώτη παράγωγο του. Πρακτικά το Q' αυξάνεται απότομα από το περίπου 0.71 στο 0.87 στο σημείο

της εναλλαγής των λύσεων. Αυτό το γεγονός οφείλεται στην τελείως διαφορετική μαθηματική φύση των δύο κλάδων και μπορεί να αμβλυνθεί με τη προσθήκη όρων στη δυναμο-σειρά περιπλέκοντας όμως ιδιαίτερα τη θαυμάσια αυτή προσέγγιση.

4. Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή επικεντρωθήκαμε στη μελέτη και κατασκευή μιας νέας προσεγγιστικής λύσης της εξίσωσης του *Boussinesq* για την περίπτωση του περιορισμένου οριζόντιου υδροφόρου ορίζοντα υπό συνθήκες ομοιόμορφης φόρτισης. Από την αριθμητική επίλυση της *Boussinesq* (3.5) γίνεται ότι σε μικρούς χρόνους ($\tau < 0.4$) επικρατεί μία τάση γρήγορης αλλαγής του προφίλ, το οποίο εξελίσσεται με μορφή κατά προσέγγιση μεταβλητού τραπεζίου του οποίου το ύψος αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Σε μεταγενέστερους χρόνους ($\tau > 0.4$), το προφίλ του νερού στον οριζόντιο υδροφορέα παίρνει ένα σχετικά σταθερό παραβολικό σχήμα (πλησιάζει σε *steady-state*). Σε αυτό το στάδιο οποιαδήποτε έννοια γραμμικότητας στην εξέλιξη με το χρόνο έχει χαθεί. Σε κάθε περίπτωση όμως διαφαίνεται ένας σαφής διαχωρισμός της εξέλιξης του προφίλ σε μικρούς χρόνους, μικρότερους του 0.4, και μεγαλύτερους από το 0.4 χρόνους, συμπέρασμα το οποίο αποτελεί και την κεντρική ιδέα και έμπνευση για μία πιο αποτελεσματική και περιγραφική πρωτότυπη προσέγγιση του προβλήματος με μία νέα πρωτότυπη μέθοδο. Η νέα μέθοδος βασίζεται σε μια εξειδικευμένη εικασία «ansatz» του προφίλ του νερού στον υδροφορέα για κάθε φάση του, που αφήνει ορισμένες λειτουργίες του χρόνου ως βαθμούς ελευθερίας για να καθοριστεί έτσι δυναμικά μέσα από τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση η εξέλιξη τους. Οι προκύπτουσες συνθήκες μπορούν να λυθούν με ακρίβεια έτσι που να οδηγούν σε προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες είναι σαφείς και απλές. Οι λύσεις των δύο φάσεων σε σύγκριση με τις αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* δείχνουν μάλλον πως συμφωνούν εντυπωσιακά αποδίδοντας ποιοτικά και ποσοτικά τα χαρακτηριστικά της πλήρους εξίσωσης. Η σύγκριση αποδεικνύει πολύ καλή συμφωνία και σε ποιοτικό και σε ποσοτικό επίπεδο (Σχήμα 3.7), με διαφορές που στο κύριο τμήμα του υδροφορέα, $X \leq 0.98$ είναι μικρότερες του 3% αν και στη συνέχεια σε ένα πολύ μικρό τμήμα (με πολύ μικρά βάθη νερού πάντως) φτάνουν το 50% προς το όριο $X=1$ (Σχήμα 3.8). Η μη γραμμικότητα στην εξέλιξη του προβλήματος έχει και σε χρονικούς και σε χωρικούς όρους και σε κάθε στιγμιότυπο είναι πολύ ακριβέστερη από παλαιότερες προσεγγιστικές γραμμικές λύσεις. Σε κάθε περίπτωση η ξεκάθαρη αναλυτική περιγραφή και η ακρίβεια της προσέγγισης θεωρούμε ότι αποδίδει ευκρινώς τη φυσική της εξέλιξης και αποτελεί ένα μικρό βήμα στην κατανόηση του φαινομένου.

Βιβλιογραφία

- Λατινόπουλος, Π. (2007). «Εκμετάλλευση και προστασία των υπόγειων υδατικών πόρων»
- Μαμάσης, Ν. (2011). «Διαχείριση υδατικών πόρων»
- Δρ. Φράγκου, Μ-Χ, Δρ. Καλλής, Γ. (2010). «Προβλήματα και λύσεις για την ολοκληρωμένη διαχείριση του νερού»
- Bear, J. (1979). “Hydraulics of Groundwater”, McGraw – Hill Series, Water Res. and Environmental Engineering, Νέα Υόρκη.
- Beven, K. (1981). “Kinematic subsurface stormflow”, Water Resour., 17(5), 1419-1424.
- Boussinesq J. (1877). “Essai sur la theorie des eaux courantes du mouvement nonpermanent des eaux souterraines” Acad. Sci. Inst. Fr. 23, 252–260.
- Boussinesq, J. (1904). “Recherches Theoriques sur l’ ecoulement des nappes d’ eau infiltrées dans le sol et sur le debit des sources”, Journal of Applied Mathematics, Έκδοση 10, 5-58.
- Chapman, T. (1995). Σχόλιο στο “The unit response of groundwater out-flow form a hillslope” από Wilfried Brutsaert, Water Resources, 31(9), 2377-2378
- Darcy, H. (1856). “Les fontaines publiques de la ville de Dijon”, Dunod Publications, Paris.
- Dingman, S. (1994). “Physical Hydrology”, Macmillan Publishing Company, New York.
- Dupuit, J. (1863). “Etudes Theoriques et Pratiques sur le Mouvement de Eaux”, Έκδοση 2, Dunod Publications, Paris.
- Forchheimer, P. (1886). “Über die Ergiebigkeit von Brunnenanlagen und Sickerschlitzten”, Journal Architects and Engineers, Έκδοση 2, 7, 539-564.
- Henderson FM., Wooding RA. (1964). “Overland flow and groundwater flow from a steady rainfall of finite duration”, Journal Geophysics Res., 69(8), 1531-1540.
- Koutsogiannis, D., Xanthopoulos, T. (1999). “Τεχνική Υδρολογία”, Έκδοση 3η, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 353-355
- Nanou-Giannarou, A. (2006) “Εισαγωγή στα Υπόγεια Νερά”, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
- Soulios, G., (1996). “Γενική Υδρογεωλογία Α΄ Τόμος”, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 5-98.
- Vasilakopoulos, G. (2010). “Μαθηματική προσομοίωση και αριθμητική επίλυση της ροής του υπόγειου νερού σε ελεύθερο υδροφορέα που υπόκειται σε σύγχρονη επίδραση αντλήσεων και

επαναφόρτισης”, MSc Thesis, Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Αξιοποίησης Φυσικών Πόρων και Γεωργικής Μηχανικής, 19-20

Wiener, A. (1972). “The role of water in development”, Mc Graw – Hill, Νέα Υόρκη.