

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΩΛΟΓΙΑΣ



Πτυχιακή εργασία

ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΙΑΣ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Χριστόδουλος Γεωργίου

Λεμεσός 2013

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Πτυχιακή εργασία

ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΙΑΣ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Χριστόδουλος Γεωργίου

Σύμβουλος καθηγητής
Δρ. Στέλιος Γιατρός

Λεμεσός 2013

Πνευματικά δικαιώματα

Copyright © Χριστόδουλος Γεωργίου, 2013

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Η έγκριση της πτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Γεωπληροφορικής του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου Κύπρου δεν υποδηλώνει απαραίτητως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος.

Θα ήθελα να εκφράσω ιδιαίτερα τις ευχαριστίες μου στον κ. Στέλιο Γιατρό για την καθοδήγηση του μέσω υποδείξεων και παρατηρήσεων κατά τις εκτενείς συζητήσεις μας σε όλο το διάστημα εκπόνησης της Διπλωματικής μου Εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη παρούσα διπλωματική εργασία, μελετάται η ευστάθεια δομικών στοιχείων με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Ένα δομικό στοιχείο που χρήζει έντονο ενδιαφέρον και που χρησιμοποιήθηκε, είναι οι δομές σάντουιτς (Sandwich structures). Συγκεκριμένα έγινε προσπάθεια να παρουσιασθούν οι μορφές αστάθειας (λυγισμού) των δομών σάντουιτς καθώς και να ερευνηθούν οι περιπτώσεις αλληλεπίδρασης αυτών των μορφών. Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο ANSYS, εφαρμόζοντας ανάλυση ιδιοτιμών για την εκτίμηση των κρίσιμων φορτίων και στη συνέχεια εφαρμόστηκε η μη-γραμμική ανάλυση για την μετά-λυγισμική συμπεριφορά των δομών για τον εντοπισμό φαινομένων αλληλεπίδρασης μορφών λυγισμού (interaction buckling mode) καθώς και της ευστάθειας τους.

Μελετήθηκαν διάφορες δομές σάντουιτς με διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά και υλικά. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση με πεπερασμένα βρέθηκαν να συμφωνούν σύμφωνα με διαθέσιμες μελέτες από τη βιβλιογραφία στο φαινόμενο αλληλεπίδρασης (Léotoing, L., et al. 2002; Yiatros, S., et al. 2010). Ωστόσο, κάποιες διαφορές που υπήρχαν μεταξύ των αποτελεσμάτων της βιβλιογραφίας οφείλονταν κατά κύριο λόγο από της παραδοχές που έγιναν καθώς και τον τρόπο επίλυσης τους.

ABSTRACT

In this thesis, we investigated the stability of structural elements with finite element methods. One structural element that requires intense interest is the sandwich structures. Specifically, we present the different buckling modes of sandwich structural and the interaction of them in the post-buckling range. We employed the general finite element method software ANSYS to analyze the buckling and post-buckling behavior in the sandwich structures. Initially, we used the eigenvalue buckling analysis to estimate the critical load, and after we performed the nonlinear analysis to get correct and more realistic information of post-buckling response.

We studied various sandwich structures with different geometrical characteristics and materials properties. Additionally, we compared the results obtained with the literature (Léotoing, L., et al. 2002; Yiatros, S., et al. 2010) and we have seen that the phenomenon of interactive buckling mode are similar.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	iv
ABSTRACT.....	v
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	viii
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ	ix
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
E.1 Θεωρία δομών Σάντουιτς	2
E.2 Διάρθρωση Πτυχιακής	4
1 ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	6
1.1 Τάσεις.....	6
1.2 Μετατοπίσεις και Παραμορφώσεις	8
1.3 Εξισώσεις Ισορροπίας	12
1.4 Συνθήκες Συμβιβαστού Παραμόρφωσης	13
1.5 Καταστατικές Εξισώσεις Ελαστικών Υλικών	14
2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	18
2.1 Σύντομη Ιστορική Αναφορά.....	18
2.2 Διαφορές Αναλυτικής Μεθόδου και Πεπερασμένων Στοιχείων	19
2.3 Βασικά Στάδια της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων	20
2.4 Σφάλματα.....	22
2.5 Παρεμβολή και Συνάρτηση Σχήματος	23
2.6 Αρχή των Δυνατών Έργων.....	26
3 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ	30
3.1 Μορφές ισορροπίας.....	30
3.2 Φαινόμενο του λυγισμού.....	32

3.3 Δρόμοι ισορροπίας (Equilibrium paths).....	33
3.4 Μέθοδοι μελέτης ελαστικής ευστάθειας	37
3.5 Παραδοχές ελαστικής ευστάθειας	41
4 ΛΥΓΙΣΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΔΟΜΩΝ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	43
4.1 Μεθοδολογία	45
4.2 Μοντέλο Wade, et al. (2010).....	49
4.3 Διαβαθμισμένης δομής υλικό (Functionally graded material)	53
4.4 Μοντέλο Léotoing et al. (2002).....	57
5 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ.....	60
5.1 Γενικά συμπεράσματα	60
5.2 Μελλοντικές μελέτες	61
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	62
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α (Στοιχεία)	65
A.1 Ραβδωτό Στοιχείο (Bar element)	65
A.2 Στοιχείο Δοκού (Beam element)	67
A.3 Τριγωνικό Στοιχείο Σταθερών Παραμορφώσεων	69
A.4 Ορθογωνικό στοιχείο.....	73
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β (Πολύωνυμα Παρεμβολής με τη Βοήθεια του Τριγώνου του Pascal) ...	77
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ (Μέθοδος Arc-Length)	78
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ (Κώδικας ANSYS)	83

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 4-1 Διαστάσεις και μηχανικές ιδιότητες για δύο δοκίμια	45
Πίνακα ΠΒ 1 Πολύωνυμα Παρεμβολής	77

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Σχήμα E1 Τυπική γεωμετρία δομής σάντουιτς.....	2
Σχήμα E2 Λυγισμός του σάντουιτς: (α) Λυγισμός Euler's, (b) Συμμετρικό τσαλάκωσα (wrinkling) της επιφάνειας, (c) Αντί-συμμετρικό τσαλάκωμα (wrinkling) της επιφάνειας (Léotoing, L., et al. 2002)	4
Σχήμα 1-1 Ελαστικό σώμα υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων (Sadd 2005).....	6
Σχήμα 1-2 Στοιχειώδης κύβος και σήμανση συνιστωσών τάσεων (Sadd 2005)	7
Σχήμα 1-3 Παραμόρφωση Τρισδιάστατου Ελαστικού σώματος.....	8
Σχήμα 1-4 Ισορροπία στοιχειώδους κύβου.....	13
Σχήμα 2-1 Τυπικές γεωμετρίες Πεπερασμένων Στοιχείων (Longan 2007)	21
Σχήμα 3-1 Μορφές ισορροπίας: α) Ευσταθής ισορροπία, β) Ασταθής ισορροπία και γ) Ουδέτερη ισορροπία	30
Σχήμα 3-2 Αστάθεια και ευστάθεια για μικρές και μεγάλες διαταραχές.....	31
Σχήμα 3-3 Θλιβόμενο υποστύλωμα.....	32
Σχήμα 3-4 Διάγραμμα αξονικού θλιπτικού φορτίου - μετατόπισης	33
Σχήμα 3-5 Δρόμος ισορροπίας χαμηλού τόξου	34
Σχήμα 3-6 Δρόμος ισορροπίας σφαιρικού κελύφους.....	35
Σχήμα 3-7 Μεταβολή της ενέργειας σε κάθε σημείο του δρόμου ισορροπίας (Bazant, Z. P. and Luigi 2010).....	36
Σχήμα 3-8 Παραδοχές κάμψης της δοκού (Yiatros, S., et al. 2010)	42
Σχήμα 4-1 Πάνω: η απόκριση ενός σάντουιτς όταν οι δυο κύριες μορφές λυγισμού αντιμετωπίζονται ξεχωριστά, Κάτω: ο συνδυασμός των δυο μορφών λυγισμού οδηγεί στη δεύτερη διακλάδωση και στην ασταθή κατάσταση. (a) προ-λυγισμικός δρόμος που συνοδεύεται με συμπίεση (squashing), (b) ολικός (overall) λυγισμός που δημιουργείται που αρχίζει από το κρίσιμο σημείο C, (c) τοπική μετά-λυγισμική απόκριση των εξωτερικών φύλλων που παραμένει ανενεργή και (d) αλληλεπίδραση λυγισμού και ενεργοποίηση μιας δεύτερης διακλάδωσης S. Ο δρόμος (e) αντιπροσωπεύει στο διάγραμμα ισορροπίας μετά από εισαγωγή αρχικής ατέλειας ε_0 . (Yiatros 2010)	44
Σχήμα 4-2 Τυπική γεωμετρία σάντουιτς πάνελ	45
Σχήμα 4-3 Συνοριακές συνθήκες του σάντουιτς πάνελ (Yiatros, S., Wadee, M. A. and Theofanous 2010)	46

Σχήμα 4-4 Παραμορφωμένη επιφάνεια λόγω επιβολής της δύναμης.....	46
Σχήμα 4-5 Δεσμευμένοι κόμβοι (Erdogan, M. and Ibrahim 2006).....	47
Σχήμα 4-6 Ο δρόμος ισορροπίας για τη δομή 1: (a) Διάγραμμα φορτίου με πλευρική μετατόπιση (b) Διάγραμμα φορτίου – αξονικής μετατόπισης.....	50
Σχήμα 4-7 Ο δρόμος ισορροπίας για τη δομή 2: (a) Διάγραμμα φορτίου - πλευρική μετατόπιση (b) Διάγραμμα φορτίου – αξονικής μετατόπισης	51
Σχήμα 4-8 Στιγμιότυπο τοπικού λυγισμού της δομής 1 κατά το στάδιο της αποφόρτισης.....	52
Σχήμα 4-9 Διάγραμμα Θλίψης - παραμόρφωσης μεταλλικού αφρού (Beals, J. T. and Thompson 1997)	54
Σχήμα 4-10 Διάγραμμα μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας στο πυρήνα που εξαρτάται από το βάθος Z	55
Σχήμα 4-11 Ο δρόμος ισορροπίας για σάντουιτς με διαβαθμισμένης δομής πυρήνα και της Δομής 1: (a) Διάγραμμα φορτίου – πλευρικής μετατόπισης (b) Διάγραμμα φορτίου – αξονικής μετατόπισης.....	56
Σχήμα 4-12 Στιγμιότυπο Δομής 3 κατά το στάδιο αποφόρτισης	57
Σχήμα 4-13 Αποτελέσματα Léotoing et al (2002)	58
Σχήμα 4-14 Δρόμος ισορροπίας Δομής 3: Διάγραμμα φορτίου – πλευρικής μετατόπισης	58
Σχήμα ΠΑ 1 Ράβδος υπό την επίδραση αξονικού φορτίου	65
Σχήμα ΠΑ 2 Τυπική δοκός	67
Σχήμα ΠΑ 3 Τριγωνικό στοιχείο σταθερών παραμορφώσεων.....	69
Σχήμα ΠΑ 4 Ορθωγονικό στοιχείο επίπεδης έντασης και παραμόρφωση τεσσάρων κόμβων	73
Σχήμα ΠΓ1 Σχηματική Παράσταση της μεθόδου Arc-Length (Memon, B. and Su 2003)	81

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αστοχίες των κατασκευών εμπίπτουν σε μια από τις δυο κατηγορίες, την αστοχία λόγω των υλικών και την αστοχία λόγω έλλειψης ευστάθειας. Ο πρώτος τύπος αστοχίας, μπορεί να προβλεφθεί μέχρι ενός βαθμού μέσω της ανάλυσης των εξισώσεων ισορροπίας της κατασκευής για την αρχική μη παραμορφωμένη κατάσταση.

Από την άλλη, η πρόβλεψη της αστοχίας λόγω αστάθειας είναι πιο πολύπλοκη απαιτεί τη διαμόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας στη παραμορφωμένη κατάσταση της κατασκευής. Επομένως, το πρόβλημα που προκύπτει είναι μη γραμμικό, για το λόγο ότι η παραμορφωμένη κατάσταση δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή για μια κατασκευή.

Ωστόσο, η ραγδαία εξέλιξη των υπολογιστών τα τελευταία χρόνια έχει μειώσει αισθητά τον υπολογιστικό χρόνο. Με αυτό το πλεονέκτημα καθίσταται ευκολότερη η ανάλυση μιας κατασκευής με τη γραμμική όσο και τη μη γραμμική θεωρία. Η πρώτη θεωρία αντιπροσωπεύει την απλούστερη δυνατή συμπεριφορά μιας κατασκευής, αντίθετα με τη δεύτερη θεωρία εισάγονται οι γεωμετρικές ή μη γραμμικοί νόμοι των υλικών ώστε να επιτευχθεί πλησιέστερη στο ακριβές αποτέλεσμα επίλυση.

Συγκεκριμένα, όταν οι παραμορφώσεις της υπό μελέτης κατασκευής ή δομικού στοιχείου αυξηθούν αρκετά, τότε η γραμμική θεωρία απέχει από την πραγματική συμπεριφορά και η σχέση που συνδέει τα εξωτερικά φορτία με τις αναπτυσσόμενες μετατοπίσεις γίνονται μη γραμμικές (μη γραμμική θεωρία λόγω γεωμετρίας). Επιπλέον, από ένα επίπεδο τάσης και πάνω η συμπεριφορά του υλικού περιγράφεται από μια μη γραμμική σχέση που οφείλεται στη μη γραμμικότητα του υλικού.

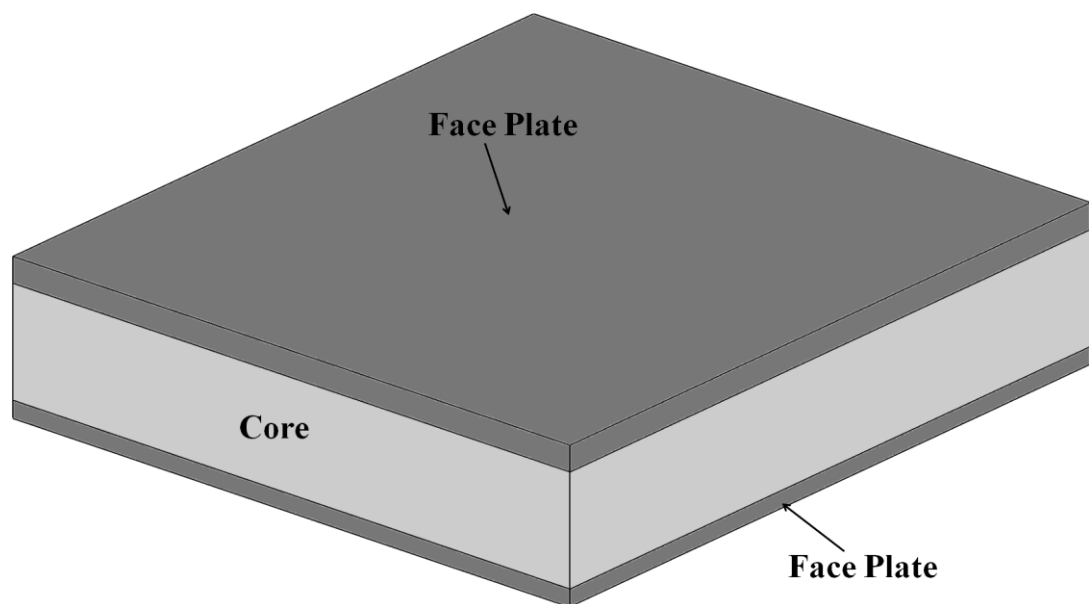
Σε αρκετές, περιπτώσεις απλών προβλημάτων η γραμμική ανάλυση πλησιάζει ικανοποιητικά την πραγματική κατάσταση. Αντίθετα, η εφαρμογή της μη γραμμικής ανάλυσης έχει ως πλεονέκτημα την κατανόηση της πραγματικής συμπεριφοράς της κατασκευής.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας έγινε ενασχόληση με τη διερεύνηση της λυγισμικής συμπεριφοράς δομών σάντουιτς (sandwich structures). Οι μέθοδοι ανάλυσης που χρησιμοποιήθηκαν αφορούσαν την ελαστική συμπεριφορά του υλικού (γραμμική

σχέση τάσης - παραμόρφωσης), ενώ οι φυσικές συνθήκες διατυπώνονταν στη μη γραμμική γεωμετρία.

E.1 Θεωρία δομών Σάντουιτς

Οι δομές σάντουιτς (Σχήμα E1), κατατάσσονται στην κατηγορία σύνθετων υλικών (composite material), αποτελούνται από δύο ανθεκτικά δύσκαμπτα εξωτερικά φύλλα (face plate), τα οποία διαχωρίζονται από μια στρώση ενός λιγότερου πυκνού υλικού τον πυρήνα (core), ο οποίος έχει μικρότερη δυσκαμψία και χαμηλότερη αντοχή. Τα εξωτερικά φύλλα φέρουν το μεγαλύτερο μέρος φόρτισης στο επίπεδο και επίσης των οποιοδήποτε εγκάρσιων καμπτικών τάσεων. Δομικά ο πυρήνας εξυπηρετεί δυο σκοπούς. Πρώτα διαχωρίζει τα εξωτερικά φύλλα και παρέχει αντίσταση στις παραμορφώσεις κάθετες στο επίπεδο του εξωτερικού φύλλου. Και κατά δεύτερο λόγο παρέχει κάποιο βαθμό δυσκαμψίας σε διάτμηση κατά μήκος των επιπέδων τα οποία είναι κάθετα στα εξωτερικά φύλλα (Zenkert 1995).



Σχήμα E1 Τυπική γεωμετρία δομής σάντουιτς

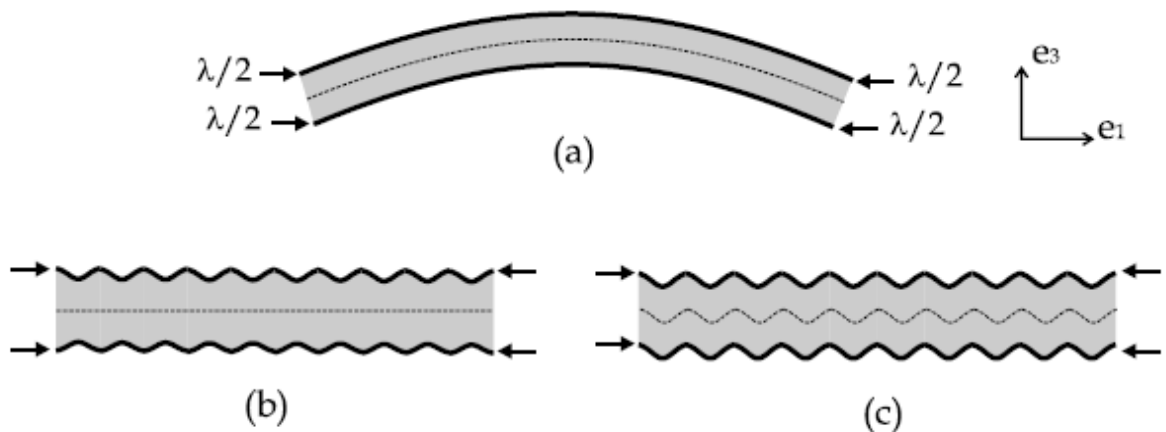
Τα υλικά για τη σύνθεση των δομών σάντουιτς ποικίλουν. Η επιλογή των υλικών κατά κύριο λόγο εξαρτάται από τη χρήση που θα έχουν, τις μηχανικές τους ιδιότητες το κόστος, τη φθορά κ.τ.λ. Τα πιο συνήθη υλικά που χρησιμοποιούνται για τα εξωτερικά φύλλα είναι τα κράματα αλουμινίου, πολυμερή ενισχυμένα με ίνες, το ατσάλι κ.α. Από την άλλη τα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν για τον πυρήνα, πρέπει να παρέχουν

συνεκτικότητα έτσι ώστε να μπορούν να λειτουργούν μαζί με τα εξωτερικά φύλλα σαν ένα ενιαίο σώμα. Τέτοια υλικά μπορεί να είναι πολυμερικοί αφροί, εξηλασμένη πολυστερίνη, συνθετικά ελαστικών κ.α. Επίσης, ένας άλλος τύπος πυρήνα αποτελείται από μία κυψελοειδής δομή. Το υλικό που κατασκευάζεται ο κυψελοειδής πυρήνας μπορεί να είναι παρόμοιο με εκείνο του υλικού των εξωτερικών φύλλων.

Οι δομές σάντουιτς βρίσκουν εφαρμογή από της αρχές του 1940 σε ένα μεγάλο εύρος έργων, όπως στην αεροναυπηγική και αστροναυτική. Η πρώτη θεωρητική εργασία που περιγράφει τις μηχανικές ιδιότητες και τις εφαρμογές τέτοιων υλικών έγινε από τους Williams, D., et al. 1941. Τη δεκαετία του 1960, η συμπεριφορά των δομών σάντουιτς άρχισε να μελετάται με περισσότερη λεπτομέρεια, όπως περιγράφεται στο βιβλίο του Allen (1969), που θέτει τις βάσεις των μηχανικών ιδιοτήτων των δομών τύπου σάντουιτς. Από τα μέσα της δεκαετίας του 1980 οι εφαρμογές των δομών σάντουιτς άρχισαν να εφαρμόζονται και σε άλλους κλάδους της μηχανικής (πολιτικής μηχανικής κ.α.). Το βασικό στοιχείο, για την εφαρμογή τέτοιων δομών είναι η δυνατότητα μεγάλης μείωσης του βάρους τους διατηρώντας την ίδια ισοδύναμη δυσκαμψία αντίστοιχων μονολιθικών δομικών στοιχείων (Léotoing, L., et al. 2002).

Δυστυχώς, λόγω της βελτιστοποιημένης μορφολογίας τους είναι επιρρεπείς σε διάφορες μορφές αστάθειας, συγκεκριμένα στις περιπτώσεις πολυαξονικών φορτίσεων, κάτι που θα πρέπει να εξετάζονται κατά τον σχεδιασμό. Σε μια δομή σάντουιτς μπορεί να παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές λυγισμικές μορφές αστάθειας, ο ολικός ή γενικός λυγισμός (Overall buckling – Euler Type, Σχήμα E2a), συμμετρικό συρρίκνωμα των εξωτερικών φύλλων (symmetrical wrinkling of the skins – Σχήμα E2b) και αντισυμμετρικό συρρίκνωμα των εξωτερικών φύλλων (antisymmetrical wrinkling of the skins – Σχήμα E2c) (Léotoing, L., et al. 2002).

Από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα, πολλές θεωρητικές εργασίες έχουν γίνει μελετώντας τη λυγισμική συμπεριφορά των δομών σάντουιτς (Allen 1969; Williams, D., et al. 1941). Μια εναλλακτική μέθοδος για τη μελέτη των λυγισμικών μορφών αστάθειας είναι μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων που εφαρμόζεται στην παρούσα εργασία. Όπου, χρησιμοποιώντας μη-γραμμική ανάλυση μελετάται η μετά-λυγισμική συμπεριφορά των δομών σάντουιτς.



Σχήμα E2 Λυγισμός του σάντουιτς: (α) Λυγισμός Euler's, (β) Συμμετρικό τσαλάκωμα (wrinkling) της επιφάνειας, (γ) Αντί-συμμετρικό τσαλάκωμα (wrinkling) της επιφάνειας (Léotoing, L., et al. 2002)

E.2 Διάρθρωση Πτυχιακής

Η παρούσα εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια περιγραφή της θεωρίας της ελαστικότητας. Ειδικότερα, παρουσιάζεται ο ορισμός των τάσεων και των μετατοπίσεων και παραμορφώσεων. Στη συνέχεια περιγράφονται οι εξισώσεις ισορροπίας, οι συνθήκες συμβιβαστού παραμόρφωσης και τέλος οι καταστατικές εξισώσεις.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Αρχικά, γίνεται ένας σύντομος ορισμός της μεθόδου αυτής και μια σύντομη ιστορική αναφορά. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι διαφορές που υπάρχουν μεταξύ της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και των αναλυτικών μεθόδων. Ακολούθως, περιγράφονται τα βασικά στάδια που ακολουθεί η μέθοδος και τέλος περιγράφεται το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη μέθοδο.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στα βασικά σημεία της θεωρίας της ελαστικής ευστάθειας ενώ γίνεται αναφορά στις μορφές ισορροπίας που υπάρχουν, ορίζεται το σημείο διακλάδωσης (bifurcation point) και τέλος γίνεται η επεξήγηση κάποιων βασικών εννοιών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία για τη μελέτη της λυγισμικής συμπεριφοράς δομών σάντουιτς. Αρχικά περιγράφεται η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση,

στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία και γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων από αποτελέσματα που προέκυψαν από αναλυτικά μοντέλα (Yiatros, S., Wade, M. A. and Theofanous 2010).

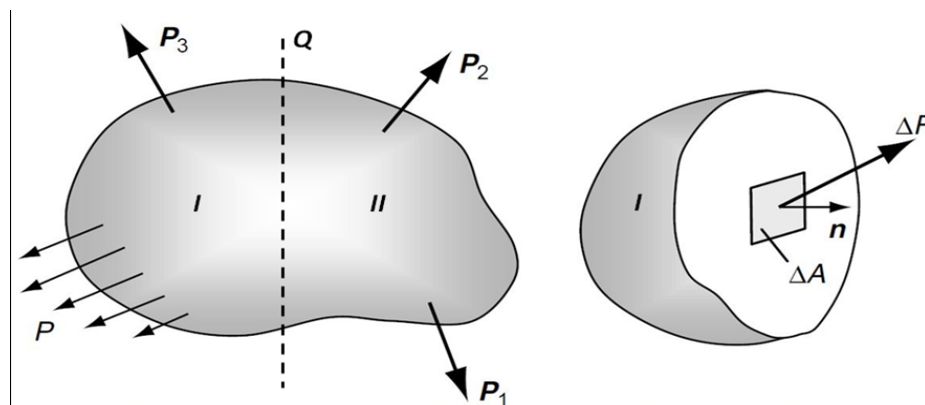
Στο πέμπτο κεφάλαιο που είναι και το τελευταίο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα καθώς επίσης γίνεται μια σύντομη αναφορά για τις μελλοντικές επεκτάσεις. Συγκεκριμένα γίνεται αναφορά στις επιπλέον μελέτες που πρέπει να γίνεται έτσι ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα τη συμπεριφορά των δομών σάντουιτς για το σχεδιασμό.

1 ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η θεωρία της ελαστικότητας μελετά την ελαστική συμπεριφορά ενός στερεού σώματος. Υποθέτει ότι το σώμα είναι ομογενές και ισότροπο, δηλαδή, οι μηχανικές ιδιότητες του παραμένουν ίδιες προς όλα τα σημεία της μάζας και προς όλες τις διευθύνσεις, αντίστοιχα. Στη θεωρία αυτή, ένα σώμα καλείται ελαστικό όταν με την εφαρμογή των εξωτερικών δυνάμεων, μεταβάλλονται το σχήμα και οι διαστάσεις του κατά τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε όταν οι εξωτερικές δυνάμεις παύσουν να επιδρούν, το σώμα να ανακάττει το αρχικό του σχήμα και διαστάσεις. Ειδικότερα, όταν στο σώμα υφίσταται μια γραμμική σχέση μεταξύ του εξωτερικά επιβαλλόμενου φορτίου και της παραμόρφωσης του σώματος, τότε το σώμα ορίζεται ως γραμμικά ελαστικό (Timoshenko and S. and Goordier 1951).

1.1 Τάσεις

Υποθέτουμε ένα ελαστικό σώμα τυχαίας γεωμετρίας (Σχήμα 1-1α) στο οποίο εξασκούνται μια σειρά από εξωτερικές δυνάμεις. Λόγω των εξωτερικών δυνάμεων, στο σώμα αναπτύσσονται εσωτερικές δυνάμεις. Για να μελετήσουμε την εντατική κατάσταση, που προκαλούν αυτές οι δυνάμεις, σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του σώματος θεωρούμε ένα νοητό επίπεδο Q το οποίο διέρχεται της επιφάνειας A και διαιρεί το σώμα σε δυο ξεχωριστά τμήματα. Απομακρύνοντας το τμήμα II, το τμήμα I (Σχήμα 1-1β) πρέπει να ισορροπεί. Για να καταστεί αυτό εφικτό χρειάζεται η παρουσία εσωτερικών δυνάμεων στη θέση της τομής, έτσι ώστε οι εξωτερικές δυνάμεις στη μια πλευρά της τομής να εξισορροπούνται από τις εσωτερικές δυνάμεις στην τομή.



Σχήμα 1-1 Ελαστικό σώμα υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων (Sadd 2005)

Στη συνέχεια θεωρούμε την στοιχειώδη επιφάνεια ΔA της τομής του τμήματος I (Σχήμα 1-1β). Ο προσανατολισμός της επιφάνειας ΔA καθορίζεται από το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{N} . Η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί στη στοιχειώδη επιφάνεια ΔA συμβολίζεται ως $\Delta \mathbf{F}$. Ωστόσο, η τάση ορίζεται ως ο λόγος της δύναμης προς την επιφάνεια

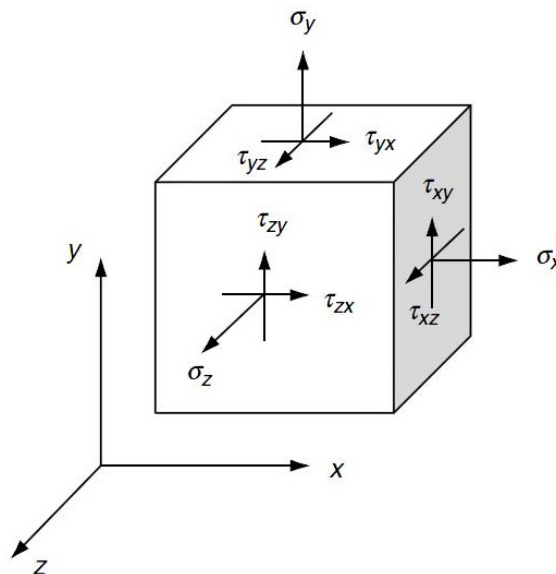
$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.1)$$

Αναλύοντας τη δύναμη $\Delta \mathbf{F}$ στις συνιστώσες $\Delta \mathbf{F}_N$ και $\Delta \mathbf{F}_S$, αντίστοιχα κάθετη και παράλληλη στην επιφάνεια ΔA ορίζουμε:

$$\sigma_N = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A} \quad \sigma_S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_S}{\Delta A} \quad (1.2)$$

όπου σ_N καλείτε ορθή τάση και σ_S καλείτε τέμνουσα τάση.

Μέχρι τώρα δόθηκε ο ορισμός της ορθής και τέμνουσας τάσης, στη γενική όμως περίπτωση είναι δυνατόν ένα σώμα να βρίσκεται κάτω από περισσότερες της μιας ειδών φορτίσεις, ορθές και διατμητικές και σε περισσότερους του ενός άξονες. Ωστόσο, ας θεωρήσουμε ένα στοιχειώδη κύβο όπου σε κάθε πλευρά του ασκείται ένα ζεύγος τάσεων που αποτελείται από μια ορθή και δυο διατμητικές τάσεις (Σχήμα 1-2).



Σχήμα 1-2 Στοιχειώδης κύβος και σήμανση συνιστωσών τάσεων (Sadd 2005)

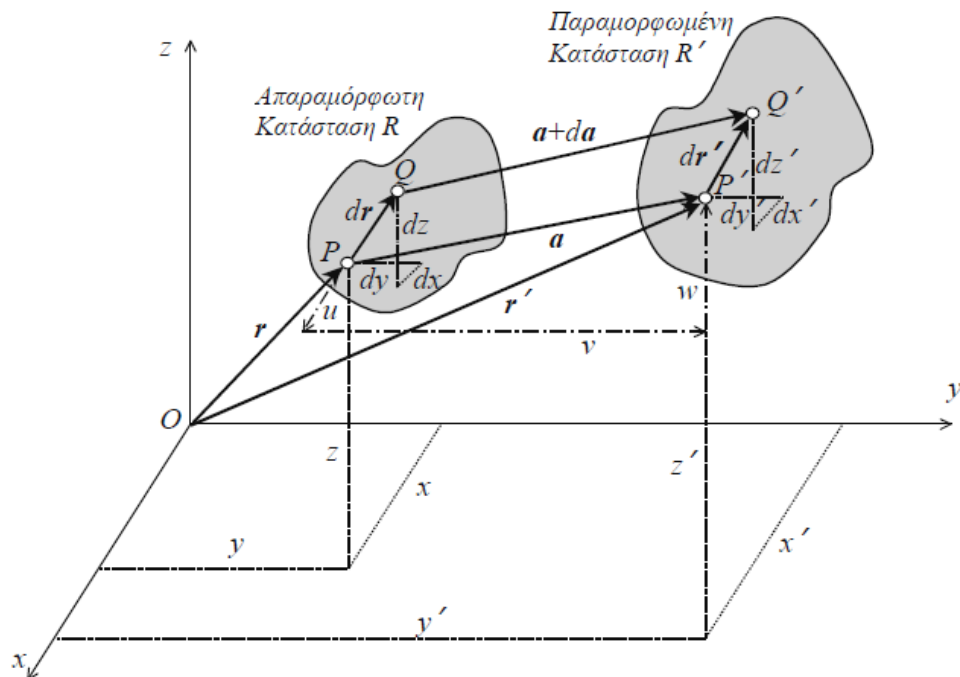
Τόσο οι ορθές όσο και οι διατμητικές τάσεις στη γενικευμένη κατάσταση εντάσεων είναι στοιχεία του γενικευμένου ταυυστή των τάσεων σ_{ij} .

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad i, j = x, y, z \quad (1.3)$$

όπου τα στοιχεία της διαγωνίου του μητρώου αυτού περιγράφουν τις συνιστώσες των ορθών τάσεων κατά τους άξονες x , y και z , αντίστοιχα, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία, που συμβολίζονται ως τ_{ij} , περιγράφουν τις συνιστώσες των διατμητικών τάσεων.

1.2 Μετατοπίσεις και Παραμορφώσεις

Ένα ελαστικό σώμα υποβαλλόμενο από εξωτερικές δυνάμεις υφίσταται μετακίνηση και παραμόρφωση. Όπου, με τον όρο μετακίνηση ορίζεται η μεταφορική μετατόπιση και περιστροφή του σώματος και με τον όρο παραμόρφωση ορίζεται η σχετική μετατόπιση μεταξύ γειτονικών υλικών σημείων του σώματος. Η μετακίνηση στερεού δεν προκαλεί ένταση, αντίθετα η παραμόρφωση είναι αυτή που ευθύνεται για την αναπτυσσόμενη εντατική κατάσταση στο σώμα.



Σχήμα 1-3 Παραμόρφωση Τρισδιάστατου Ελαστικού σώματος

Από το σχήμα 1-3 θεωρούμε ότι το σημείο P του ελαστικού σώματος πριν την παραμόρφωση να καταλαμβάνει κάποια θέση P' μετά την παραμόρφωση. Το σημείο P' στη γενική περίπτωση εξαρτάται από τη θέση του σημείου P με συντεταγμένες

$$x' = x'(x, y, z) \quad (1.4)$$

$$y' = y'(x, y, z) \quad (1.5)$$

$$z' = z'(x, y, z) \quad (1.6)$$

Στη συνέχεια από το σχήμα 1-3 προκύπτει ότι

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a} \quad (1.7)$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u, v, w)$ καθορίζει τη μετατόπιση του σημείου P και καλείται διάνυσμα μετατόπισης. Για κάθε υλικό σημείο του σώματος το διάνυσμα μετατόπισης είναι μοναδικό και μπορεί να αναλυθεί σε τρεις καρτεσιανές συνιστώσες μετατόπισης ως

$$u = u(x, y, z) \quad (1.8)$$

$$v = v(x, y, z) \quad (1.9)$$

$$w = w(x, y, z) \quad (1.10)$$

κατά τους άξονες x , y και z . Για να υπάρχει παραμόρφωση στο σώμα θα πρέπει τα διανύσματα μετατόπισης των διαφόρων σημείων του σώματος να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Άρα, για τις συντεταγμένες (x', y', z') του σημείου P' ισχύει

$$x' = x + u \quad (1.11)$$

$$y' = y + v \quad (1.12)$$

$$z' = z + w \quad (1.13)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η μετατόπιση του σημείου P είναι \mathbf{a} και η μετατόπιση στο σημείο Q που είναι απειροστά κοντά του θα είναι $\mathbf{a} + d\mathbf{a}$, από την σχήμα 1-3 έχουμε

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + d\mathbf{a} \quad (1.14)$$

ή

$$dx' = dx + du \quad (1.15)$$

$$dy' = dy + dv \quad (1.16)$$

$$dz' = dz + dw \quad (1.17)$$

όπου τα διαφορικά (du, dv, dw) έχοντας υπόψη τον ορισμό του ολικού διαφορικού γράφονται ως

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (1.18)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (1.19)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (1.20)$$

Θέτοντας, $ds = |d\mathbf{r}|$ όπου είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων P, Q και $ds' = |d\mathbf{r}'|$ η μεταξύ απόσταση P', Q' , χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.21)$$

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad (1.22)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την εξ.(1.21) και εξ.(1.22) και λαμβάνοντας υπόψη τις εξ.(1.15)-(1.17) προκύπτει

$$ds'^2 - ds^2 = 2(dudx + dvdy + dwdz) + du^2 + dv^2 + dw^2 \quad (1.23)$$

Αν η διαφορά $ds'^2 - ds^2$ ισούται με μηδέν, τότε δεν έχει λάβει χώρα καμία σχετική μετατόπιση μεταξύ των σημείων P, Q καθώς αυτά μετακινούνται στις θέσεις P', Q' . Διαφορετικά, αν η διαφορά $ds'^2 - ds^2$ είναι διαφορετική του μηδενός, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ds έχει υποστεί μεταβολή στο μήκος του και συνεπώς το ελαστικό σώμα έχει παραμορφωθεί.

$$ds'^2 - ds^2 = 2(\varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2) + 2(2\varepsilon_{xy}dxdy + 2\varepsilon_{xz}dxdz + 2\varepsilon_{yz}dydz) \quad (1.24)$$

όπου τέθηκε

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (1.25)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1.26)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.27)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \quad (1.29)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \quad (1.30)$$

Οι πιο πάνω ποσότητες $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$ και $(\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz})$ περιγράφουν τις συνιστώσες των ορθών ανοιγμένων παραμορφώσεων και των διατμητικών ανοιγμένων παραμορφώσεων, αντίστοιχα. Οι εννέα συνιστώσες ε_{ij} ($i, j = x, y, z$) ορίζουν τον τανυστή παραμόρφωσης που περιγράφει την παραμορφωσιακή κατάσταση του σώματος. Ο τανυστής παραμόρφωσης των εξισώσεων (1.25) - (1.30) ονομάζεται και τανυστής παραμόρφωσης Langrage – Green λόγω του ότι για τη διατύπωση του χρησιμοποιήθηκαν υλικές συντεταγμένες.

Οι εξισώσεις (1.25) - (1.30) ισχύουν στις περιπτώσεις που υπάρχουν μεγάλες μετατοπίσεις και μικρές παραμορφώσεις και καλούνται μη γραμμικές (γεωμετρική μη-γραμμικότητα). Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι η μη-γραμμική θεωρία στην οποία δεν υπάρχει περιορισμός στην τάξη μεγέθους των μετατοπίσεων, στη κλίση των μετατοπίσεων και των παραμορφώσεων καλείται ως θεωρία πεπερασμένης ελαστικότητας (Green, A. E.

and Zerna 1968). Όταν οι παράγωγοι του πεδίου μετατόπισης $(u_{i,j})$ είναι πολύ μικρότεροι της μονάδας, τα γινόμενα μπορούν να αμεληθούν ως πολύ μικροί όροι, οπότε οι εξισώσεις (1.25) - (1.30) τώρα έχουν την ακόλουθη μορφή

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (1.32)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \quad (1.33)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \quad (1.34)$$

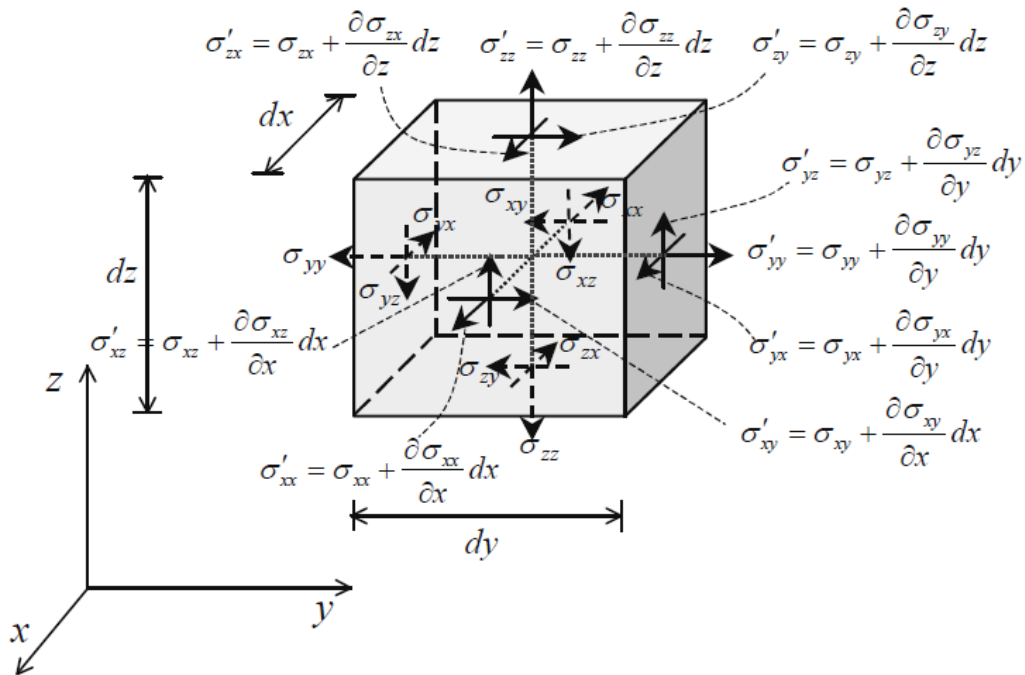
Οι εξισώσεις (1.31) – (1.34) είναι γραμμικές, έτσι ο τανυστής παραμόρφωσης σε μητρωϊκή μορφή τώρα γράφεται ως

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

1.3 Εξισώσεις Ισορροπίας

Υποθέτουμε ότι σε ένα παραμορφώσιμο σώμα όπου ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, η εντατική κατάσταση στο εσωτερικό του μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να διατηρείται η ισορροπία του σώματος καθώς και η ισορροπία κάθε στοιχειώδους τμήματος του. Για ευκολία, θεωρούμε τον στοιχειώδη κύβο (dx, dy, dz) του Σχήματος 1-4, όπου δρουν οι τάσεις σ_{ij} , ενώ οι έδρες όπου είναι απειροστά μετατοπισμένες δρουν οι τάσεις σ'_{ij} . Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη ότι η τάσεις έχουν συνεχή μεταβολή μέσα στο σώμα, οι τάσεις μπορούν να υπολογισθούν μέσο του αναπτύγματος Taylor. Ο στοιχειώδης κύβος ισορροπεί από την επίδραση των

επιφανειακών δυνάμεων που προκαλούν οι τάσεις καθώς και από την καθολική δύναμη $\mathbf{f}(f_x, f_y, f_z)$



Σχήμα 1-4 Ισορροπία στοιχειώδους κύβου

Θεωρώντας ισορροπία δυνάμεων προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις ισορροπίας της τρισδιάστατης ελαστικότητας:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (1.38)$$

Οι πιο πάνω σχέσεις καλούνται διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας και είναι αυτές που επιλύουν το πρόβλημα ενός παραμορφώσιμου σώματος.

1.4 Συνθήκες Συμβιβαστού Παραμόρφωσης

Αν σε ένα σημείο παραμορφώσιμου σώματος είναι γνωστές οι τρεις συνιστώσες (u, v, w) του διανύσματος μετατόπισης και ζητούνται οι έξι ανεξάρτητες συνιστώσες

παραμόρφωσης ε_{ij} , τότε μπορούν να υπολογιστούν άμεσα από τις εξισώσεις (1.31) – (1.34). Διαφορετικά, αν είναι γνώστες οι έξι συνιστώσες παραμόρφωσης και ζητούνται οι τρεις συνιστώσες μετατόπισης, τότε το πρόβλημα έχει υπερεπάρκεια δεδομένων, αφού από τις έξι δεδομένες ανεξάρτητες τιμές πρέπει να υπολογισθούν τρεις άγνωστες τιμές με τη βοήθεια έξι ανεξάρτητων διαφορικών εξισώσεων (1.31) – (1.34). Ωστόσο, για να είναι οι λύσεις (u, v, w) μονότιμες και συνεχείς συναρτήσεις, πρέπει να πληρούνται επιπλέον συνθήκες για τις συνιστώσες παραμόρφωσης. Οι συνθήκες αυτές, εξάγονται από τις εξισώσεις (1.31) – (1.34) με απαλοιφή των συνιστωσών μετατόπισης και στη συνέχεια με διαδοχικές παραγωγίσεις, ονομάζονται συνθήκες συμβιβαστού παραμόρφωσης και ορίζονται ως

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} \quad (1.44)$$

Οι εξισώσεις (1.39) – (1.44) αποδείχθηκαν από τον Saint-Venant και εκφράζουν τη μαθηματική διατύπωση της συνέχειας ενός παραμορφώσιμου σώματος (Sadd 2005).

1.5 Καταστατικές Εξισώσεις Ελαστικών Υλικών

Ο απλούστερος καταστατικός νόμος είναι ο νόμος του Hooke. Στη γραμμική ελαστική θεωρία απειροστών παραμορφώσεων ο γενικευμένος νόμος του Hooke έχει τη μορφή

$$\sigma_{ij} = k_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = x, y, z) \quad (1.45)$$

όπου ο τανυστής τέταρτης τάξης k_{ijkl} των ελαστικών σταθερών έχει $3^4 = 81$ συνιστώσες.

Λόγω του ότι οι τανυστές παραμόρφωσης είναι συμμετρικοί οι ανεξάρτητες συνιστώσες θα είναι 36, οπότε ο γενικευμένος νόμος του Hooke είναι

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.46)$$

ή

$$\{\sigma\} = [K]\{\varepsilon\} \quad (1.47)$$

όπου $[K]$ καλείται το μητρώο δυσκαμψίας, k_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) οι ελαστικές σταθερές και $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$ τα μητρώα τάσης και παραμόρφωσης αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι η εξίσωση (1.46) μπορεί να αντιστραφεί και να ορισθεί ως

$$\{\varepsilon\} = [K]^{-1} \{\sigma\} = [F]\{\sigma\} \quad (1.48)$$

όπου

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

το μητρώο ευκαμψίας και οι συνιστώσες f_{ij} ($ij = 1, 2, \dots, 6$) καλούνται δείκτες ευκαμψίας.

Τα μητρώα $[K]$ και $[F]$ είναι συμμετρικά, δηλαδή $k_{ij} = k_{ji}$ και $f_{ij} = f_{ji}$. Άρα, στη περίπτωση ενός ανισότροπου γραμμικά ελαστικού σώματος οι ανεξάρτητες συνιστώσες

περιορίζονται σε 21. Στη περίπτωση που το υλικό παρουσιάζει ένα επίπεδο συμμετρίας των μηχανικών ιδιοτήτων του ονομάζεται μονοκλινές και οι 21 σταθερές k_{ij} μειώνονται σε 13, αντίθετα όταν υπάρχουν τρία επίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ τους το υλικό ονομάζεται ορθότροπο και οι σταθερές μειώνονται σε 9. Αν όμως σε κάθε σημείο του υλικού υπάρχει ένα επίπεδο πάνω στο οποίο διατηρούνται οι μηχανικές ιδιότητες προς όλες τις διευθύνσεις, τότε το υλικό ονομάζεται εγκάρσια ισότροπο και οι ανεξάρτητες σταθερές μειώνονται σε 5. Τα υλικά στα οποία κάθε διεύθυνση είναι υλικής συμμετρίας ονομάζονται ισότροπα και οι ανεξάρτητες σταθερές είναι 2, και το μητρώο δυσκαμψίας ορίζεται ως

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

θέτουμε

$$k_{12} = \lambda \quad (1.51)$$

$$k_{11} - k_{12} = 2\mu \quad (1.52)$$

όπου λ και μ δύο σταθερές που ονομάζονται σταθερές Lamé. Οι τιμές των μηχανικών σταθερών όπου χαρακτηρίζουν ένα υλικό, καθορίζονται πειραματικά και είναι το μέτρο ελαστικότητας E , ο λόγος Poisson ν ($0 \leq \nu \leq 0.5$, για $\nu = 0.5$ το υλικό είναι ασυμπίεστο) και το μέτρο διάτμησης G , τα οποία συνδέονται με τις σταθερές Lamé από τις σχέσεις

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{G(2G-E)}{(E-3G)} \quad (1.53)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.54)$$

ή αντίστροφα

$$E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda} \quad (1.55)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \quad (1.56)$$

Επομένως, στη περίπτωση ισοτροπικού υλικού η καταστατική εξίσωση τάσης – παραμόρφωσης στη μητρωϊκή μορφή ορίζεται ως

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.57)$$

ή αντίστροφα

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.58)$$

Συνοψίζοντας, τα όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω παρατηρήθηκε ότι τα άγνωστα μεγέθη είναι 15 και η διαθέσιμες εξισώσεις είναι 15. Ωστόσο για την επίλυση ενός γενικού προβλήματος είναι δυνατή υπό την προϋπόθεση ότι ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείτε για την επίλυση προβλημάτων φυσικής και εφαρμοζομένων επιστημών και μηχανικής. Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί για την ανάλυση κατασκευών, μηχανική των ρευστών, μετάδοση θερμότητας, ηλεκτρομαγνητισμό και άλλα (Longan 2007).

Για προβλήματα που περιλαμβάνουν πολύπλοκες γεωμετρίες, φορτίσεις και ιδιότητες υλικού είναι δύσκολο να βρεθεί ακριβείς αναλυτική μαθηματική λύση. Οι αναλυτικές λύσεις είναι αυτές που περιλαμβάνονται από μια μαθηματική έκφραση που δίνει τις τιμές των επιθυμητών αγνώστων ποσοτήτων σε κάθε τοποθεσία ενός σώματος και ισχύει σε κάθε σημείο του σώματος. Αυτές οι αναλυτικές λύσεις απαιτούν την επίλυση μιας συνήθους ή μερικής διαφορικής εξίσωσης η οποία στην περίπτωση πολύπλοκων γεωμετριών, φορτίσεων και ιδιοτήτων υλικού δεν είναι εφικτή. Ωστόσο, προσεγγιστικές λύσεις μπορούν να βρεθούν εάν βασιστεί η επίλυση σε αριθμητικές μεθόδους όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Η διατύπωση του προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία οδηγεί σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων αντί για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Αυτές οι αριθμητικές μέθοδοι δίνουν προσεγγιστικές τιμές των άγνωστων σε διακριτά σημεία στο συνεχές μέσο. Η διαδικασία της μοντελοποίησης ενός σώματος με τον διαχωρισμό του σε ένα ισοδύναμο σύστημα μικρότερων σωμάτων διασυνδεδεμένων σε κοινά σημεία (κομβικά σημεία) ή/και σε συντοριακές γραμμές και επιφάνειες, καλείται χωρική διακριτοποίηση. Γενικά, στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, διατυπώνονται οι εξισώσεις για κάθε πεπερασμένο στοιχείο και συνδυάζονται για να ληφθεί ένα σύστημα εξισώσεων για ολόκληρο το σώμα. (Longan 2007).

2.1 Σύντομη Ιστορική Αναφορά

Τα Πεπερασμένα Στοιχεία έχουν θεωρητική αφετηρία στις αρχές του εικοστού αιώνα και είναι συνυφασμένα με τον Γερμανό μαθηματικό W. Ritz το 1909 και τον Ρώσο μαθηματικό B. G. Galerkin το 1915. Η απουσία όμως του ηλεκτρονικού υπολογιστή καθυστέρησε την διάδοση και την περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία ανάπτυξη σε μεγαλύτερους ρυθμούς άρχισε από το 1940 και έπειτα.

Η ιδέα της ανάπτυξης της μεθόδου γεννήθηκε στην αεροναυπηγική λόγω της ανάγκης εύρεσης λύσεων στα δύσκολα προβλήματα που αντιμετώπιζαν στην κατασκευή των αεροσκαφών.

Το 1940 ο Hrenikoff (1940) εισήγαγε την καλούμενη μέθοδο του πλαισίου (framework method) με την οποία ένα επίπεδο ελαστικό μέσο μπορούσε να αντικατασταθεί με ένα ισοδύναμο σύστημα ράβδων και δοκών. Ακλούθησε, το 1943 ο Courant όπου έλυσε το πρόβλημα της στρέψης χρησιμοποιώντας τριγωνικά στοιχεία με την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας και την ονόμασε Rayleigh-Ritz μέθοδο. Λόγω του ότι εκείνη την εποχή δεν υπήρχε ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, η θεωρία του Courant δεν μπορούσε να εφαρμοσθεί και ξεχάστηκε έως ότου ανακαλύφθηκε ο υπολογιστής όπου οι επιστήμονες ξανά θεμελίωσαν την μέθοδο.

Το 1954 ο Argyris και Kelsey (Argyris 1954; Argyris, J. H. and Kelsey 1960) ανέπτυξαν μεθόδους μητρικής δοκιμής ανάλυσης βασισμένες σε ενεργειακές μεθόδους. Μετά από δυο χρόνια ο Turner και οι συνεργάτες του (Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp 1956) υπολόγισαν το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου.

Το όνομα «Πεπερασμένα στοιχεία» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1960 από τον Clough, καθηγητή του πανεπιστημίου 'University of California, Berkeley', στην εργασία του και από τότε όλοι χρησιμοποιούν την παραπάνω ονομασία.

Ωστόσο, έχουν σημειωθεί τεράστιες πρόοδοι στην εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση διάφορων πολύπλοκων προβλημάτων. Ωστόσο, μηχανικοί, μαθηματικοί και άλλοι επιστήμονες θα συνεχίσουν για την ανάπτυξη νέων εφαρμογών.

2.2 Διαφορές Αναλυτικής Μεθόδου και Πεπερασμένων Στοιχείων

Οι κύριες διαφορές μεταξύ της αναλυτικής μεθόδους και των πεπερασμένων στοιχείων έγκειται στο τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν την κατασκευή και τον τρόπο που ακολουθούν στη διαδικασία επίλυσης. Οι αναλυτικές μέθοδοι δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν προβλήματα στα οποία η γεωμετρία είναι περίπλοκη. Επιπλέον δεν έχουν καταστρωθεί εξισώσεις έτσι ώστε να μπορούν να συμπεριλάβουν όλα τα φυσικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα, ένα σημαντικό πρόβλημα της μη συμπερίληψης όλων

των φαινομένων είναι το ψηλό υπολογιστικό κόστος που χρειάζεται. Στο πλαίσιο αυτό έρχεται η εφαρμογή της μεθόδους των πεπερασμένων στοιχείων για να καλύψει το κενό που προκύπτει από τις αδυναμίες που δημιουργούνται από τις αναλυτικές μεθόδους.

Οι αναλυτικές μέθοδοι θεωρούν την κατασκευή συνεχή που περιγράφεται από τμηματικές ή συνεχείς κοινές εξισώσεις. Αντίθετα η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί μια αριθμητική τεχνική προσέγγισης της συμπεριφοράς μιας κατασκευής. Έτσι ώστε, η κατασκευή αναπαρίσταται από ένα σύνολο επιμέρους στοιχείων που συνδέονται μεταξύ τους με εξισώσεις συνέχειας. Μέσω της επίλυσης των εξισώσεων και σε συνδυασμό με τις εξισώσεις ισορροπίας κάθε στοιχείου, υπολογίζονται τα ζητούμενα μεγέθη σε οποιοδήποτε κόμβο. Ωστόσο, κατά την ανάλυση κάποιου προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, λαμβάνεται υπόψη ολόκληρη η κατασκευή και όχι ένα στοιχειώδες τμήμα της, όπως συμβαίνει με τις αναλυτικές μεθόδους.

2.3 Βασικά Στάδια της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων

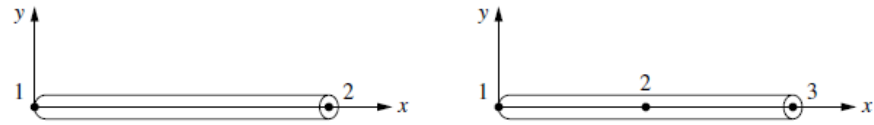
Η επίλυση ενός προβλήματος συνεχούς μέσου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ακολουθεί μια βηματική διαδικασία. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται ως εξής:

1^ο Βήμα: Διακριτοποίηση και επιλογή του στοιχείου.

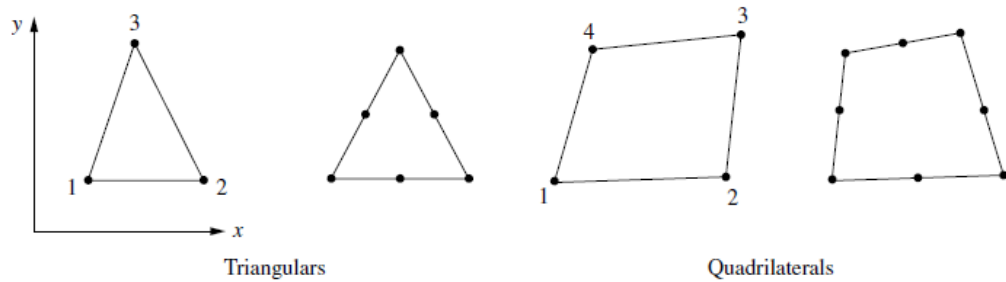
Περιλαμβάνει το διαμερισμό του σώματος σε πεπερασμένα στοιχεία που συνδέονται με κόμβους καθώς και την επιλογή του κατάλληλου στοιχείου ώστε να είναι πιο κοντά στην πραγματική φυσική συμπεριφορά. Ο συνολικός αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται, η διακύμανση στο μέγεθος και το είδος του στοιχείου εξαρτάται από την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που θέλουμε. Η επιλογή του μεγέθους γίνεται έτσι ώστε να προσεγγίζουν εντός των απαιτούμενων ορίων την ακριβή λύση σε μικρό υπολογιστικό χρόνο. Μικρά στοιχεία είναι καλύτερα να χρησιμοποιούνται όταν τα αποτελέσματα μεταβάλλονται γρήγορα, για παράδειγμα όταν υπάρχουν αλλαγές στη γεωμετρία. Αντίθετα, μεγάλα στοιχεία μπορούν να χρησιμοποιούνται όταν τα αποτελέσματα είναι σχετικά σταθερά.

Η επιλογή του κατάλληλου στοιχείου εξαρτάται από τη φυσική σύνθεση του σώματος κάτω από πραγματικές συνθήκες φόρτισης και πόσο κοντά στη πραγματικότητα

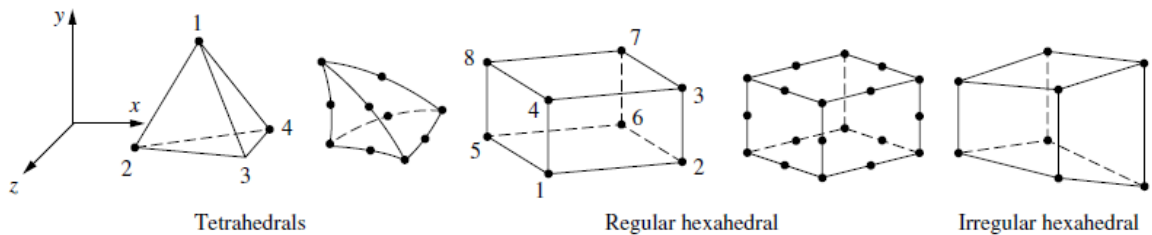
θέλουμε να είναι. Τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται πιο συχνά παρουσιάζονται στο Σχήμα 2-1.



(a) Simple two-noded line element (typically used to represent a bar or beam element) and the higher-order line element



(b) Simple two-dimensional elements with corner nodes (typically used to represent plane stress/strain) and higher-order two-dimensional elements with intermediate nodes along the sides



(c) Simple three-dimensional elements (typically used to represent three-dimensional stress state) and higher-order three-dimensional elements with intermediate nodes along edges

Σχήμα 2-1 Τυπικές γεωμετρίες Πεπερασμένων Στοιχείων (Longan 2007)

2^ο Βήμα: Επιλογή της συνάρτησης μετατοπίσεων (Συνάρτηση Μορφής – Shape Function).

Όταν η μετατόπιση μιας κατασκευής δεν μπορεί να προβλεφθεί αναλυτικά, γίνεται επιλογή μιας συνάρτησης που θα προσεγγίζει τη μεταβολή της άγνωστης μεταβλητής μέσα σε κάθε στοιχείο. Συνήθως προτιμάται πολυωνυμική συνάρτηση.

3^ο Βήμα: Μητρώο δυσκαμψίας και εξισώσεις.

Καθορίζονται οι εξισώσεις του πίνακα που εκφράζουν τις ιδιότητες των στοιχείων σχηματίζοντας ένα πίνακα δυσκαμψίας. Ο καθορισμός του πίνακα δυσκαμψίας μπορεί να γίνει με τις ακόλουθες μεθόδους:

- Μέθοδος άμεσης ισορροπίας (*Direct Equilibrium Method*).

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, το μητρώο δυσκαμψίας εκφράζει τις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής. Αυτή η μέθοδος είναι πολύ απλή και εφαρμόζεται κυρίως σε ραβδωτά στοιχεία και σε στοιχεία δοκού.

- *Αρχή δυνατών έργων (Work or Energy Method).*

Βασίζεται στον υπολογισμό του έργου των εξωτερικών φορτίων και της εσωτερικής ενέργειας η οποία προκύπτει καθώς ο φορέας υπό την επίδραση των εξωτερικών φορτίων παραμορφώνεται. Η μέθοδος αυτή είναι απλή και εφαρμόζεται πιο εύκολα στα στοιχεία 2- και 3- διαστάσεων.

- *Μέθοδος σταθμικών υπολοίπων (Method of Weighted Residuals)*

Επιχειρεί μια προσεγγιστική λύση των διαφορικών εξισώσεων με τη θεώρηση δοκιμαστικών συναρτήσεων για τις χαρακτηριστικές μετατοπίσεις του προβλήματος.

4^ο Βήμα: Μετατροπή του μητρώου δυσκαμψίας στο γενικό σύστημα αξόνων και εισαγωγή των συνοριακών συνθηκών.

Περιλαμβάνει την μετατροπή του μητρώου δυσκαμψίας από το τοπικό (local) σύστημα συντεταγμένων στο γενικό (Global) σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν καθορίζονται οι συνοριακές συνθήκες όπως μετατοπίσεις, δυνάμεις, θερμοκρασίες κ.λπ.

5^ο Βήμα: Επίλυση των άγνωστων βαθμών ελευθερίας.

Αφού έχει γίνει ο μετασχηματισμός και έχουν καθοριστεί οι συνοριακές συνθήκες ακολουθεί η επίλυση του συστήματος. Για τον υπολογισμό των άγνωστων βαθμών ελευθερίας γίνεται επίλυση ενός γραμμικού συστήματος που είναι αρκετά εύκολος.

6^ο Βήμα: Υπολογισμός των παραμορφώσεων και τάσεων.

Από τις γνωστές κομβικές μετατοπίσεις, μπορούν να υπολογισθούν οι τάσεις και παραμορφώσεις κάθε στοιχείου χρησιμοποιώντας τις απαραίτητες σχέσεις.

2.4 Σφάλματα

Με τον όρο «σφάλμα» ορίζουμε την ασυμφωνία του αποτελέσματος που υπάρχει μεταξύ της ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία και του αποτελέσματος από κάποιο μαθηματικό μοντέλο (Cook, D. R., et al. 2002). Ωστόσο, ο μελετητής είναι σημαντικό να γνωρίζει ποιες είναι οι πηγές των πιθανών σφαλμάτων, έτσι ώστε να ακολουθεί τις

κατάλληλες διαδικασίες για την αποφυγή τους. Οι πηγές σφαλμάτων μπορούν να ταξινομηθούν στις ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

Σφάλμα κατά την μοντελοποίηση (Modeling error). Αναφέρεται στο στάδιο μετατροπής του φυσικού προβλήματος σε μοντέλο (μαθηματική διατύπωση του προβλήματος) για την επίλυση του. Το σφάλμα αυτό μπορεί να προκύπτει λόγω των ιδιοτήτων του υλικού, η εφαρμογή των φορτίων και ο καθορισμός των συνοριακών συνθηκών.

Σφάλμα κατά τη διακριτοποίηση (Discretization error). Η επιλογή των διαστάσεων των στοιχείων κατά τη διακριτοποίηση είναι μια διαδικασία πολύ μεγάλης σημασίας για τη δημιουργία του μοντέλου, γιατί είναι ο παράγοντας όπου καθορίζεται η ορθότητα αλλά και η σύγκλιση της ανάλυσης. Αυτό οφείλεται στο ότι οι διαστάσεις των στοιχείων καθορίζουν τον αριθμό των στοιχείων του μοντέλου. Όταν ο αριθμός των στοιχείων είναι μεγάλος τότε η επίλυση συγκλίνει πάρα πολύ κοντά στην πραγματική τιμή. Επιπρόσθετα όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων αυξάνεται και ο χρόνος ανάλυσης. Ωστόσο, οι διαστάσεις των στοιχείων πρέπει να είναι τέτοιες, όπου θα λαμβάνεται υπόψη ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος αλλά και η σύγκλιση των αποτελεσμάτων.

Αριθμητικό Σφάλμα (Numerical error). Ένα από τα σημαντικότερα στάδια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η επίλυση της μητρικής εξίσωσης $[K]\{D\} = \{R\}$. Σε κάθε υπολογισμό, οι πραγματικοί αριθμοί αποθηκεύονται με ακρίβεια ενός δεδομένου αριθμού ψηφίων, τα οποία όλα συμβάλουν κατά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων. Ωστόσο, μετά από ένα αριθμό πράξεων η αρχική ακρίβεια δεν θα είναι η ίδια αλλά θα έχει ελαττωθεί, με αποτέλεσμα να υπάρχει ένα υπολογιστικό σφάλμα.

2.5 Παρεμβολή και Συνάρτηση Σχήματος

Οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του στοιχείου εκφράζονται συνάρτηση των μετατοπίσεων των κόμβων με τη βοήθεια κάποιας συνάρτησης παρεμβολής. Για την παρεμβολή χρησιμοποιούνται πολυώνυμα, λόγω του ότι οι αλγεβρικές πράξεις με τα πολυώνυμα είναι εύκολες και μπορούν να δοθούν οι τελικές εκφράσεις σε κλειστή μορφή. Επίσης, όσο μεγαλύτερου βαθμού είναι το πολυώνυμο που επιλέγεται για την προσεγγιστική έκφραση των μετατοπίσεων, τόσο πιο κοντά πλησιάζουμε την ακριβή λύση (Cook, D. R., et al. 2002).

Στην περίπτωση ενός μονοδιάστατου στοιχείου (ράβδος ή δοκός) η μορφή του πολυώνυμου παρεμβολής που δίνει τη μετατόπιση του στοιχείου δίνεται ως

$$\Phi(x) = u(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (2.1)$$

$$\Phi(x) = u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^3 + \dots + a_{n+1} x^n \quad (2.2)$$

που γράφεται και ως

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \Phi(x) = [M] \{A\} \quad (2.3)$$

όπου a_i είναι σταθερές και καλούνται γενικευμένες συντεταγμένες.

Τώρα, στην περίπτωση που υπάρχουν δυο συνιστώσες (επίπεδη παραμόρφωση) u και v της μετατόπισης, το πολυώνυμο της παρεμβολής για κάθε μετατόπιση είναι

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + \dots \quad (2.4)$$

$$v(x, y) = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 + \dots \quad (2.5)$$

ή σε μητρική μορφή

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & y & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = [M] \{A\} \quad (2.6)$$

Σημειώνουμε ότι το πλήθος των σταθερών a_i και b_i πρέπει να ισούται με τον αριθμό των κόμβων που έχει το κάθε στοιχείο. Ωστόσο η εξίσωση (2.6) που δίνει τις μετατοπίσεις ενός κόμβου σε ένα στοιχείο, θα δίνει και τις μετατοπίσεις $\{\Phi_i\}, \{\Phi_j\}, \{\Phi_m\}, \dots$ των κόμβων i, j, m, \dots του στοιχείου e . Εφαρμόζοντας, τώρα για τις τιμές του x ίσες με τις συντεταγμένες x_i, x_j, x_m, \dots των κόμβων, προκύπτουν οι γραμμικές σχέσεις

$$\begin{aligned}\Phi_i &= [M(x_i)]\{A\} \\ \Phi_j &= [M(x_j)]\{A\} \\ \Phi_m &= [M(x_m)]\{A\} \\ &\vdots\end{aligned}\tag{2.7}$$

οι οποίες μπορούν να γραφτούν σε μητρωϊκή μορφή ως

$$\begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [M(x_i)] \\ [M(x_j)] \\ [M(x_m)] \\ \vdots \end{Bmatrix} \{A\} \Rightarrow \{\Phi_e\} = [X]\{A\}\tag{2.8}$$

Στην γενικευμένη περίπτωση η εξίσωση (2.8) μπορεί να αντιστραφεί και να έχουμε

$$\{A\} = [X]^{-1} \{\Phi_e\}\tag{2.9}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.9) στη (2.3) έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= [M][X]^{-1} \{\Phi_e\} \\ [N] &= [M][X]^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi(x) = [N]\{\Phi_e\}\tag{2.10}$$

όπου $[N]$ καλείται συνάρτηση σχήματος και εξαρτάται από τη γεωμετρία του στοιχείου και τον παρεμβολικό τύπο που χρησιμοποιήθηκε. Η εξίσωση (2.10) τώρα μπορεί να γράφεται ως

$$\Phi(x) = [N_i(x) \quad N_j(x) \quad N_m(x) \quad \dots] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_m \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Η εξίσωση (2.11) περιγράφει τις μετατοπίσεις για στοιχείο που μετατοπίζεται μόνο ως προς τη διεύθυνση x (ένας βαθμός ελευθερίας). Στη περίπτωση που το στοιχείο έχει περισσότερους βαθμούς ελευθερίας τότε η πιο πάνω διαδικασία μπορεί να προσαρμοστεί αναλόγως.

2.6 Αρχή των Δυνατών Έργων

Η Αρχή των Δυνατών Έργων ορίζει ότι ένα σώμα είναι σε ισορροπία, όταν το συνολικό εσωτερικό δυνατό έργο ισούται με το εξωτερικό δυνατό έργο για κάθε κινητικά επιτρεπτό πεδίο μετατοπίσεων. Ωστόσο, με την αρχή των δυνατών έργων μπορεί να αναπτυχθεί το μητρώο δυσκαμψίας για την ανάλυση οποιασδήποτε κατασκευής.

Εφαρμόζοντας τώρα την αρχή των δυνατών έργων για ένα στοιχείο που έχει όγκο V και επιφάνεια S βρίσκουμε ότι η συνολική δυναμική ενέργεια είναι

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{F\} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{\Phi\} dS \quad (2.12)$$

όπου $\{\delta \varepsilon\}$ διάνυσμα των ανοιγμένων παραμορφώσεων, $\{\sigma\}$ διάνυσμα των τάσεων που ισορροπούν τα εξωτερικά φορτία, $\{\delta u\}$ διάνυσμα των μετατοπίσεων, $\{F\}$ διάνυσμα των μαζικών δράσεων (δράσεις ανά μονάδα όγκου) και $\{\Phi\}$ διάνυσμα των επιφανειακών δράσεων (δράσεις ανά μονάδα επιφάνειας).

Οι δυνατές μετατοπίσεις $\{\delta u\}$ δίνονται από την εξίσωση (2.10) με αντικατάσταση του $\{\Phi\}$ με $\{\delta u\}$. Δηλαδή,

$$\{\delta u\} = [N] \{\delta d\} \quad (2.13)$$

Οι ανοιγμένες παραμορφώσεις βασιζόμενες στις εξισώσεις (1.31) – (1.34) δίνονται ως

$$\{\delta\varepsilon\} = [\partial]\{\delta u\} \quad (2.14)$$

όπου σε μητρωϊκή μορφή είναι

$$\{\delta\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.13) στη (2.14) η ανοιγμένη παραμόρφωση τώρα ορίζεται ως

$$\{\delta\varepsilon\} = [\partial][N]\{\delta d\} = [B]\delta\{d\} \quad (2.16)$$

όπου $[B] = [\partial][N]$

Επομένως, ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (2.12) που είναι το δυνατό έργο λόγω των μαζικών δυνάμεων γράφεται

$$\int_V \{\delta u\}^T \{F\} dV = \{\delta d\}^T \int_V [N]^T \{F\} dV \quad (2.17)$$

όπου $\{F_V^e\} = \int_V [N]^T \{F\} dV$ δίνει τις στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις. Δηλαδή τις δυνάμεις που εφαρμόζονται στους κόμβους του στοιχείου και παράγουν ισοδύναμο έργο με τις $\{F\}$.

Με την ίδια διαδικασία μπορούν να αντικατασταθούν και οι επιφανειακές δυνάμεις $\{\Phi\}$ με τις στατικά ισοδύναμες κομβικές δυνάμεις

$$\int_S \{\delta u\}^T \{\Phi\} dS = \{\delta d\}^T \int_S [N]^T \{\Phi\} dS \quad (2.18)$$

$$\{F_S^e\} = \int_S [N]^T \{\Phi\} dS \quad (2.19)$$

Τώρα το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (2.12) γίνεται

$$\int_V \{\delta u\}^T \{F\} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{\Phi\} dS = \{\delta d\}^T (\{F_V^e\} + \{F_S^e\}) \quad (2.20)$$

όπου $\{F^e\} = \{F_V^e\} + \{F_S^e\}$ είναι οι συνολικές στατικές κομβικές δυνάμεις του στοιχείου.

Επομένως, η εξίσωση (2.12) παίρνει τη μορφή

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta d\}^T \{F^e\} \quad (2.21)$$

όπου $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.21) την (2.16), η εξίσωση (2.21) τώρα δίνεται

$$\left(\int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{\delta d\} = \{F^e\} \quad (2.22)$$

όπου

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV \quad (2.23)$$

το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου. Και εφ' όσον το $\{d\}$ διάνυσμα διάφορο του μηδενός η εξίσωση (2.22) τώρα γράφεται ως

$$\{F^e\} = [K^e]\{d\} \quad (2.24)$$

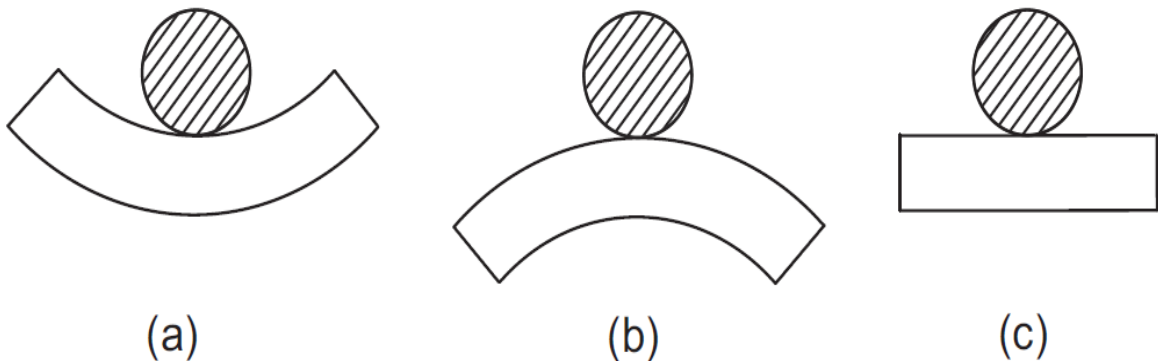
Ωστόσο, μετά όσα έχουν δηχθεί, η Αρχή των δυνατών έργων μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε στοιχείο έτσι ώστε να πάρουμε το μητρώο δυσκαμψίας.

3 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα που έχει να αντιμετωπίσει ο μηχανικός είναι κατά πόσο μια κατασκευή είναι ευσταθής ή ασταθής. Με τον όρο «Ευστάθεια» ορίζεται ότι, η κατάσταση μιας κατασκευής είναι σταθερή όταν σε αυτή παρατηρηθούν μικρές μεταβολές στις παραμέτρους της κατασκευής (π.χ. παραμορφώσεις, μετακινήσεις κλπ). Αντίθετα με τον όρο «αστάθεια» ορίζεται ότι, η κατασκευή παύει να είναι σταθερή όταν σε αυτή οι μικρές μεταβολές στις παραμέτρους της κατασκευής προκαλέσουν σημαντικές αλλαγές στην κατασκευή (Farchad 1994).

3.1 Μορφές ισορροπίας

Υπάρχουν τρεις μορφές ισορροπίας η ευσταθής, ασταθής και ουδέτερη ισορροπία. Οι τρεις μορφές οι ισορροπίας μπορούν να περιγραφούν θεωρώντας μια στερεά σφαίρα τοποθετημένη σε μια λεία επιφάνεια (Σχήμα 3-1) σε διάφορες θέσεις, όπου κάθε κίνηση της γίνεται χωρίς τριβή.

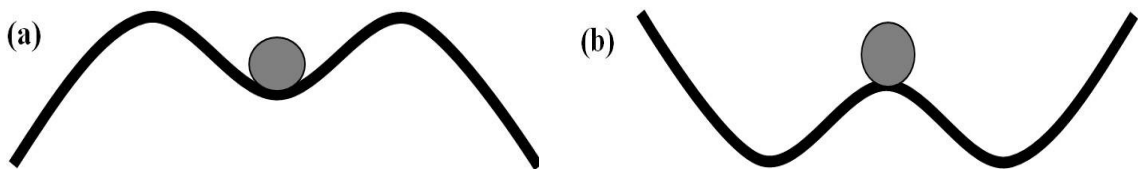


Σχήμα 3-1 Μορφές ισορροπίας: α) Ευσταθής ισορροπία, β) Ασταθής ισορροπία και γ) Ουδέτερη ισορροπία

Η σφαίρα είναι τοποθετημένη σε τρεις διαφορετικές θέσεις που αντιπροσωπεύει τρεις μορφές ισορροπίας. Αν και στις τρεις θέσεις έχουμε ισορροπία, υπάρχουν όμως διαφορές. Αρχικά, αν στη θέση Α μετακινήσουμε τη σφαίρα από την αρχική της θέση και στη συνέχεια αφαιρέσουμε τη δύναμη που προκάλεσε τη μετακίνηση, η σφαίρα θα αρχίσει να ταλαντώνεται μέχρι να επανέρθει στην αρχική της θέση. Η κατάσταση ισορροπίας καλείται Ευσταθής Ισορροπία (Stable equilibrium). Στη θέση Β όταν μετακινήσουμε τη

σφαίρα και στη συνέχεια αφαιρέσουμε τη δύναμη που προκάλεσε την μετακίνηση η σφαίρα όχι μόνο δεν θα επιστρέψει στην αρχική της θέση αλλά θα απομακρύνεται συνεχώς από αυτή. Αυτή η κατάσταση ισορροπίας καλείται Ασταθής Ισορροπία (Unstable equilibrium). Τέλος, η σφαίρα στη θέση Γ μετά από μικρή μετακίνηση δεν θα επιστρέψει στην αρχική της θέση, αλλά ούτε θα απομακρυνθεί, θα συνεχίσει να βρίσκεται στη θέση κατά την οποία μετακινήθηκε. Η κατάσταση αυτή καλείται Ουδέτερη Ισορροπία (Neutral equilibrium).

Η μορφή ισορροπίας ενός οποιουδήποτε συστήματος μπορεί να καθορισθεί από την μελέτη της ενέργειας θέσεως του. Αναφερόμενη στο Σχήμα 3-1 η μετατόπιση της σφαίρας από την θέση ισορροπίας Α έχει ως αποτέλεσμα την ανύψωση του κέντρου βάρους της, όπου απαιτεί την κατανάλωση ορισμένου έργου. Συνεπώς, αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ενέργεια θέσεως της σφαίρας να αυξάνει σε οποιαδήποτε μετατόπιση από την αρχική της θέση Α. Αντίθετα στη θέση Β η μετατόπιση της σφαίρας έχει ως αποτέλεσμα την κάθοδο του κέντρου βάρους της, συνεπώς η ενέργεια θέσεως μειώνεται. Άρα, στην θέση Α που η σφαίρα βρίσκεται σε ευσταθής ισορροπία η ενέργεια είναι ελάχιστη, αντίθετα στη περίπτωση της ασταθούς ισορροπίας (θέση Β) η ενέργεια είναι μέγιστη. Όταν η επιφάνεια είναι οριζόντια δεν υπάρχει καμία μεταβολή της ενέργειας λόγω της μετατόπισης της σφαίρας από τη θέση Γ.

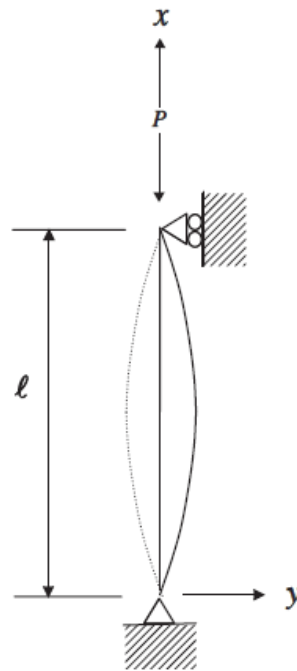


Σχήμα 3-2 Αστάθεια και ευστάθεια για μικρές και μεγάλες διαταραχές

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αναφέρουμε ότι η μορφή ισορροπίας οποιουδήποτε στερεού ή ελαστικού σώματος εξαρτάται από το μέγεθος της εξωτερικής διαταραχής. Από το Σχήμα 3-2α η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής όταν το μέγεθος της διαταραχής είναι μικρό, αντίθετα όταν το μέγεθος της διαταραχής είναι μεγάλο τότε η κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής. Στην περίπτωση του Σχήματος 3-2b, όταν το μέγεθος της διαταραχής είναι μεγάλο η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής.

3.2 Φαινόμενο του λυγισμού

Ο λυγισμός είναι μια μορφή αστάθειας που παρατηρείται σε κατασκευαστικούς φορείς και είναι αποτέλεσμα εφαρμογής αξονικών ή συνεπίπεδων θλιπτικών φορτίσεων. Η μελέτη ενός προβλήματος λυγισμού σε ένα θλιβόμενο στοιχείο είναι πολύπλοκη, λόγω του ότι το φαινόμενο επηρεάζεται από τις συνθήκες στήριξης του θλιβόμενου στοιχείου, τις γεωμετρικές του ατέλειες καθώς και την εκκεντρότητα του θλιπτικού φορτίου.



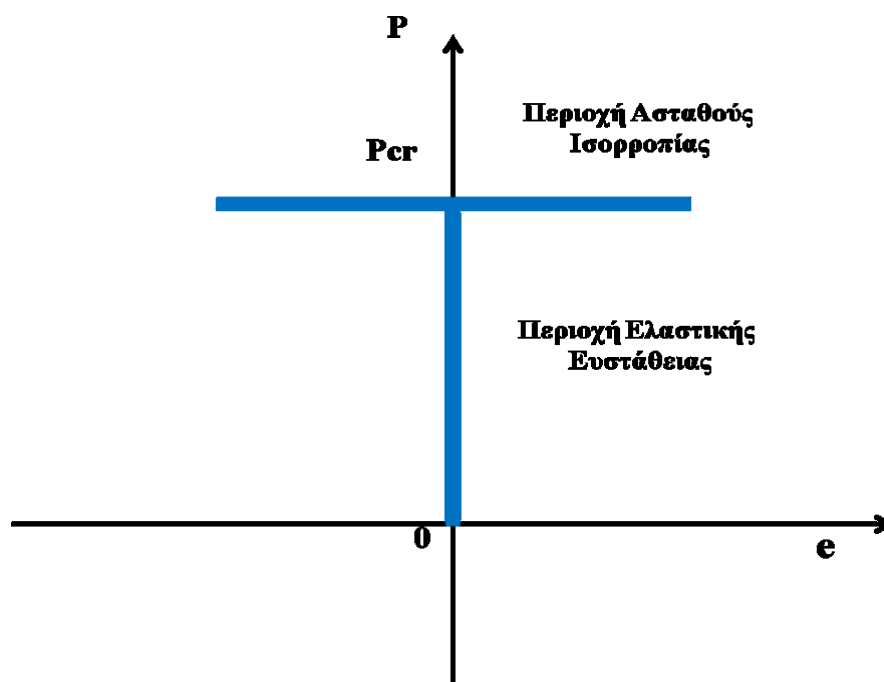
Σχήμα 3-3 Θλιβόμενο υποστούλωμα

Ο απλούστερος τύπος λυγισμού για την κατανόηση του φαινομένου είναι αυτός του υποστυλώματος. Υποθέτουμε ένα υποστούλωμα (Σχήμα 3-3) το οποίο φορτίζεται με θλιπτικό φορτίο. Όσο η φόρτιση του υποστυλώματος είναι μικρότερη από κάποια κρίσιμη τιμή το υποστούλωμα βρίσκεται σε κατάσταση ευσταθής ισορροπίας, δηλαδή το υποστούλωμα είναι ευθύγραμμο. Στη συνέχεια καθώς το φορτίο αυξάνεται βαθμιαία, η ισορροπία του υποστυλώματος μετά από κάποια τιμή φόρτισης γίνεται ασταθής, αρχίζει να παρατηρείται ο λυγισμός. Η τιμή του φορτίου που το υποστούλωμα μεταβαίνει από την ευσταθή θέση ισορροπίας στην ασταθή θέση ισορροπίας καλείται κρίσιμο φορτίο P_{cr} .

Όπως αναφέρεται και πιο πάνω το φαινόμενο του λυγισμού εξαρτάτε από τις συνθήκες στήριξης, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις ατέλειες. Ωστόσο,

αναφερόμενη στο πιο πάνω παράδειγμα η τιμή του κρίσιμου φορτίου είναι ανάλογη προς τη δυσκαμψία του υποστυλώματος και ανάλογη προς το πάχος της διατομής του το οποίο αντιστοιχεί στο επίπεδο λυγισμού, ενώ είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το μήκος του. Επομένως, το κρίσιμο φορτίο έχει μικρή τιμή όταν είναι λεπτό και επίμηκες και αντίστροφα το κρίσιμο φορτίο έχει μεγάλη τιμή.

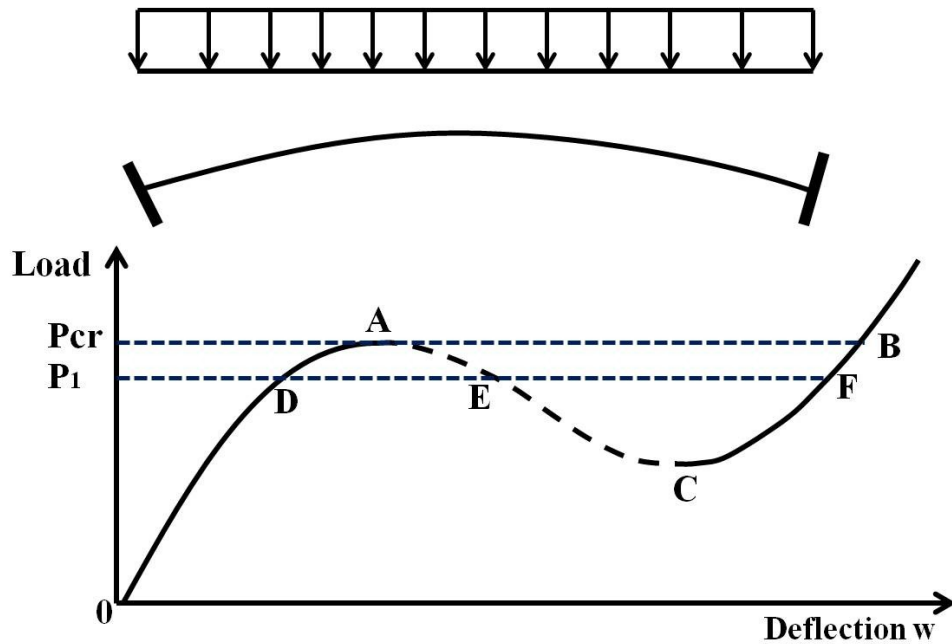
Μέσο του διαγράμματος αξονικού φορτίου και πλευρικής παραμόρφωσης (Σχήμα 3-4) παρουσιάζονται οι διαδοχικές καταστάσεις στατικής ισορροπίας ή δρόμοι ισορροπίας του δομικού στοιχείου. Το διάγραμμα διακρίνεται σε δύο περιοχές την περιοχή όπου το σύστημα είναι ευσταθές και την περιοχή όπου το σύστημα είναι ασταθές. Το σημείο όπου το σύστημα περνά την ευστάθεια ισορροπίας στην ασταθές ισορροπία καλείται σημείο διακλάδωσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα προαναφερθέντα δόθηκαν από τον Euler (1744) και γι' αυτό το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ονομάζεται και φορτίο Euler.



Σχήμα 3-4 Διάγραμμα αξονικού θλιπτικού φορτίου - μετατόπισης

3.3 Δρόμοι ισορροπίας (Equilibrium paths)

Όπως γνωρίζουμε τα διαγράμματα φόρτισης – μετατόπισης αποτελούνται από γραμμικά και μη-γραμμικά τμήματα. Τα διαγράμματα αυτά καλούνται δρόμοι (κλάδοι) ισορροπίας (equilibrium paths). Σε κάθε σημείο του δρόμου ισορροπίας αντιστοιχεί και μια συγκεκριμένη μορφή ισορροπίας (equilibrium configuration).

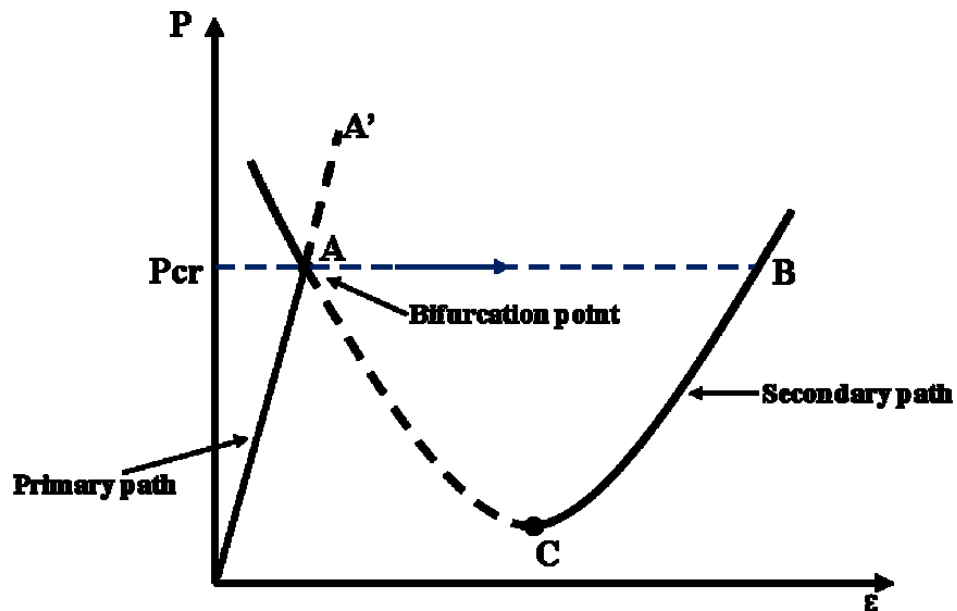


Σχήμα 3-5 Δρόμος ισορροπίας χαμηλού τόξου

Με αναφορά το διάγραμμα το σχήμα 3-5, παρατηρούμε το δρόμο ισορροπίας στην περίπτωση χαμηλού τόξου. Τα τμήματα του δρόμου που είναι χαραγμένα με συνεχή γραμμή συμβολίζουν τον ευσταθή δρόμο ισορροπίας, ενώ το τμήμα με τη διακεκομμένη γραμμή συμβολίζει τον ασταθή δρόμο ισορροπίας. Το σημείο ισορροπίας A στο οποίο το φορτίο λαμβάνει σχετικό μέγιστο καλείται οριακό σημείο (limit point). Ομοίως και για το σημείο C που αντιστοιχεί σε σχετικό ελάχιστο. Παρατηρούμε ότι μετά το σημείο A η κλίση του δρόμου ισορροπίας είναι αρνητική. Αυτό, οφείλεται στο ότι μόλις η φόρτιση φθάσει τη κρίσιμη τιμή του φορτίου, αιφνιδίως και χωρίς καμία προειδοποίηση, η παραμόρφωση εμφανίζει ένα άλμα από το σημείο A στο σημείο B. Αυτός ο τύπος λυγισμού καλείται ακαριαίος λυγισμός (snap-through buckling).

Ένας άλλος χαρακτηριστικός δρόμος ισορροπίας (Σχήμα 3-6) είναι αυτός του σφαιρικού κελύφους. Χαρακτηριστικό του διαγράμματος αυτού είναι ότι το διάγραμμα φόρτισης – μετατόπισης δεν είναι συνεχόμενο όπως του Σχήματος 3-5 αλλά αποτελείται από δυο κλάδους που τέμνονται στο σημείων A. Ο πρώτος κλάδος που έχει αφετηρία την αρχή των αξόνων καλείται κύριος δρόμος ισορροπίας (primary buckling), ενώ ο δεύτερος κλάδος καλείται δευτερεύων δρόμος ισορροπίας (secondary path). Ο κύριος δρόμος μέχρι το κρίσιμο σημείο A είναι ο προλυγισμικός (pre-buckling path) δρόμος και ο δεύτερος δρόμος είναι ο μεταλυγισμικός δρόμος (post-buckling path). Το σημείο που τέμνονται οι δύο κλάδοι λέγεται σημείο διακλάδωσης (bifurcation point). Επίσης όπως και στο σχήμα

μόλις το φορτίο φτάσει το κρίσιμο σημείο παρατηρείται ο ακαριαίος λυγισμός (snap-through buckling). (Thompson, J. M. T. and Hunt 1973).

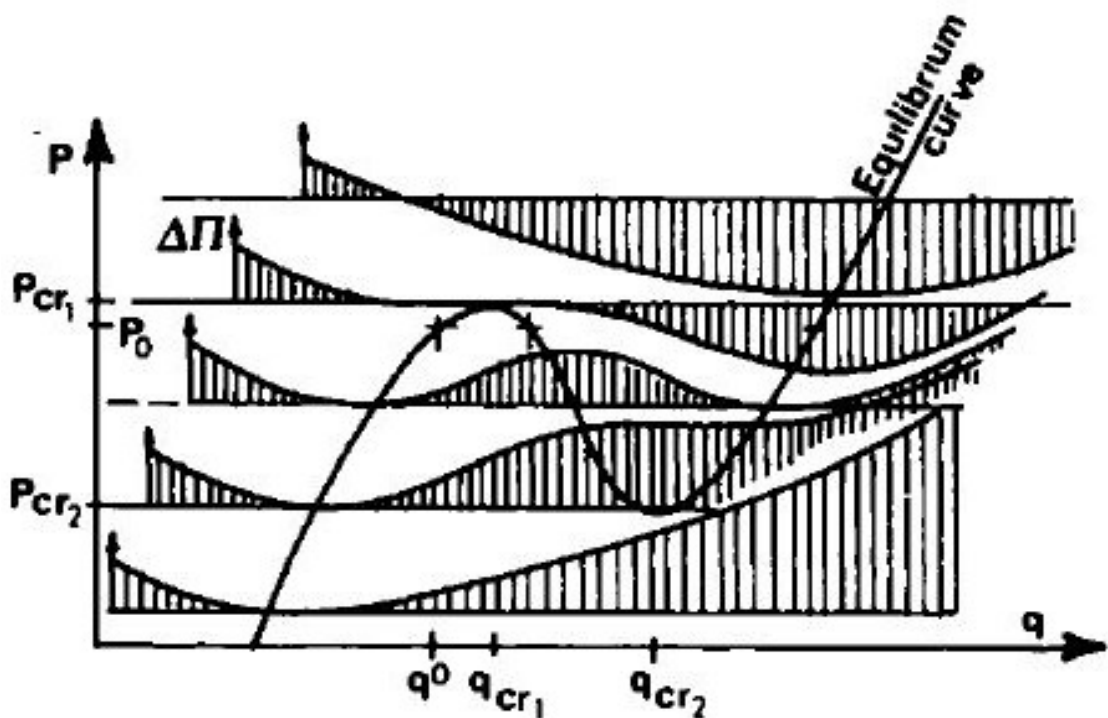


Σχήμα 3-6 Δρόμος ισορροπίας σφαιρικού κελύφους

Στη παράγραφο §3.1 παρουσιάσαμε τις διάφορες καταστάσεις ισορροπίας της στερεάς σφαίρας με βάση την ενέργεια θέσεως, όπου στη περίπτωση της ευσταθούς ισορροπίας η ενέργεια είχε σχετικό ελάχιστο, ενώ στη περίπτωση της ασταθούς ισορροπίας η ενέργεια είχε σχετικό μέγιστο. Οι παρατηρήσεις αυτές ισχύουν και στη περίπτωση των πιο πάνω διαγραμμάτων (Σχήμα 3-5 και 3-6). Δηλαδή σε κάθε σημείο όπου ο δρόμος ισορροπίας είναι ευσταθής (συνεχές γραμμές) η συνολική δυναμική ενέργεια έχει σχετικό μέγιστο.

Στο σχήμα 3-5 διακρίνεται πολύ καλά ο συσχετισμός που υπάρχει μεταξύ της συνολικής δυναμικής ενέργειας σε κάθε σημείο του δρόμου ισορροπίας. Παρατηρούμε ότι καθώς το φορτίο αυξάνεται (από μηδέν) ακολουθείται ο ευσταθής δρόμος. Όταν η τιμή του φορτίου φτάσει μεταξύ των P_{cr1} και P_{cr2} αντιστοιχούν τρία σημεία ισορροπίας (Σχήμα 3-7). Ξεκινώντας από τα αριστερά (Σχήμα 3-7) παρατηρείται ότι το πρώτο σημείο που βρίσκεται στον ευσταθές δρόμο ισορροπίας η συνολική δυναμική ενέργεια έχει σχετικό ελάχιστο, προχωρώντας στο αμέσως επόμενο σημείο η ενέργεια έχει σχετικό μέγιστο (ασταθές δρόμος ισορροπίας) και το τελευταίο σημείο η συνολική δυναμική ενέργεια έχει σχετικό ελάχιστο. Καθώς το φορτίο αυξάνεται, σε κάποια στιγμή το φορτίο θα ισούται με

τη κρίσιμη τιμή P_{cr1} . Σε αυτό το σημείο (κρίσιμο σημείο) η καμπύλη της συνολικής ενέργειας εμφανίζει σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη. Η κατάσταση ισορροπίας που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό είναι ασταθής, γιατί με την αύξηση του φορτίου πέρα του κρίσιμου σημείου, ο φορέας προσπαθεί να βρει μια θέση ευσταθούς ισορροπίας και αφού τοπικά δεν υπάρχει καμία θέση ευσταθούς ισορροπίας πραγματοποιείται ακαριαίως το άλμα που περιγράφεται πιο πάνω στη θέση ευσταθούς ισορροπίας (Σχήμα 3-5 από τη θέση A στη θέση B). Τότε λαμβάνει χώρα μια μη-γραμμική ταλάντωση μεγάλου εύρους στη θέση B (Σχήμα 3-5), και λόγω υπάρξεως εσωτερικών τριβών, σχεδόν στιγμιαία ο φορέας θα αποσβέσει όπου θα ισορροπήσει στη θέση αυτή (Thompson, J. M. T. and Hunt 1973).



Σχήμα 3-7 Μεταβολή της ενέργειας σε κάθε σημείο του δρόμου ισορροπίας (Bazant, Z. P. and Luigi 2010)

Τέλος είναι σημαντικό να αναφέρουμε δυο θεμελιώδη θεωρήματα της ελαστικής ευστάθειας που ισχύουν για διακεκριμένα και συνεχή συστήματα (Thompson, J. M. T. and Hunt 1973):

Θεώρημα 1: Ένας αρχικά ευσταθής δρόμος ισορροπίας που αυξάνει μονότονα συνάρτηση της φορτίσεως δεν μπορεί να γίνει ασταθής χωρίς να τμηθεί υπό ενός άλλου δευτερεύοντος δρόμου ισορροπίας.

Θεώρημα 2: Ένας αρχικά ευσταθής δρόμος ισορροπίας που αυξάνει συναρτήσει των φορτίσεων δεν μπορεί να φθάσει μια ασταθή κατάσταση ισορροπίας που θα οδηγούσε σε ακαριαίων λυγισμό, χωρίς προηγουμένως να τηθεί από έναν δρόμων ισορροπίας που συνδέεται με τιμές της φορτίσεως μικρότερες από την αντιστοιχούσαν εις την ανωτέρω ασταθή κατάσταση ισορροπίας.

3.4 Μέθοδοι μελέτης ελαστικής ευστάθειας

Οι βασικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την μελέτη της ελαστικής ευστάθειας είναι οι ακόλουθες (Farchad 1994):

Μέθοδος του Euler: Με τη μέθοδο αυτή μελετάται κατά πόσον υπάρχουν δύο ή περισσότερες μορφές ισορροπίας σε ένα σύστημα. Αν αυτό είναι δυνατόν, τότε η τιμή αυτή του φορτίου ισούται με την κρίσιμη τιμή.

Ενεργειακή μέθοδος ή μέθοδος της δυναμικής ενέργειας: Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται μόνο σε συντηρητικά συστήματα.

Δυναμική ή κινηματική μέθοδος (dynamic or kinetic approach): Η μέθοδος αυτή εξετάζει την ευστάθεια ή αστάθεια μιας θέσης ισορροπίας ενός συστήματος παρακολουθώντας την ταλάντωση που πραγματοποιεί το σύστημα, όταν του δοθεί μια μικρή διαταραχή από τη θέση ισορροπίας και αφεθεί ελεύθερο.

Ένα χαρακτηριστικό της πρώτης και της τρίτης μεθόδου είναι ότι μπορούν να εφαρμοστούν σε συντηρητικά και μη συντηρητικά συστήματα. Αντίθετα, η δεύτερη μέθοδος εφαρμόζεται μόνο σε συντηρητικά συστήματα. Σημειώνεται, ότι μια δύναμη καλείται συντηρητική όταν το έργο που παράγεται από αυτή είναι ανεξάρτητο του δρόμου και εξαρτάται αποκλειστικά από την αρχική και τελική θέση του σημείου εφαρμογής της. Επίσης το σύστημα δεν είναι συντηρητικό εάν υπάρχει αλλαγή στο υλικό (π.χ. πλαστικότητα).

Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε κυρίως στην ενεργειακή μέθοδο ή μέθοδο της δυναμικής ενέργειας. Όπως έχει αναφερθεί πιο πάνω η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται μόνο σε συντηρητικά συστήματα. Για τον καθορισμό της ευστάθειας με τη μέθοδο αυτή εφαρμόζονται δυο ενεργειακά κριτήρια (Thompson, J. M. T. and Hunt 1973).

Κριτήριο ισορροπίας: Ένα συντηρητικό σύστημα με στατική φόρτιση ισορροπεί σε κάποια θέση, όταν η συνολική δυναμική ενέργεια έχει στάσιμη τιμή στην θέση αυτή.

Κριτήριο ευστάθειας: Μια κατάσταση ισορροπίας οποιουδήποτε συντηρητικού συστήματος είναι ευσταθής για μικρού μεγέθους διαταραχή, όταν η συνολική δυναμική ενέργεια έχει τοπικό ελάχιστο.

Σύμφωνα με το πρώτο κριτήριο για να μπορεί να ισορροπεί ένα οποιοδήποτε σύστημα (συντηρητικό) θα πρέπει η συνολική δυναμική ενέργεια να έχει στάσιμη τιμή, γι' αυτό και το κριτήριο αυτό είναι γνωστό και ως Αρχή της Στάσιμης Τιμής της Δυναμικής Ενέργειας¹ (Principle of stationary potential energy). Σύμφωνα με το δεύτερο κριτήριο που είναι γνωστό και ως Lagrange - Dirichlet, όταν το συνολικό δυναμικό σε κάποια θέση ισορροπίας παίρνει τη μικρότερη τιμή συγκριτικά με όλες τις τιμές που αντιστοιχούν στις γειτονικές θέσεις του συστήματος, τότε η θέση αυτή είναι ευσταθής.

Αντιστρόφως, ο Lyapunov στην διδακτορική του διατριβή έδειξε ότι όταν μια κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής, τότε το συνολικό δυναμικό έχει σχετικό ελάχιστο. Τα θεωρήματα που απέδειξε ο Lyapunov είναι τα εξής (Gantmacher 1970):

Πρώτο θεώρημα Lyapunov: Όταν η συνολική δυναμική ενέργεια ενός συντηρητικού συστήματος, που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, δεν έχει σχετικό ελάχιστο, τότε η κατάσταση αυτή είναι ασταθής (βασίζεται σε όρους μέχρι δεύτερης τάξεως του αναπτύγματος της σειράς Taylor).

Δεύτερο θεώρημα Lyapunov: Όταν η συνολική δυναμική ενέργεια ενός συντηρητικού συστήματος, που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, έχει σχετικό μέγιστο, τότε η κατάσταση αυτή είναι ασταθής (βασίζεται σε όρους ανωτέρας τάξεως).

Επίσης, αξίζει να αναφέρουμε το θεώρημα του Koiter που είναι γνωστό και ως Αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, γενικεύει το θεώρημα του Lagrange – Dirichlet και έχει ως εξής (Koiter 1945):

¹ Αρχή της στάσιμης τιμής της δυναμικής ενέργειας: Από τις συναρτήσεις μετατοπίσεων που είναι συμβατές με τις κινηματικές σχέσεις και ικανοποιούν τις βασικές συνοριακές συνθήκες η συνάρτηση που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας είναι αυτή που δίνει στη δυναμική ενέργεια στάσιμη τιμή.

Θεώρημα Koiter: Η ύπαρξη τοπικού ελάχιστου της συνολικής δυναμικής ενέργειας, που αντιστοιχεί σε κατάσταση ισορροπίας, αποτελεί από πρακτικής άποψης, αναγκαία και ικανή συνθήκη ευστάθειας με την έννοια του Lyapunov.

Η συνολική δυναμική ενέργεια U^T ενός οποιουδήποτε ελαστικού συντηρητικού συστήματος, ισούται με τη συνολική εσωτερική δυναμική ενέργεια U και τη δυναμική ενέργεια Ω που οφείλεται λόγω των εξωτερικών δυνάμεων και γράφεται ως,

$$U^T = U + \Omega \quad (3.1)$$

Με βάση τα πιο πάνω κριτήρια μπορούμε να αναπτύξουμε τη συνολική δυναμική ενέργεια U^T σε σειρά Taylor για τη στατική θέση ισορροπίας q . Ωστόσο, προκύπτει

$$U^T(q + \delta) = U^T(q) + \left. \frac{dU^T}{dq} \right|_q \delta + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U^T}{dq^2} \right|_q \delta^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n U^T}{dq^n} \right|_q \delta^n + \dots \quad (3.2)$$

Αφού το q είναι η θέση ισορροπίας, τότε η συνολική δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στη θέση αυτή και σύμφωνα με το πρώτο ενεργειακό κριτήριο, έχει στάσιμη τιμή, συνεπώς

$$\left. \frac{dU^T}{dq} \right|_q = 0 \quad (3.3)$$

όπου τώρα η εξίσωση 3.2 γράφεται

$$\Delta U^T = \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U^T}{dq^2} \right|_q \delta^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3U^T}{dq^3} \right|_q \delta^3 + \frac{1}{4!} \left. \frac{d^4U^T}{dq^4} \right|_q \delta^4 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n U^T}{dq^n} \right|_q \delta^n + \dots \quad (3.4)$$

όπου $\Delta U^T = U^T(q + \delta) - U^T(q)$

Σύμφωνα με το κριτήριο της ευστάθειας που λέει ότι όταν μια κατάσταση ισορροπίας οποιουδήποτε συντηρητικού συστήματος είναι ευσταθής θα πρέπει η συνολική δυναμική ενέργεια U^T να έχει τοπικό ελάχιστο. Για να ισχύει το κριτήριο αυτό θα πρέπει

το ανάπτυγμα της εξίσωση 3.4 να είναι θετικό για μικρού μεγέθους διαταραχή δ . Δηλαδή θα πρέπει η δεύτερη παράγωγος να είναι,

$$\left. \frac{d^2 U^T}{dq^2} \right|_q > 0 \quad (3.5)$$

τότε η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής.

Όταν η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητικά ορισμένη $\left(\left. \frac{d^2 U^T}{dq^2} \right|_q < 0 \right)$, τότε η διαφορά της δυναμικής ενέργειας ΔU^T έχει τοπικό μέγιστο και η αντίστοιχη θέση ισορροπίας είναι ασταθής. Αν η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν τότε απαιτείται περαιτέρω μελέτη για όρους μεγαλύτερης τάξης (εξίσωση 3.4). Συγκεκριμένα, για τη θέση ισορροπίας όπου μελετάται θα πρέπει

$$\left. \frac{d^3 U^T}{dq^3} \right|_q = 0 \quad \text{και} \quad \left. \frac{d^4 U^T}{dq^4} \right|_q > 0 \quad (3.6)$$

αν ισχύει το πιο πάνω τότε η συνολική δυναμική ενέργεια έχει τοπικό ελάχιστο και η θέση ισορροπίας είναι ευσταθείας. Αν, $\left. \frac{d^4 U^T}{dq^4} \right|_q < 0$ τότε η θέση ισορροπίας είναι ασταθής.

Εάν πάλι $\left. \frac{d^4 U^T}{dq^4} \right|_q = 0$, τότε εξετάζουμε ανώτερες τάξεις όρους έτσι ώστε να ισχύει

$$\left. \frac{d^5 U^T}{dq^5} \right|_q = 0 \quad \text{και} \quad \left. \frac{d^6 U^T}{dq^6} \right|_q > 0 \quad (3.7)$$

Ωστόσο, αν ισχύει το πιο πάνω (εξίσωση 3.7) τότε η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής, αντίθετα η θέση ισορροπίας είναι ασταθής. Αν πάλι $\left. \frac{d^6 U^T}{dq^6} \right|_q = 0$, τότε προχωράμε στη μελέτη ανώτερης τάξης όρους, όπου ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως αναφέρεται πιο πάνω.

3.5 Παραδοχές ελαστικής ευστάθειας

Για την μελέτη των κατασκευών χρησιμοποιούνται μοντέλα και θεωρίες έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα. Για κάθε θεωρία υπάρχουν και οι ανάλογες παραδοχές. Η πιο απλή θεωρία είναι η γραμμική ελαστική ανάλυση, όπου οι παραμορφώσεις είναι μικρές και η επίλυση γίνεται στη αρχική γεωμετρία της κατασκευής. Η ανάλυση αυτή καλείται ελαστική ανάλυση και είναι η θεωρία 1^{ης} τάξεως.

Οι βασικές παραδοχές της γραμμικής ελαστικής ευστάθειας για δοκούς είναι οι ακόλουθες:

1. Το υλικό όπου είναι κατασκευασμένο το σύστημα θεωρείται ομοιογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό. Δηλαδή, ακολουθεί το νόμο του Hooke.
2. Το διάγραμμα τάσης – παραμόρφωσης θεωρείται ταυτόσημο τόσο για τη θλίψη όσο και για τον εφελκυσμό.
3. Οι διατομές συνεχίζουν να είναι επίπεδες και μετά την παραμόρφωση και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα (παραδοχή Bernoulli-Euler Σχήμα 3-8a).
4. Το εξωτερικό αξονικό φορτίο ενεργεί στο κέντρο της διατομής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αποκλείει οποιαδήποτε στρέψη της διατομής.
5. Οι μετακινήσεις κατά τον άξονα της δοκού και εγκάρσια προς αυτόν είναι μικρές σε σύγκριση με τις διαστάσεις της διατομής. Ωστόσο, ο όρος w'^2 είναι αμελητέος, επομένως η σχέση μεταξύ παραμόρφωσης και αξονικής μετακίνησης και η καμπυλότητα είναι:

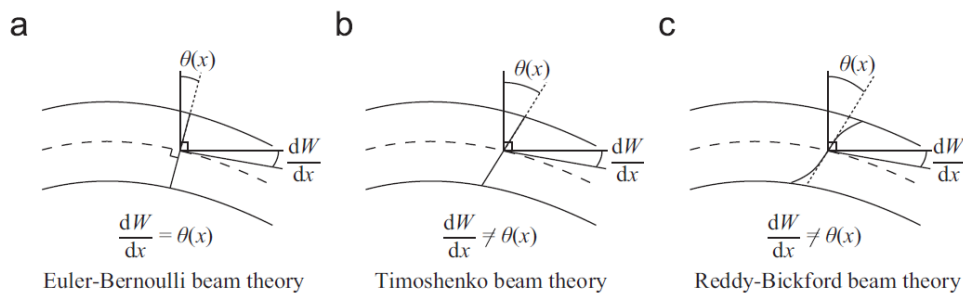
$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.1)$$

όπου ε και κ είναι η ανοιγμένη παραμόρφωση και καμπυλότητα αντίστοιχα.

6. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού υπολογίζεται υποθέτοντας ότι η στατική παραμόρφωση οφείλεται μόνο λόγω κάμψης. Συγκεκριμένα, αμελείται η αξονική παραμόρφωση.

Πρέπει να διευκρινίσουμε ότι εκτός από την θεωρία του Bernoulli-Euler στο σημείο 3 (Σχήμα 3-8a) έχουν προταθεί και κάποιες άλλες θεωρίες όπως η θεωρία του

Timoshenko και του Reddy-Bickford. Η θεωρία του Timoshenko για τις δοκούς που θεωρεί ότι οι επίπεδες διατομές κάθετες αρχικά στον άξονα παραμόρφωσης παραμένουν μεν επίπεδες αλλά όχι αναγκαστικά κάθετες στον παραμορφωμένο ουδέτερο άξονα της δοκού (Σχήμα 3-8b). Δηλαδή, λαμβάνει υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση και επιδράσεις περιστροφικής αδρανείας ώστε να μπορεί περιγράψει δοκούς μικρού μήκους και δοκούς από σύνθετο υλικό κάτι που δεν κάνει η θεωρία Bernoulli-Euler. Παρόλα αυτά όταν η δοκός είναι σύνθετη για παράδειγμα είναι δομής σάντουιτς, καθώς γίνεται βαθύτερη η διατομή της δοκού, δημιουργούνται στρεβλώσεις στη διατομή. Ωστόσο έρχεται η θεωρία Reddy-Bickford ή αλλιώς γνωστή και ως RBT (Reddy 1984, 1990) να επιλύσει το πρόβλημα αντικαθιστώντας το γραμμικό πεδίο μετατοπίσεων με κυβική κατανομή τις αξονικής μετατόπισης και με τετραγωνική κατανομή της διατμητικής παραμόρφωσης σε όλο το βάθος (Σχήμα 3-8c).



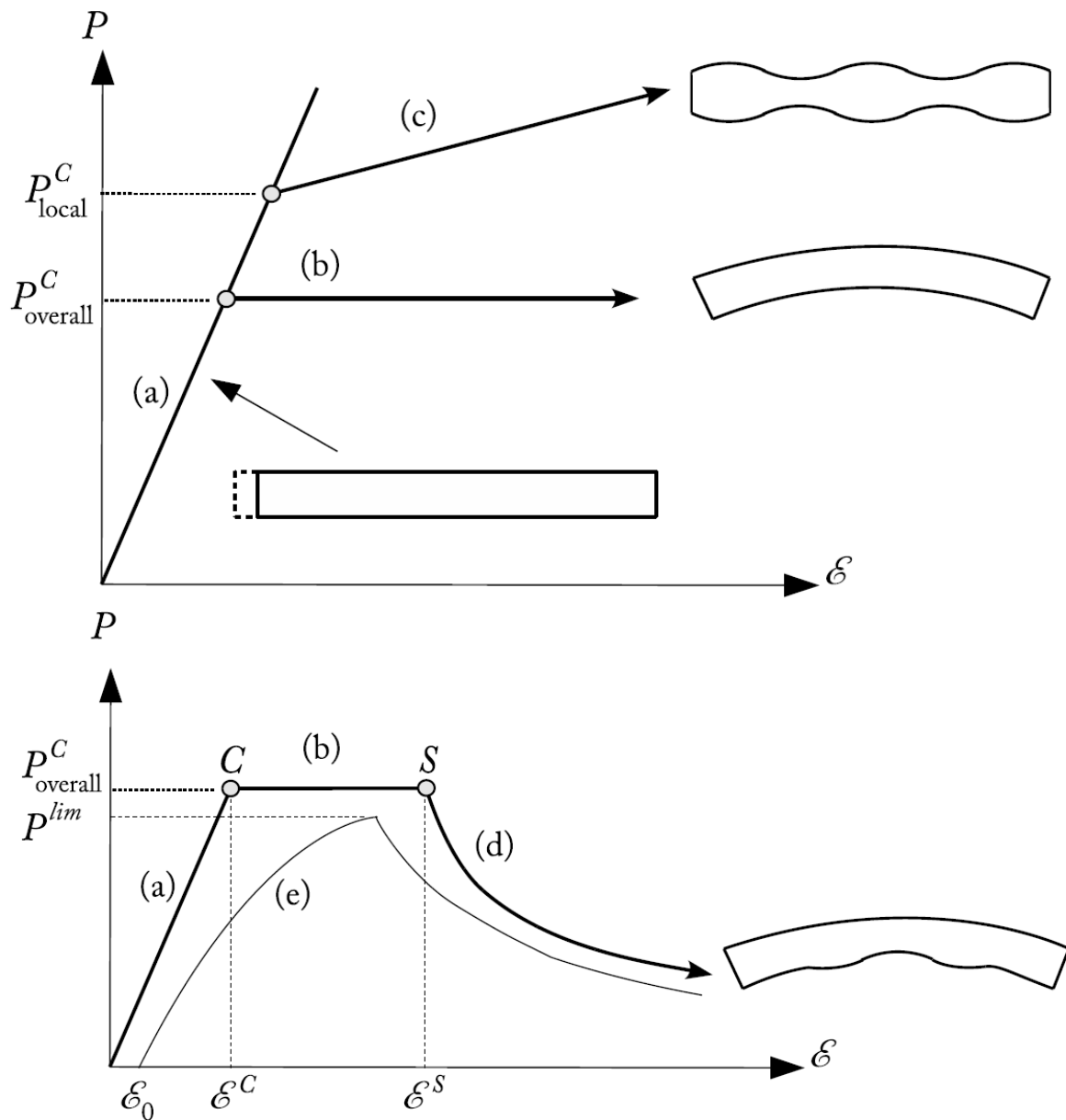
Σχήμα 3-8 Παραδοχές κάμψης της δοκού (Yiatros, S., et al. 2010)

4 ΛΥΓΙΣΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΔΟΜΩΝ ΣΑΝΤΟΥΙΤΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό διερευνάται η λυγισμική συμπεριφορά δομών σάντουιτς (sandwich struts). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας ανάλυση ιδιοτιμών (eigenvalue analysis) υπολογίσαμε τα κρίσιμα φορτία λυγισμού και στη συνέχεια με μη-γραμμική ανάλυση μελετήθηκε η μετά-λυγισμική συμπεριφορά των δομών σάντουιτς για τον εντοπισμό φαινομένων αλληλεπίδρασης μορφών λυγισμού καθώς και της ευστάθειας τους. Οι υπολογισμοί έγιναν με το υπολογιστικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ANSYS. Το υπολογιστικό πακέτο ANSYS είναι το πιο γνωστό και διαδεδομένο πρόγραμμα για τη μελέτη και ανάλυση κατασκευών τόσο σε ερευνητικό αλλά και επαγγελματικό επίπεδο.

Η αλληλεπίδραση μορφών λυγισμού (interactive buckling) ή γνωστή και ως μορφή αλληλεπίδρασης (mode interaction) είναι το φαινόμενο κατά το οποίο υπάρχουν σημεία διακλάδωσης μέσω των οποίων διέρχονται περισσότεροι του ενός μεταλυγισμικοί δρόμοι. Δηλαδή, στην τιμή του κρίσιμου φορτίου αντιστοιχούν δύο ή περισσότερες μορφές λυγισμού. Τέτοιες περιπτώσεις πολλαπλών σημείων διακλάδωσης μπορούν να προκαλέσουν απρόβλεπτα φαινόμενα, όπως έντονη ευαισθησία στις αρχικές ατέλειες λόγω της μη γραμμικής αλληλεπίδρασης δύο ή περισσότερων μορφών λυγισμού (Thompson, J. M. T. and Hunt 1973).

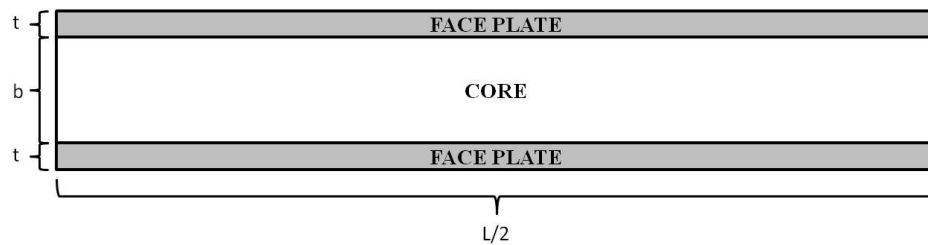
Η μορφή αλληλεπίδρασης δομών σάντουιτς που διερευνάται σε αυτή την εργασία έχει αναφερθεί από τον Allen (1969) και τον Hunt (1988). Διερευνώντας δομές σάντουιτς υπό μονοαξονικό θλιπτικό φορτίο παρατηρήθηκε ότι στη μορφή λυγισμού που είναι ενεργειακά χαμηλότερη (Σχήμα 4-1 - Πάνω), στον ουδέτερο ευσταθές μεταλυγισμικό δρόμος σε κάποιο σημείο εμφανίζεται μια δευτερεύουσα διακλάδωση με αποτέλεσμα την απώλεια της ευστάθειας και τη δημιουργία ενός τοπικού – συγκεντρωτικού λυγισμού που οφείλεται στη αλληλεπίδραση των δυο διαφορετικών ιδιομορφών λυγισμού (Σχήμα 4-1 - Κάτω).



Σχήμα 4-1 Πάνω: η απόκριση ενός σάντουιτς όταν οι δυο κύριες μορφές λυγισμού αντιμετωπίζονται ξεχωριστά, Κάτω: ο συνδυασμός των δυο μορφών λυγισμού οδηγεί στη δεύτερη διακλάδωση και στην ασταθή κατάσταση. (a) προ-λυγισμικός δρόμος που συνοδεύεται με συμπίεση (squashing), (b) ολικός (overall) λυγισμός που δημιουργείται που αρχίζει από το κρίσιμο σημείο C, (c) τοπική μετά-λυγισμική απόκριση των εξωτερικών φύλλων που παραμένει ανενεργή και (d) αλληλεπίδραση λυγισμού και ενεργοποίηση μιας δεύτερης διακλάδωσης S. Ο δρόμος (e) αντιπροσωπεύει στο διάγραμμα ισορροπίας μετά από εισαγωγή αρχικής ατέλειας ϵ_0 . (Yiatros 2010)

4.1 Μεθοδολογία

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν διάφορες δομές σάντουιτς τόσο στη γεωμετρία αλλά και στα υλικά. Όπως αναφέρεται και στην εισαγωγή οι δομές σάντουιτς αποτελούνται από τρία τμήματα, δύο δύσκαμπτα εξωτερικά φύλλα που χωρίζονται από ένα μαλακό πυρήνα (Σχήμα 4-2). Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και μηχανικές ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν πάρθηκαν από το άρθρο του Yiatros, S., et al (2010) για τη Δομή 1, Δομή 2 και για τη Δομή 2 από το άρθρο του Léotoing, L., et al. (2002) . Στο Πίνακα 4-1 παρουσιάζονται όλες οι πληροφορίες σχετικά με τις διαστάσεις και τις μηχανικές ιδιότητες των δομών.



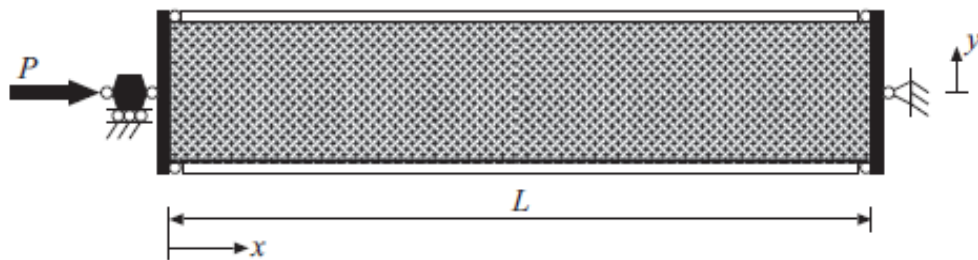
Σχήμα 4-2 Τυπική γεωμετρία σάντουιτς πάνελ

Πίνακας 4-1 Διαστάσεις και μηχανικές ιδιότητες για δύο δοκίμια

Διαστάσεις και Μηχανικές Ιδιότητες	Δομή 1	Δομή 2	Δομή 3
L (mm)	100,0	500,0	470,0
b (mm)	5,1	30,0	50,0
t (mm)	0,51	2,5	1,5
E_{FP} (N/mm ²)	68950,0	68950,0	70000,0
V_{FP}	0,3	0,3	0,333
E_C (N/mm ²)	199,0	199,0	175,0
V_C	0,2	0,2	0,4

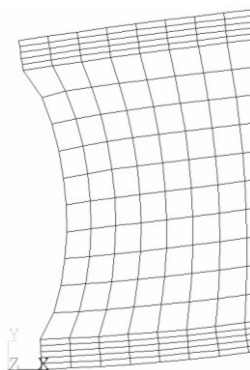
Οι υπολογισμοί έγιναν με το υπολογιστικό πακέτο ANSYS, όπως αναφέρεται και πιο πάνω. Το είδος του στοιχείου που χρησιμοποιήθηκε είναι το PLANE 82, όπου είναι ένα τετράπλευρο με τέσσερις κόμβους και δυο βαθμούς ελευθερίας (U_x και U_y) σε κάθε κόμβο. Για το μέγεθος της διακριτοποίησης, βασιστήκαμε στις δημοσιεύσεις των Léotoing, L., Drapier, S. and Vautrin, 2002 και Yiatros, S., Wadee, M. A. and Theofanous, 2010 που μελέτησαν τη λυγισμική συμπεριφορά δομών σάντουιτς.

Γνωρίζουμε ότι ο λυγισμός παρατηρείται λόγω της επιβολής θλιπτικού αξονικού φορτίου. Αυτό σημαίνει, ότι το μοντέλο πρέπει να περιορίζεται έτσι ώστε η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά που φορτίζεται, να μην μετατοπίζεται κατά την διεύθυνση U_x και U_y (Σχήμα 4-3). Από την άλλη, η πλευρά όπου φορτίζεται θα πρέπει να περιορίζεται μόνο κατά τη διεύθυνση U_y και να επιτρέπεται η μετακίνηση κατά την διεύθυνση U_x (Σχήμα 4-3).



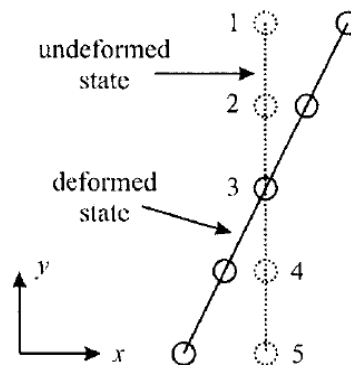
Σχήμα 4-3 Συνοριακές συνθήκες του σάντουιτς πάνελ (Yiatros, S., Wade, M. A. and Theofanous 2010)

Λόγω συμμετρικότητας φορτίου, εντατικών μεγεθών αλλά και πιθανών ιδιομορφών, χρησιμοποιήθηκε το μισό μήκος του μοντέλου για λόγους υπολογιστικού χρόνου. Επομένως, το μοντέλο τώρα θα πρέπει να περιορίζεται έτσι ώστε η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά που φορτίζεται, να μην μετατοπίζεται κατά την διεύθυνση U_x , ενώ επιτρέπεται η μετακίνηση κατά τη διεύθυνση U_y . Η πλευρά που φορτίζεται περιορίζεται μόνο κατά τη διεύθυνση U_y και επιτρέπεται η μετακίνηση κατά την διεύθυνση U_x . Εφαρμόζοντας τις πιο πάνω συνοριακές συνθήκες, κατά την επιβολή της δύναμης παρατηρείται παραμόρφωση της επιφάνειας (Σχήμα 4-4) που επιβάλλεται η δύναμη. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το μοντέλο να μην αναπαριστά τις πραγματικές συνθήκες του φυσικού προβλήματος.



Σχήμα 4-4 Παραμορφωμένη επιφάνεια λόγω επιβολής της δύναμης

Το μοντέλο για να μπορεί να αναπαριστά τις πραγματικές συνθήκες του φυσικού προβλήματος θα πρέπει η πλευρά στην οποία εφαρμόζεται το φορτίο να παραμένει ευθεία (Θεωρία Timoshenko). Λαμβάνοντας υπόψη τα πιο πάνω θα πρέπει να προστεθεί ο περιορισμός ότι η πλευρά φόρτισης θα πρέπει να παραμένει ευθεία, ενώ θα επιτρέπεται η περιστροφή γύρω από το κέντρο της. Το ANSYS μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε αυτό το περιορισμό θεωρώντας, ότι όλοι οι κόμβοι μπορούν να μετακινούνται μαζί και να περιστρέφονται γύρω από τον κεντρικό κόμβο διατηρώντας την πλευρά που φορτίζεται ευθεία (Σχήμα 4-5).



Σχήμα 4-5 Δεσμευμένοι κόμβοι (Erdogan, M. and Ibrahim 2006)

Για την ανάλυση της λυγισμικής συμπεριφοράς, το ANSYS παρέχει τη δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος είτε με χρήση της γραμμικής ανάλυσης του προβλήματος, δηλαδή ανάλυση ιδιοτιμών (eigenvalue buckling analysis), είτε με τη χρήση της μη-γραμμικής ανάλυσης. Το είδος της ανάλυσης που θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται από τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση ιδιοτιμών (eigenvalue buckling analysis) η πληροφορία που μας παρέχει είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για κάθε ιδιομορφή. Αντίθετα με τη μη-γραμμική ανάλυση μπορούμε να πάρουμε περισσότερες πληροφορίες όπως τα σημεία διακλάδωσης (Bifurcation point) αλλά και πληροφορίες για τη μεταλυγισμική (post-buckling) κατάσταση.

Θα πρέπει να προσθέσουμε, ότι το φαινόμενο του λυγισμού πέραν του κρίσιμου φορτίου δεν είναι δυνατό να αντιμετωπισθεί με τη γραμμική ανάλυση που περιγράφεται στο κεφάλαιο 3 αλλά απαιτείται ιδιαίτερη επίλυση. Πιο συγκεκριμένα, εκτός από το γνωστό μητρώο δυσκαμψίας $[K_E]$ ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας που οφείλεται στις μικρές παραμορφώσεις, εμφανίζεται και ένα δεύτερο μητρώο $[K_G]$ που οφείλεται στις

μεγάλες παραμορφώσεις του λυγισμού και καλείται γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας. Ωστόσο, η αριθμητική επίλυση του προβλήματος εξάγεται από την επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών και είναι της μορφής,

$$([K_E] - \lambda_i [K_G])\{\mathbf{u}\} = \{0\} \quad (4.1)$$

του οποίου οι ιδιοτιμές λ αντιστοιχούν στα κρίσιμα φορτία λυγισμού, ενώ τα ιδιοδιανύσματα $\{\mathbf{u}\}$ αντιστοιχούν στη μορφή που λαμβάνει ο λυγισμένος φορέας όταν δέχεται το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο.

Συγκεκριμένα, μετά το σχηματισμό των δυο πιο πάνω μητρώων, οι ιδιοτιμές υπολογίζονται από τη σχέση,

$$\det|[K_E] - \lambda_i [K_G]| = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.2)$$

όπου ο δείκτης i αντιστοιχεί στο πρώτο, δεύτερο, κλπ, φορτίο λυγισμού.

Από την άλλη, στη μη-γραμμική ανάλυση, εφαρμόζεται η θεωρία των μεγάλων παραμορφώσεων και η προσέγγιση του προβλήματος γίνεται σε βήματα. Επομένως, η επιβαλλόμενη παραμόρφωση κατακερματίζεται σε τμήματα, κάθε ένα από τα οποία επιβάλλεται στο μοντέλο ανά βήμα. Σε κάθε βήμα επιχειρείται η σύγκλιση των κριτηρίων που έχουν τεθεί. Μετά την ολοκλήρωση το μητρώο δυσκαμψίας προσαρμόζεται στη νέα παραμορφωσιακή κατάσταση ώστε να χρησιμοποιηθεί στο επόμενο βήμα. Η ακρίβεια της ανάλυσης εξαρτάται από τον αριθμό των βημάτων και το μέγεθος τους, έτσι το ANSYS ορίζει ένα ελάχιστο βήμα ίσο με 0,001. Το ANSYS για τη μη-γραμμική ανάλυση μας παρέχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Newton-Rapson, είτε τη μέθοδο Arc-length (Παράρτημα Γ).

Επιπρόσθετα, στη μη γραμμική ανάλυση που παίζει σημαντικό ρόλο για εξέλιξη και την ανάλυση του προβλήματος είναι η ύπαρξη μιας αρχικής γεωμετρικής ατέλειας του μοντέλου, έτσι ώστε να εκκινήσει το φαινόμενο του λυγισμού. Η ατέλεια εφαρμόζεται γιατί από μόνη της η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων δεν μπορεί να δημιουργήσει τους δρόμους ισορροπίας γιατί το πρόγραμμα θα έβρισκε τρεις διαφορετικούς δρόμους και το πρόγραμμα δεν θα ήξερε πιο να ακολουθήσει. Ωστόσο, με την ατέλεια στο πρόβλημα

δίνει μια ώθηση προς μια από τις τρεις μετά-λυγισμικές κατευθύνσεις έτσι ώστε να προχωρήσει στην ολοκλήρωση της ανάλυσης. Αυτή η αρχική ατέλεια μπορεί να εφαρμοστεί με τη μεταβολή της γεωμετρίας πριν την εφαρμογή της μη-γραμμικής ανάλυσης. Άρα, για τον καθορισμό της γραμμικής ατέλειας πρέπει ακολουθείται η εξής διαδικασία. Αρχικά, γίνεται η ανάλυση ιδιοτιμών και στη συνέχεια από την πρώτη ιδιομορφή και σε συνδυασμό με ένα συντελεστή σμίκρυνσης, σχηματίζεται η επιθυμητή γεωμετρική ατέλεια. Γίνεται η επιλογή της πρώτης ιδιομορφής γιατί αποτελεί τη δυσμενέστερη περίπτωση του λυγισμού, ενώ η μετατόπιση που θα καθορίσει το συντελεστή σμίκρυνσης λαμβάνεται κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μη μεταβάλλεται σημαντικά η γεωμετρία του μοντέλου.

Στη παρούσα εργασία η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τη μη γραμμική ανάλυση είναι η Arc-length (Παράρτημα Γ). Επιπλέον, ο συντελεστής σμίκρυνσης που χρησιμοποιήθηκε για το σχηματισμό της γεωμετρικής ατέλειας ήταν ίσος με $L/10000$.

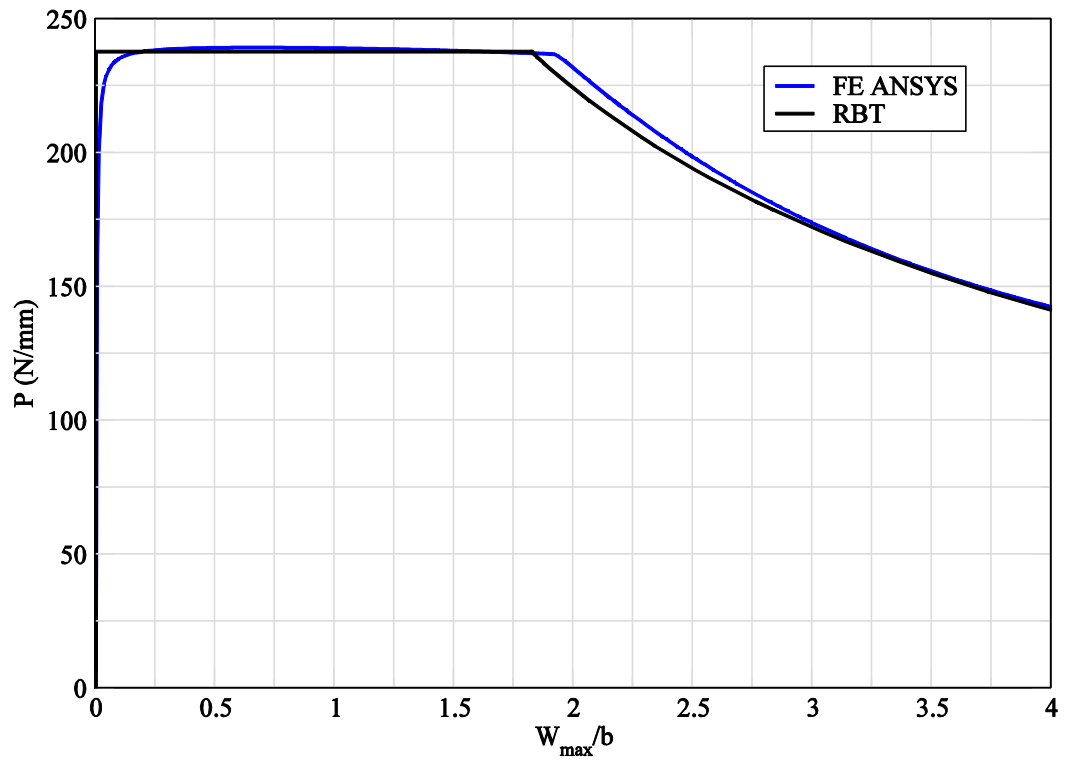
4.2 Μοντέλο Wadee, et al. (2010)

Ο Wadee., et al. (2010) αναπτύσσοντας ένα αναλυτικό μοντέλο μελέτησαν την αλληλεπίδραση μορφών λυγισμού για διάφορες δομές σάντουιτς. Το αναλυτικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε κάνει κάποιες παραδοχές

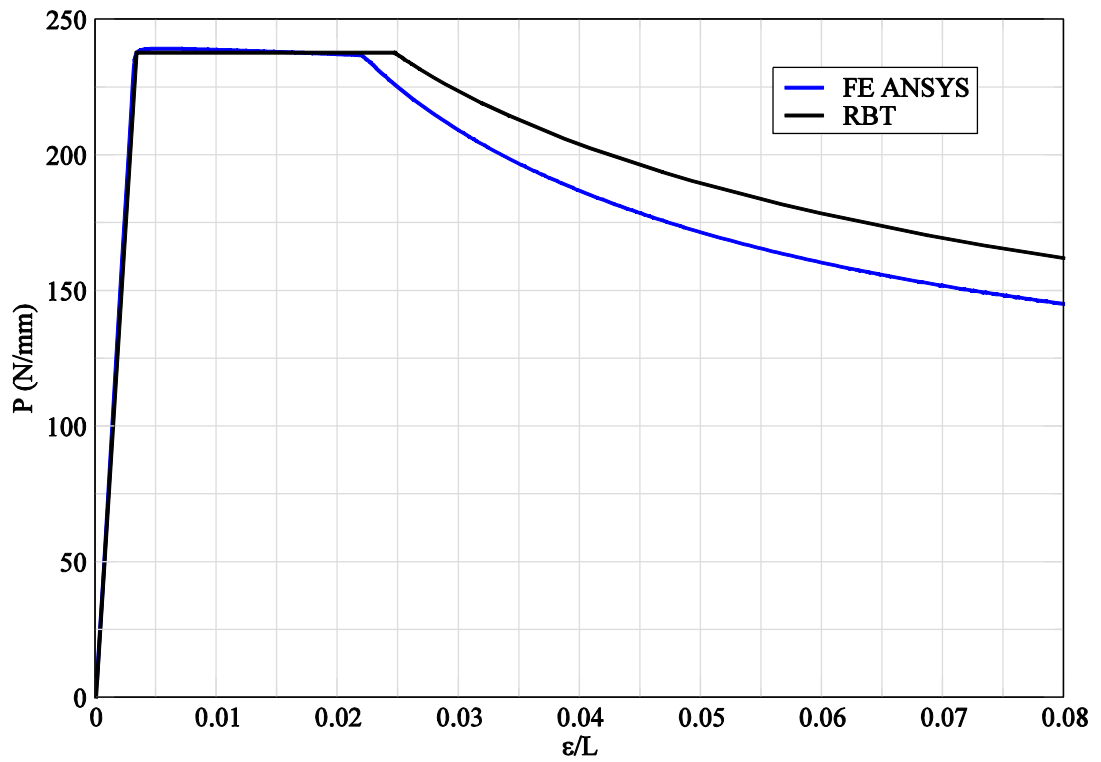
- Το υλικό του πυρήνα είναι ορθοτροπικό.
- Θεωρεί ότι τα εξωτερικά φύλλα είναι τόσο λεπτά που δεν λαμβάνει υπόψη το μέτρο διάτμησης.
- Το αξονικό φορτίο εφαρμόζεται στο κέντρο της διατομής (ουδέτερος άξονας).
- Θεωρεί αμφιαρθρωτή στήριξη (simply supported) πιο συγκεκριμένα θεωρεί ότι στο ένα άκρο υπάρχει κύλιση και στην άλλη άρθρωση (Σχήμα 4-3).

Επιπρόσθετα, το μοντέλο για να μπορεί να περιγράψει ορθά το λυγισμό εφάρμοσε το θεώρημα Reddy-Bickford ή άλλιος RBT (Reddy 1984, 1990) όπως περιγράφεται στη παράγραφο §3.5. Χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τα υλικά που χρησιμοποιήσαν (Πίνακας 4-1 – Δομή 1 και 2) μελετήσαμε τη λυγισμική συμπεριφορά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Στα Σχήματα 4-6 και 4-7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά από ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων.

(a)

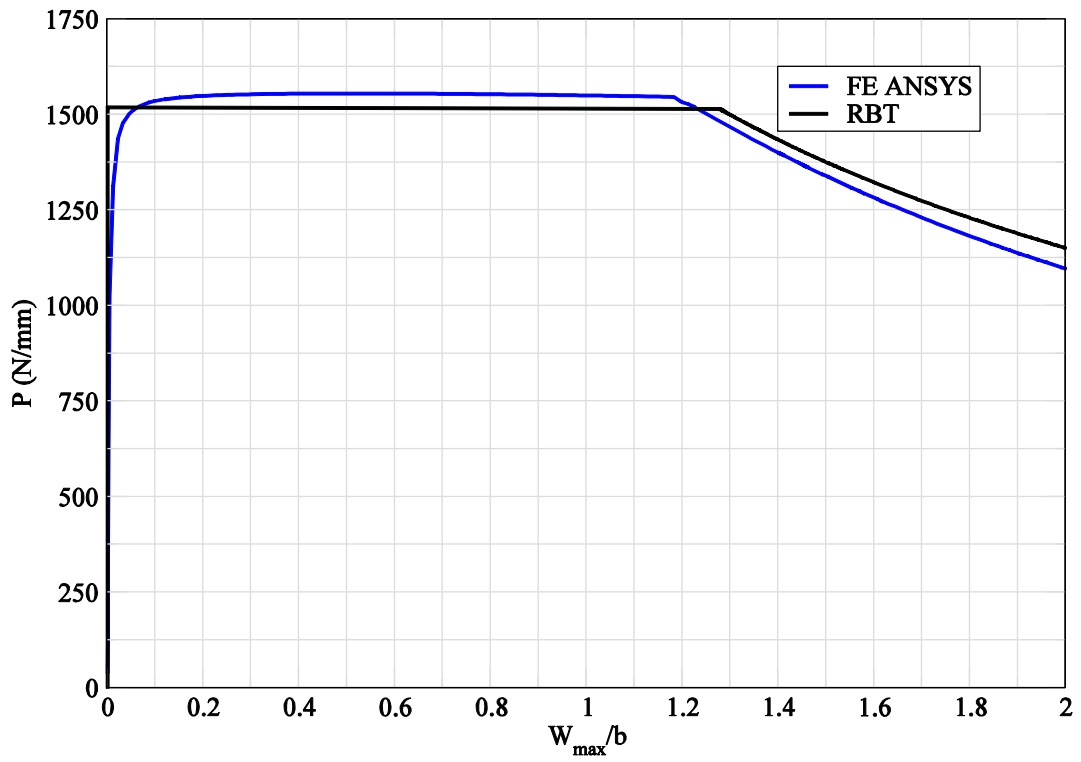


(b)

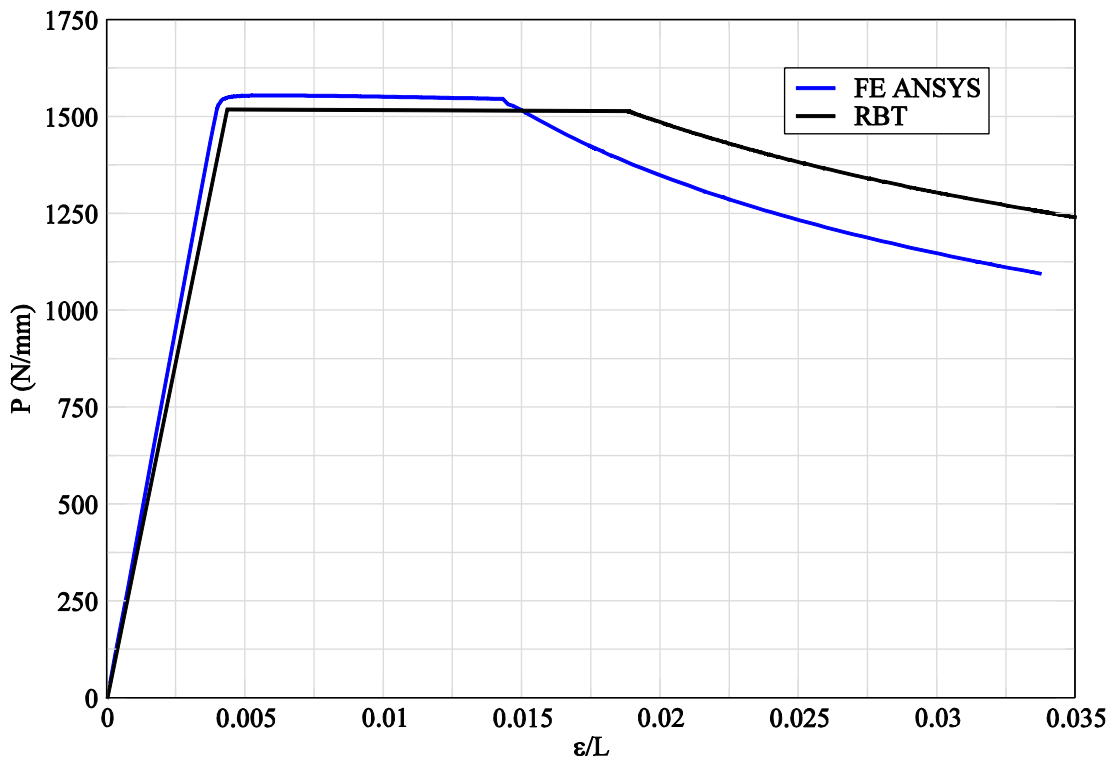


Σχήμα 4-6 Ο δρόμος ισοροπίας για τη δομή 1: (a) Διάγραμμα φορτίου με πλευρική μετατόπιση (b) Διάγραμμα φορτίου – αξονικής μετατόπισης

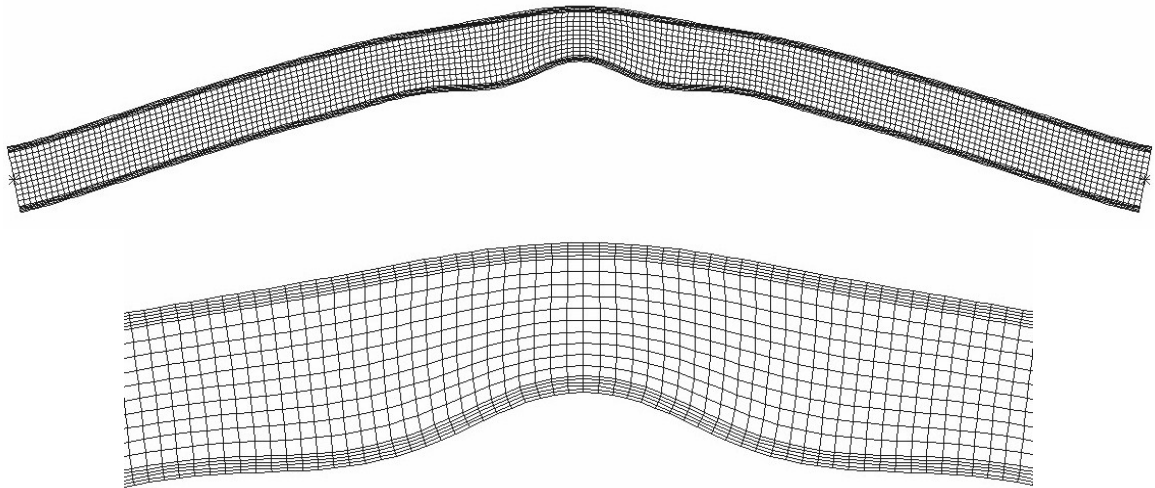
(a)



(b)



Σχήμα 4-7 Ο δρόμος ισορροπίας για τη δομή 2: (a) Διάγραμμα φορτίου - πλευρική μετατόπιση (b) Διάγραμμα φορτίου - αξονικής μετατόπισης



Σχήμα 4-8 Στιγμιότυπο τοπικού λυγισμού της δομής 1 κατά το στάδιο της αποφόρτισης.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα παρατηρείται ότι προκύπτουν κάποιες διαφορές μεταξύ της ανάλυσης από πεπερασμένα στοιχεία και του αναλυτικού μοντέλου. Η διαφορές αυτές κατά κύριο λόγο οφείλονται στις παραδοχές που έχουν γίνει αλλά και στο τρόπο επίλυσης του προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία, καθώς και στις παραδοχές του αναλυτικού μοντέλου. Μια τυπική διαφορά είναι ότι στα πεπερασμένα στοιχεία υπάρχουν οριακά σημεία, αντίθετα στο αναλυτικό μοντέλο υπάρχουν διακλαδώσεις. Μια άλλη διαφορά είναι ότι στο αναλυτικό μοντέλο δεν εφαρμόζεται ατέλεια αλλά έχει ως παραδοχή μια συγκεκριμένη παραμόρφωση στο πυρήνα, από την άλλη στο μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων η παραμόρφωση έχει μεγαλύτερη ελευθερία και βασίζεται στην διακριτοποίηση του κάναβου.

Ωστόσο, παρά τις διαφορές που υπάρχουν, τα δύο μοντέλα συμφωνούν αρκετά μεταξύ τους, όσο αφορά τη αλληλεπίδραση μορφών λυγισμού (interactive buckling mode). Τα Σχήματα 4-6 και 4-7 που δίνουν ολόκληρη την απόκριση μπορούν να διαχωριστούν σε τρία τμήματα. Το πρώτο τμήμα αντιπροσωπεύει τον θεμελιώδη/κύριο δρόμο ισορροπίας (fundamental path) της δοκού που υποβάλλεται μόνο σε παραμορφώσεις θλίψης (Σχήμα 4-6b και 4-7b) δεν υπάρχει λυγισμός (Σχήμα 4-6a και 4-7a) . Το δεύτερο τμήμα σχετίζεται με το μετά-λυγισμικό δρόμο που αντιστοιχεί στον ολικό λυγισμό της δοκού (overall buckling). Αυτό το τμήμα είναι εξαιρετικά κρίσιμο γιατί το συνολικό φορτίο παραμένει σταθερό και καθιστά το σύστημα ουδέτερα ευσταθές (neutral stability). Καθώς όμως ο λυγισμός (overall buckling) αυξάνει, ένα δεύτερο σημείο διακλάδωσης εμφανίζεται όπου καθιστά την συμπεριφορά έντονα υπό-κρίσιμη (sub-critical). Επομένως, το

παραμορφωμένο σχήμα της δοκούς τώρα απαρτίζεται από τον ολικό λυγισμό (overall buckling) και το τοπικό – συγκεντρωτικό λυγισμό στο κάτω εξωτερικό φύλλο (Σχήμα 4-8). Το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης του λυγισμού εμφανίζεται. Η αλληλεπίδραση μεταξύ του ολικού λυγισμού και τσαλακώματος (winkling) του ενός εξωτερικού φύλλου, είναι υπεύθυνα για την σημαντική απώλεια της δυσκαμψίας ολόκληρου του σάντουιτς.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι γιατί μοντελοποίηση θεωρήσαμε ότι οι δομές σάντουιτς είναι απαλλαγμένες από κάθε ατέλεια. Ωστόσο, ο εντοπισμός της δευτερεύουσας διακλάδωσης που προκαλεί την αστάθεια είναι αρκετά σημαντικός, γιατί εάν η δευτερεύουσα διακλάδωση βρίσκεται πολύ κοντά στην πρώτη διακλάδωση, στην περίπτωση ατελειών μπορεί να μειώσει αρκετά το κρίσιμο φορτίο κάμψης/θλίψης. Γι' αυτό και στους κώδικες των μεταλλικών κατασκευών στην κατηγορία των διατομών για λεπτότυχες διατομές (κλάση 3 ή 4) το επιτρεπόμενο θλιπτικό φορτίο είναι αρκετά μειωμένο λόγω της επιρρέπειας σε τοπικό – συγκεντρωτικό λυγισμό.

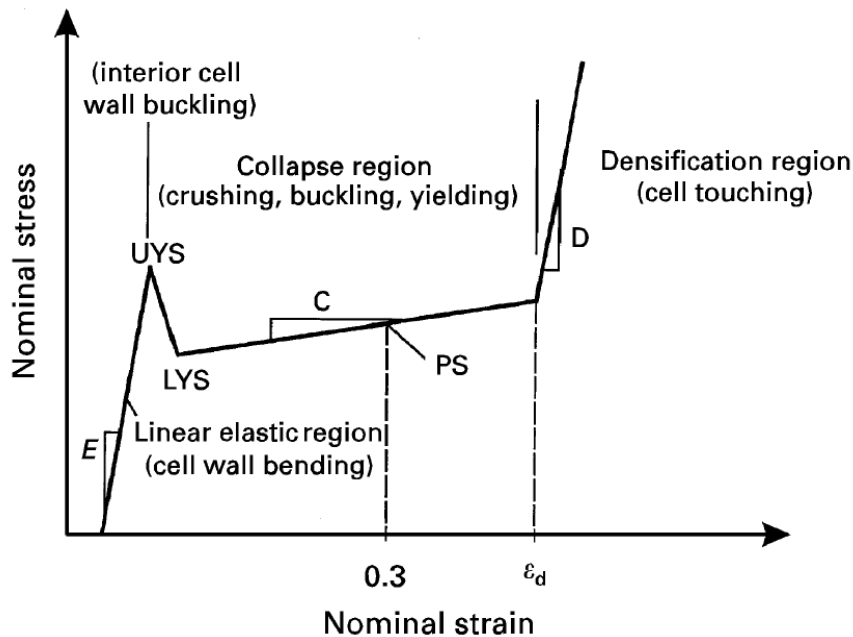
Συγκρίνοντας τώρα τη Δομή 1 και Δομή 2 των Σχημάτων 6 και 7 αντίστοιχα, παρατηρείται ότι καθώς αυξάνεται το πάχος του πυρήνα αυξάνεται και το κρίσιμο φορτίο. Επιπρόσθετα, μια άλλη παρατήρηση που γίνεται είναι ότι η Δομή 1 παρουσιάζει μεγαλύτερες παραμορφώσεις απ' ότι η Δομή 2 αυτό κυρίως οφείλεται στο γεγονός ότι η Δομή 2 έχει μεγαλύτερη δυσκαμψία απ' ότι η Δομή 1 και αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο τοπικός – συγκεντρωτικός λυγισμός να παρατηρείται σε πιο μικρές παραμορφώσεις για τη Δομή 2.

4.3 Διαβαθμισμένης δομής υλικό (Functionally graded material)

Το βασικό κύριο χαρακτηριστικό των δομών σάντουιτς είναι η δυνατότητα μείωσης του ίδιου βάρους τους διατηρώντας την ίδια ισοδύναμη δυσκαμψία αντίστοιχων μονολιθικών στοιχείων. Ωστόσο ένας νέος τύπος υλικών έρχεται να βελτιστοποιήσει τις μηχανικές ιδιότητες των δομών σάντουιτς που ανήκουν στην κατηγορία των υλικών διαβαθμισμένης δομής (Functionally graded material - FGM), όπου η δομή τους μεταβάλλεται βαθμιαία σε σχέση με τον όγκο με συνέπεια την αλλαγή των ιδιοτήτων τους όπως το μέτρο ελαστικότητας, η σκληρότητα κ.α. Η ιδέα των υλικών διαβαθμισμένης δομής προτάθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1990 επιτρέποντας σχεδιαστές να

αναζητούν νέες εφαρμογές όχι μόνο στην αεροδιαστημική κοινότητα, αλλά και στην πολιτική μηχανική, αυτοκινητοβιομηχανία κ.α. (Avila 2007).

Ένα είδος υλικών διαβαθμισμένης δομής που έχουν εφαρμογή στις δομές σάντουιτς είναι οι μεταλλικοί αφροί. Οι μεταλλικοί αφροί είναι πορώδης υλικά με εξαιρετικά χαμηλή πυκνότητα και αυτό τους καθιστά να έχουν διαφορετική συμπεριφορά σε σχέση με τα άλλα μέταλλα. Από ελέγχους στη θλίψη που έχουν γίνει παρατηρήθηκε ότι το διάγραμμα θλίψης - παραμόρφωσης χωρίζεται σε τρία μέρη (Σχήμα 4-9). Το διάγραμμα δείχνει μια γραμμική αύξηση της παραμόρφωσης στην αρχή της επιβολής της τάσης και ένα σχεδόν αμετάβλητης τάσης στην μέση, που ακολουθείται από μια απότομη αύξηση της τάσης - παραμόρφωσης. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να εξηγηθεί πολύ απλά ως εξής: αρχικά το πρώτο στάδιο οφείλεται λόγω της ελαστικής παραμόρφωσης, όταν το φορτίο φτάσει στο οριακό σημείο παρατηρείται μια απότομη πτώση του φορτίου που αυτό οφείλεται στο λυγισμό του τοιχώματος των πόρων, στη συνέχεια παρατηρείται η δεύτερη περιοχή όπου η τάση είναι σχεδόν ευθύγραμμη λόγω της ομοιογενούς παραμόρφωσης. Η τελευταία περιοχή αρχίζει να εμφανίζεται όταν τα τοιχώματα των πόρων έρθουν σε επαφή και το χαρακτηριστικό της είναι η απότομη κλίση που εμφανίζεται (Beals, J. T. and Thompson 1997). Ωστόσο, ο Gibson et al. (1989) αναφέρουν ότι ο μηχανισμός παραμόρφωσης αυτού του είδους υλικού σχετίζεται με αυτό του «κυψελοειδούς» (honeycomb).



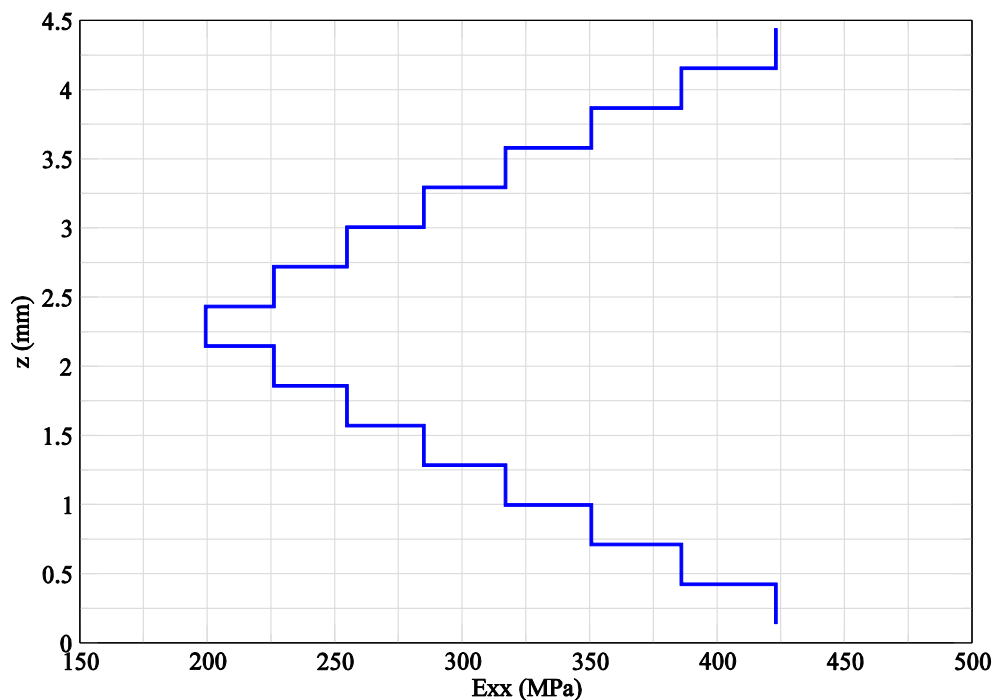
Σχήμα 4-9 Διάγραμμα Θλίψης - παραμόρφωσης μεταλλικού αφρού (Beals, J. T. and Thompson 1997)

Στην παρούσα εργασία έγινε μια πρώτη προσπάθεια μοντελοποίησης αυτού του είδους υλικού θεωρώντας ότι το μέτρο ελαστικότητας του πυρήνα μεταβάλλεται από το κέντρο προς τα έξω. Για να καταστεί αυτό δυνατό βασιστήκαμε στη πιο κάτω εξίσωση που μεταβάλλει το μέτρο ελαστικότητας με το βάθος στο υλικό (Apretre, N. A., et al. 2006),

$$E(z) = E_0 \left(a_1 \left(\frac{z}{h} \right)^4 + a_2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 + a_3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 + a_4 \left(\frac{z}{h} \right) + 1 \right) \quad (4.3)$$

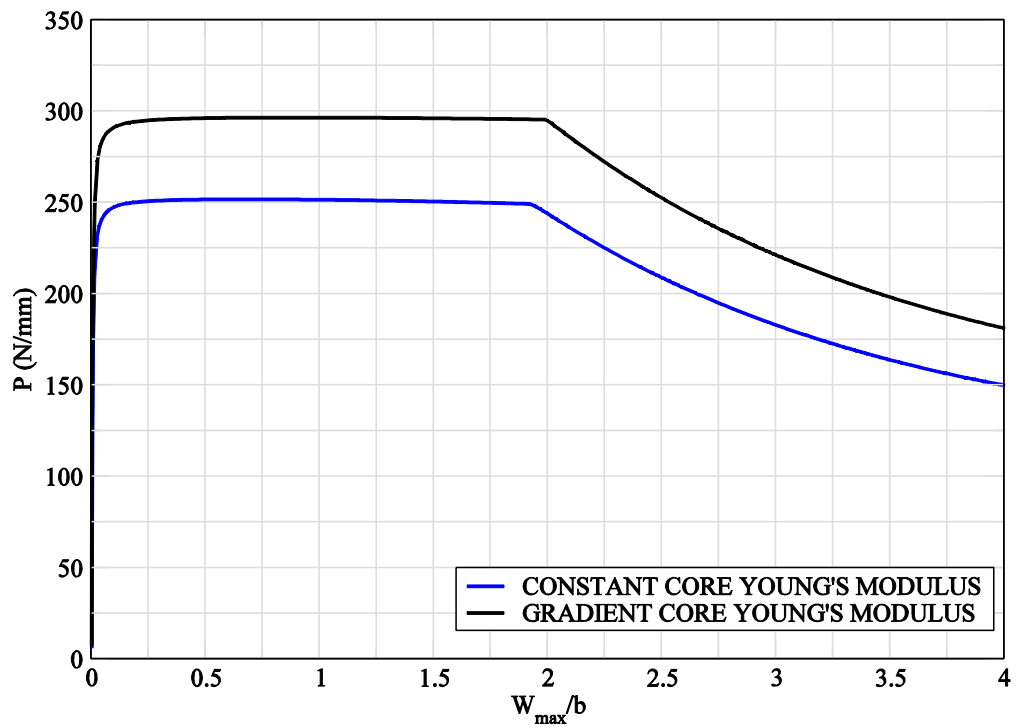
όπου E_0 είναι το μέτρο ελαστικότητας όταν $z = 0$, και a_1, a_2, a_3 και a_4 είναι σταθερές του υλικού, h είναι το πάχος του πυρήνα και z είναι το μέγεθος του κάθε στοιχείου.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δομής που χρησιμοποιήθηκε είναι τα ίδια με αυτά της Δομής 1 (Πίνακας 4-1). Επίσης, οι μηχανικές ιδιότητες για τα εξωτερικά φύλλα είναι ίδια με αυτά της Δομής 1, για το πυρήνα το μέτρο ελαστικότητας καθορίζεται από την εξίσωση 4.3 όπου για μέτρο ελαστικότητας στη θέση $z = 0$ ισούται με 199 N/mm^2 και λόγος Poisson's 0.3. Επιπλέον, πρέπει να αναφέρουμε ότι το υλικό μας βρίσκεται στη γραμμική ελαστική περιοχή και ποτέ δεν θα ξεπεράσει το όριο διαρροής. Στο Σχήμα 4-10 παρουσιάζεται το μέτρο ελαστικότητας πως μεταβάλλεται μέσα στο πυρήνα.

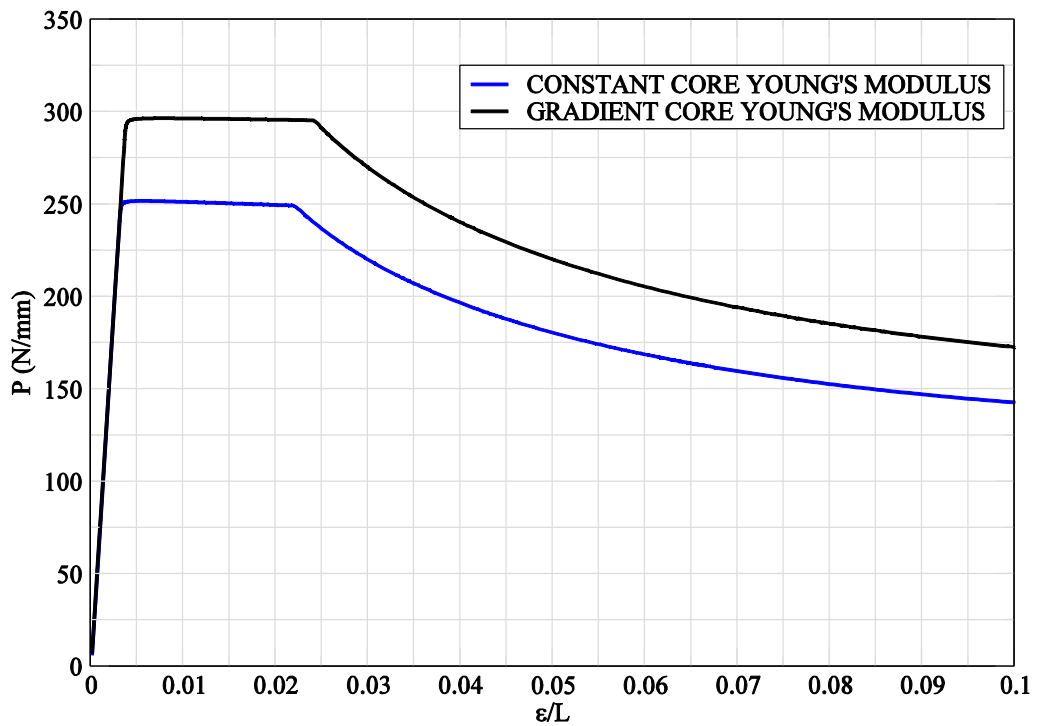


Σχήμα 4-10 Διάγραμμα μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας στο πυρήνα που εξαρτάται από το βάθος Z

(a)



(b)

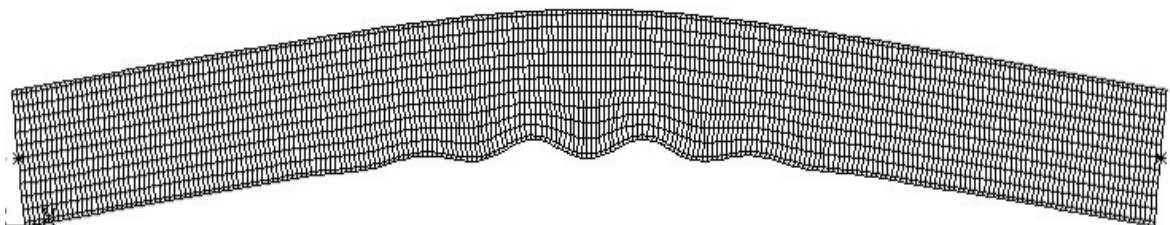


Σχήμα 4-11 Ο δρόμος ισορροπίας για σάντουιτς με διαβαθμισμένης δομής πυρήνα και της Δομής 1:
(a) Διάγραμμα φορτίου – πλευρικής μετατόπισης (b) Διάγραμμα φορτίου – αξονικής μετατόπισης

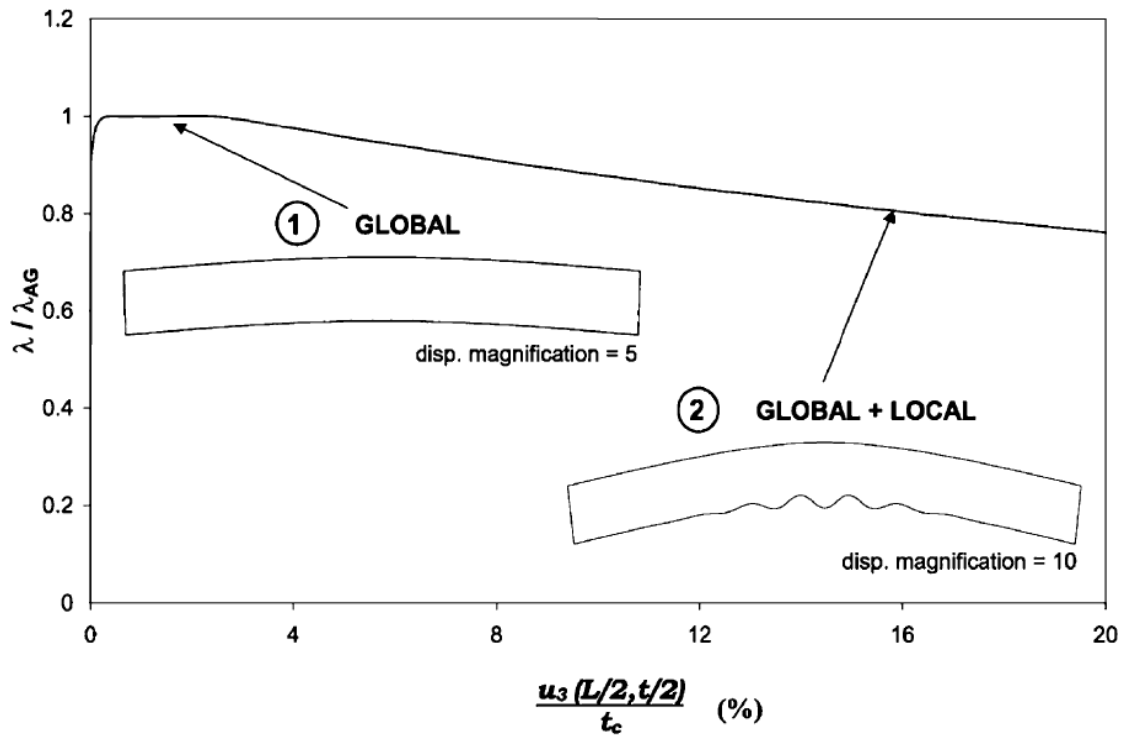
Στο Σχήμα 4-11 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για σάντουιτς με πυρήνα διαβαθμισμένης δομής υλικό καθώς και τα αποτελέσματα της Δομής 1. Η πρώτη παρατήρηση που γίνεται από τα πιο πάνω διαγράμματα είναι η διαφορά που υπάρχει στο κρίσιμο φορτίο, το σάντουιτς με διαβαθμισμένη δομή πυρήνα το κρίσιμο φορτίο είναι μεγαλύτερο από της Δομής 1. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση, ο κύριος δρόμος ισορροπίας (προ-λυγισμικός) έχει την ίδια κλίση (Σχήμα 4-11b) και για τα δύο υλικά, απ' την άλλη ο εντοπισμός της δευτερεύουσας διακλάδωσης που προκαλεί αστάθεια δεν παρατηρήθηκε σημαντική αλλαγή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η δομή σάντουιτς με πυρήνα διαβαθμισμένης δομής να υπερέχει της Δομής 1 γιατί στην περίπτωση ύπαρξης ατελειών το κρίσιμο φορτίο μειώνεται αρκετά και ο εντοπισμός της δεύτερης διακλάδωσης να είναι πολύ κοντά στην πρώτη διακλάδωση. Άρα όσο πιο μεγάλος είναι ο ουδέτερος ευσταθής δρόμος τόσο καλύτερα είναι.

4.4 Μοντέλο Léotoing et al. (2002)

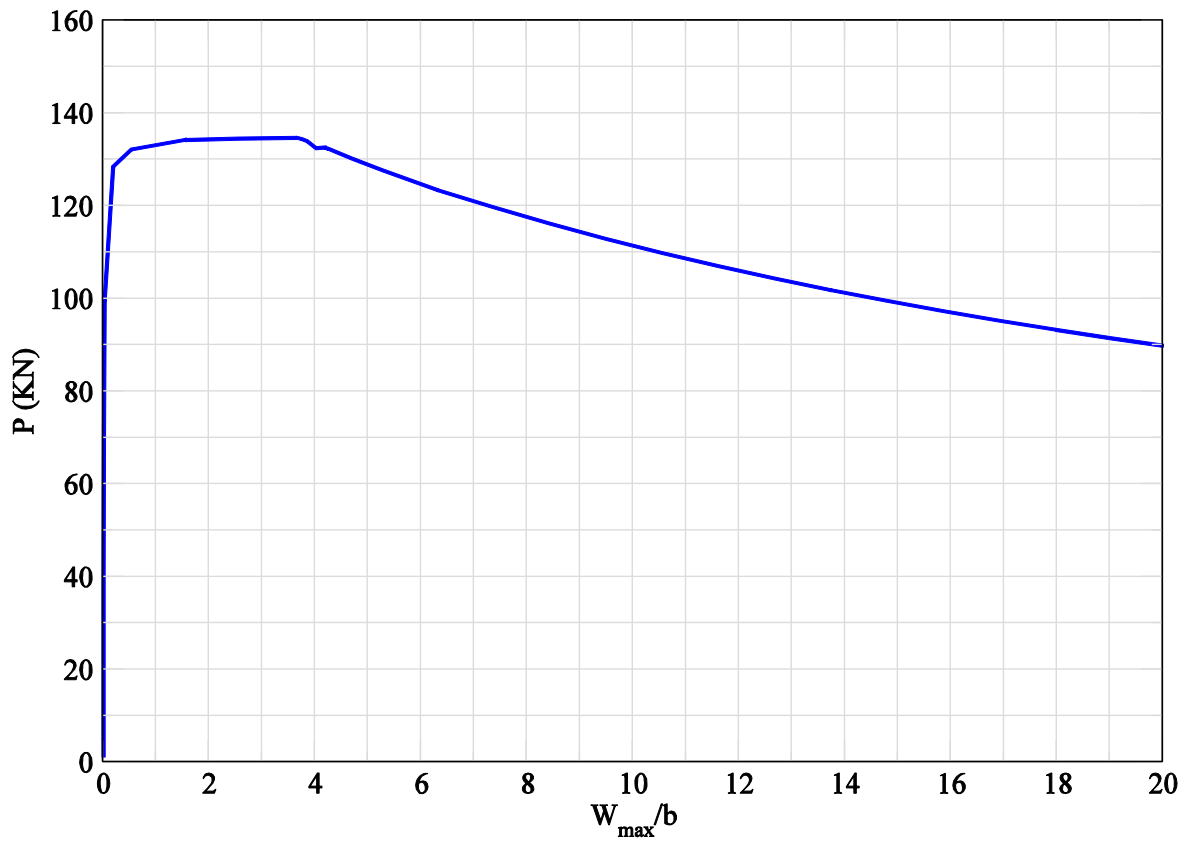
Ο Léotoing et al. (2002) ανέπτυξαν ένα αναλυτικό μοντέλο όπου υπολόγισαν τα κρίσιμα φορτία για τρεις διαφορετικές λυγισμικές μορφές (Eulers type, symmetrical and antisymmetrical wrinkling) δομών σάντουιτς. Χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό πακέτο ABAQUS μελέτησαν τη μετά-λυγισμική συμπεριφορά για διάφορες γεωμετρικές μορφές σάντουιτς. Ωστόσο, από τις διάφορες καταστάσεις που μελέτησαν μόνο μια κατάσταση εμφάνιζε το φαινόμενο αλληλεπίδρασης μορφών λυγισμού, όπου είναι η μελέτη αυτής της εργασίας. Εφαρμόζοντας τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις μηχανικές ιδιότητες (παρουσιάζονται στο πίνακα 4-1 και αφορούν την Δομή 3) αυτής της κατάστασης στο υπολογιστικό πακέτο ANSYS μελετήσαμε τη λυγισμική συμπεριφορά.



Σχήμα 4-12 Στιγμιότυπο Δομής 3 κατά το στάδιο αποφόρτισης



Σχήμα 4-13 Αποτελέσματα Léotoing et al (2002)



Σχήμα 4-14 Δρόμος ισορροπίας Δομής 3: Διάγραμμα φορτίου – πλευρικής μετατόπισης

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Léotoing et al. (2002) και τα αποτελέσματα του μοντέλου που προέκυψαν από το πρόγραμμα ANSYS παρατηρήσαμε ότι υπάρχουν κάποιες διαφορές. Σύμφωνα με το άρθρο το κρίσιμο φορτίο που υπολόγισαν είναι 138,0 KN αντίθετα το αποτέλεσμα που προέκυψε από το πρόγραμμα ANSYS είναι 134,8 KN, δηλαδή υπάρχει διαφορά περίπου 2,3%. Μια άλλη διαφορά παρατηρείται στους δρόμους ισορροπίας, φαίνεται ότι ο μετά-λυγισμικός ουδέτερος ευσταθής δρόμος (Σχήμα 4-13) εντοπίζει τη δεύτερη διακλάδωση πιο γρήγορα σε αντίθεση με τα αποτελέσματα από το ANSYS (Σχήμα 4-14). Οι διαφορές που υπάρχουν μεταξύ των δύο μοντέλων πιθανότατα να οφείλονται κατά κύριο λόγο στον τρόπο επίλυσης τους. Συγκεκριμένα, στο βήμα που εφαρμόστηκε για την επίλυση της μη-γραμμικής ανάλυσης επηρεάζει σημαντικά το αποτέλεσμα. Μια άλλη διαφορά που πιθανό να επηρεάζει το αποτέλεσμα είναι η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της μη-γραμμικής ανάλυσης, ο Léotoing et al. για χρησιμοποίησαν την μέθοδο Riks, αντίθετα χρησιμοποιήσαμε τη Arc-length μέθοδο. Οι δυο αυτές μέθοδοι έχουν την ίδια βασική αρχή αλλά για την επίλυση τους έχουν προταθεί αρκετοί τρόποι. Ωστόσο, τα δύο μοντέλα συμφωνούσαν στο φαινόμενο αλληλεπίδρασης μορφών λυγισμού που είναι υπεύθυνος για τον εντοπισμό του τοπικού – συγκεντρωτικού λυγισμού (Σχήμα 4-12).

5 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ

5.1 Γενικά συμπεράσματα

Οι δομές σάντουιτς βρίσκουν ευρεία εφαρμογή σε πάρα πολλούς κλάδους της μηχανικής όπως στις κατασκευές, στην αεροναυπηγική κ.α., κάτι που οφείλεται στα πλεονεκτήματα που διαθέτουν σε αντίθεση των συμβατικών υλικών. Λόγω όμως της φύσης των υλικών αυτών, τα οποία επιτυγχάνουν αρκετά μεγάλη αντοχή και πολύ καλές μηχανικές ιδιότητες, ο σχεδιασμός οδηγεί σε λεπτότερες κατασκευές. Ωστόσο, υπάρχει πάντα ο κίνδυνος εμφάνισης του φαινομένου του λυγισμού, που μπορεί να αποδειχθεί καταστροφικός.

Έτσι, στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια εκτίμησης της λυγισμικής συμπεριφοράς δομών σάντουιτς εφαρμόζοντας την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Οι υπολογισμοί έγιναν με το υπολογιστικό πακέτο ANSYS για διάφορες δομές σάντουιτς. Αρχικά, έγινε ανάλυση ιδιοτιμών για την εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου και στη συνέχεια εφαρμόζοντας μη-γραμμική ανάλυση μελετήσαμε τη μετά-λυγισμική συμπεριφορά των δομών σάντουιτς. Διαπιστώθηκε ότι η εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή ως προς την επιλογή των παραμέτρων της, όπως ο τύπος του στοιχείου, η πυκνότητα πλέγματος διακριτοποίησης, τύπος ανάλυσης, ακριβείς συνοριακές συνθήκες, φορτίσεις κ.λπ. προκειμένου να οδηγήσει σε ακριβή προσομοίωση του φυσικού προβλήματος και ακολούθως σε ικανοποιητικά αποτελέσματα, με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν μετά από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η εμφάνιση του τοπικού – συγκεντρωτικού λυγισμού που παρατηρείται είναι αποτέλεσμα του φαινομένου αλληλεπίδρασης των μορφών λυγισμού. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι το σημείο όπου εντοπίζεται η δεύτερη διακλάδωση που προκαλεί την αστάθεια, εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της δομής καθώς επίσης και από τα υλικά που χρησιμοποιούνται. Συγκεκριμένα, όταν το υλικό του πυρήνα ήταν διαβαθμισμένης δομής (FGM) παρατηρήθηκε σημαντική αύξηση της τιμής του κρίσιμου φορτίου αλλά όχι σημαντική αλλαγή στο σημείο εντοπισμού της δεύτερης διακλάδωσης.

5.2 Μελλοντικές μελέτες

Κατά τη διάρκεια της εργασίας αυτής έγινε φανερή η πολυπλοκότητα του προβλήματος για τη κατανόηση της λυγισμικής συμπεριφοράς των δομών σάντουιτς. Είναι προφανές πως υπάρχουν μια σειρά επιπλέον θεμάτων που χρήζουν περαιτέρω έρευνα για την επίλυση τους ή την περαιτέρω βελτίωση τους.

Ένα πρόβλημα που χρήζει έρευνα είναι το έξης. Κατά την κάμψη τους οι δομές σάντουιτς αναπτύσσουν μεγάλες διατμητικές δυνάμεις ολίσθησης στην περιοχή του δεσμού μεταξύ των εξωτερικών φύλλων και του πυρήνα. Επομένως, αυτός ο δεσμός πρέπει να είναι αρκετά δυνατός, ώστε να αντέχει αυτές τις δυνάμεις απόσχισης που εμφανίζονται. Αν σπάσει ο δεσμός, τα εξωτερικά φύλλα θα δρουν ανεξάρτητα μεταξύ τους και αυτό έχει ως συνέπεια την μη ορθή λειτουργία της κατασκευής.

Ένα άλλο πρόβλημα είναι χρήση διαβαθμισμένων υλικών (Functionally graded materials) στις δομές σάντουιτς. Στην παρούσα εργασία έγινε μια πρώτη προσπάθεια μελέτης τέτοιων υλικών. Λόγω των χαρακτηριστικών που έχουν αυτά τα υλικά, η ανάπτυξη ενός μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων που θα μπορεί να περιγράψει σωστά την λειτουργία τους είναι αναγκαία.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Allen, H. (1969). *Analysis and design of structural sandwich panels*. Robert Maxwell, MC, MP.
- ANSYS. (2012). “Release 14.0 documentation.”
- Apetre, N. A., Sankar, B. V. and Ambur, D. R. (2006). “Low-velocity impact response of sandwich beams with functional graded core.” *International journal of solids and structures*, 43, 2479–2496.
- Argyris, J. H. (1954). “Energy theorems and structural analysis.” *Aircraft Engineering*.
- Argyris, J. H. and Kelsey, S. (1960). “Energy theorems and structural analysis.” *Butterworths*.
- Avila, F. A. (2007). “Failure mode investigation of sandwich beams with functionally graded core.” *Composite Structures*, 81(3), 323–330.
- Bazant, Z. P. and Luigi, C. (2010). *Stability of structures. Elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore.
- Beals, J. T. and Thompson, M. S. (1997). “Density gradient effects on aluminium foam compression behaviour.” *Journal of Material Science*, 32, 3595–3600.
- Cook, D. R., Malcus, S. D., Plesha, E. M and Witt, J. R. (2002). *Concepts and applications of finite elements analysis*. (I. John Wiley & Sons, ed.), United States.
- Courant, R. (1943). “Variational Methods for the solution of problems of equilibrium and vibration.” *Bulletin of the American Mathematical*, 49, 1–23.
- Crisfield, A. M. (1981). “A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through.” *Computer & Structures*, 13, 55–62.
- Erdogan, M. and Ibrahim, G. (2006). *The finite element method and applications in engineering using ANSYS*. Springer.
- Farchad, M. (1994). *Stability of Structures*. Elsevier Science B. V., Amsterdam.
- Forde, W. R. and Striemer, F. S. (1987). “Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis.” *Computer & Structures*, 27(5), 625–630.

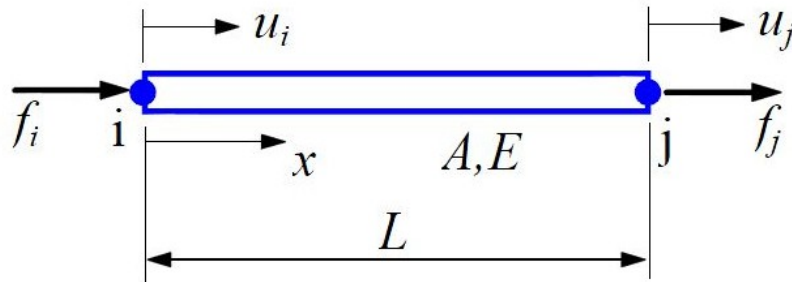
- Gantmacher, F. (1970). *Lectures in analytical mechanics*. MIR Publishers, Moscow.
- Gibson, L. J., Ashby, M. F. and Triantafillou, T. C. (1989). "Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads - I. Modelling." *Int. J. Mech. Sci.*, 31(9), 635–663.
- Green, A. E. and Zerna, W. (1968). *Theoretical elasticity*. (P. Glaredon, ed.), Oxford.
- Hunt, G. W., Da Silva, L. S., and Manzacchi, G. M. E. (1988). "Interactive buckling in sandwich structures." *Proc. R. Soc.*, A 417, 155–177.
- Koiter, W. T. (1945). *A translation of the stability of elastic equilibrium*. English translation Air Force Fl. Dyn. Lab., Tech. Rep. AFFDL - TE - 70 - 25, binary, 1970, Amsterdam.
- Léotoing, L., Drapier, S. and Vautrin, A. (2002). "Nonlinear interaction of geometrical and material properties in sandwich beam instabilities." *International journal of solids and structures*, 39, 3717–3739.
- Longan, D. L. (2007). *A first course in the finite element method*. Wisconsin - Platterille: Thomson.
- Memon, B. and Su, X. (2003). "Arc-length technique for nonlinear finite element analysis." *Journal of zhejiang university science*, 5(5), 618–628.
- Reddy, J. N. (1984). "A simple higher order theory for laminated composite plates." *ASME J. Appl. Mech.*, 51, 745–752.
- Reddy, J. N. (1990). "A general non-linear third-order theory of plates moderate." *Int. J. Non-linear Mech.*, 25(6), 677–686.
- Riks, E. (1979). "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems." *International journal of solids and structures*, 15(7), 529–551.
- Sadd, M. H. (2005). *Elasticity. Theory, applications and numerics*. Elsevier Inc, Oxford.
- Thompson, J. M. T. and Hunt, G. W. (1973). *A general theory of elastic stability*. John Wiley & Sons, London.
- Timoshenko, S. and Goodier, J. N. (1951). *Theory of elasticity*. McGraw - Hill Book Company, Inc, United States.
- Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp, L. J. (1956). "Stiffness and deflection analysis of complex structures." *Journal of aeronautical sciences*, 23(9), 805–825.

- Williams, D., Leggett, D. and Hopkins, H. (1941). "Loads, Flat sandwich panels under compressive and." *Technical Reports, 1987, R.A.E.*
- Yiatros, S. (2010). "Mode interaction and localization in sandwich struts and beam-columns." University of London.
- Yiatros, S., Wadee, M. A. and Theofanous, M. (2010). "Comparative studies of localized buckling in sandwich struts with different core bending models." *International journal of non-linear mechanics*, 45, 111–120.
- Zenkert, D. (1995). *An introduction to sandwich construction*. Engineering Materials Advisory Services Ltd., London.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α (Στοιχεία)

Α.1 Ραβδωτό Στοιχείο (Bar element)

Το ραβδωτό στοιχείο (Σχήμα ΠΑ1) δέχεται μόνο αξονικό φορτίο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να παραμορφώνεται μόνο προς τη μια διεύθυνση. Επομένως έχει μόνο ένα βαθμό ελευθερίας.



Σχήμα ΠΑ 1 Ράβδος υπό την επίδραση αξονικού φορτίου

Η συνάρτηση σχήματος που περιγράφει το ραβδωτό στοιχείο είναι

$$N_i(\xi) = 1 - \xi, \quad N_j(\xi) = \xi \quad (\text{ΠΑ.1})$$

όπου $\xi = \frac{x}{L}$ στο διάστημα $0 \leq \xi \leq 1$

Υποθέτουμε ότι η μετατόπιση u της ράβδου μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Ωστόσο προκύπτει η πιο κάτω συνάρτηση μετατόπισης:

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j \\ \Rightarrow u(\xi) &= N_i(\xi)u_j + N_j(\xi)u_j \end{aligned} \quad (\text{ΠΑ.2})$$

$$\dot{u}$$

$$[u] = [N_i \quad N_j] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}} = \left[\frac{d}{dx} N \right] \{u\} = [B] \{u\} \quad (\text{ΠΑ.3})$$

όπου $[B]$ είναι:

$$[B] = \frac{d}{dx} [N_i(\xi) \quad N_j(\xi)] = \frac{d}{d\xi} [N_i(\xi) \quad N_j(\xi)] \cdot \frac{d\xi}{dx} \quad (\text{ΠΑ.4})$$

Από την εξίσωση ΠΑ.1 και ΠΑ.4 έχουμε

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.5})$$

Ωστόσο με βάση το νόμο του Hook's , μπορούμε να γράψουμε τη τάση:

$$\sigma = E[B]\{u\} \quad (\text{ΠΑ.6})$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε την εσωτερική ενέργεια.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV \quad (\text{ΠΑ.7})$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V [u]^T [B]^T E[B][u] dV = \frac{1}{2} [u]^T \left[\int_V [B]^T E[B] dV \right] [u] \quad (\text{ΠΑ.8})$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια Π του συστήματος είναι το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας U των εσωτερικών δυνάμεων του συστήματος και της δυναμικής ενέργειας V των εξωτερικών δυνάμεων.

$$\Pi = U + V \quad (\text{ΠΑ.9})$$

Η συνολική δυναμική ενέργεια ισούται με το έργο W . Όπου έργο είναι η ενέργεια που εφαρμόζεται για να παραμορφωθεί ένα σώμα.

$$U = W \quad (\text{ΠΑ.10})$$

$$W = \frac{1}{2} f_i u_i + \frac{1}{2} f_j u_j = \frac{1}{2} [u]^T \{f\} \quad (\text{ΠΑ.11})$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ΠΑ.10 τις εξισώσεις ΠΑ.8 και ΠΑ.9 έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [u]^T \left[\int_V [B]^T E[B] dV \right] [u] &= \frac{1}{2} [u]^T \{f\} \\ \Rightarrow [f] &= \left[\int_V [B]^T E[B] dV \right] [u] \end{aligned} \quad (\text{ΠΑ.12})$$

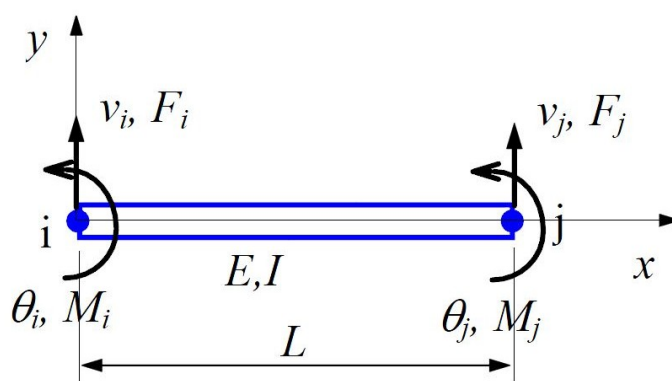
Από την εξίσωση ΠΑ.11 προκύπτει ότι το μητρώο δυσκαμψίας ισούται με

$$[k] = \int_V [B]^T E [B] dV \quad (\text{ΠΑ.13})$$

$$[f] = [k] \{u\} \quad (\text{ΠΑ.14})$$

A.2 Στοιχείο Δοκού (Beam element)

Στο γραμμικό στοιχείο δοκού (Σχήμα ΠΑ2) εκτός από τις μετατοπίσεις λαμβάνουν χώρα και περιστροφές. Άρα το στοιχείο δοκού έχει δυο βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα ΠΑ 2 Τυπική δοκός

Πρώτου, υπολογισθεί το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου δοκού πρέπει να υποθέσουμε μια συνάρτηση μετατοπίσεων η οποία θα χαρακτηρίζει κατά το δυνατόν την πραγματική παραμόρφωση του στοιχείου. Επομένως, θεωρούμε ότι η συνάρτηση μετατόπισης θα έχει πολωνομική μορφή και ορίζεται ως

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (\text{ΠΑ.15})$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.16})$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση ΠΑ.15 παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση που περιγράφει την στροφή του μέλους

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (\text{ΠΑ.17})$$

Οι σταθερές a_1, a_2, a_3, a_4 (γενικές συντεταγμένες) συνδέονται με τις επικόμβιες μετατοπίσεις μέσω των συνοριακών συνθηκών του στοιχείου

$$\begin{aligned} v(0) = v_1, \quad \frac{dv}{dx} = \theta(0) = \theta_1 \quad \text{όταν } x = 0 \\ v(L) = v_2, \quad \frac{dv}{dx} = \theta(L) = \theta_2 \quad \text{όταν } x = L \end{aligned} \quad (\text{ΠΑ.18})$$

Αντικαθιστώντας, τις συνοριακές συνθήκες ΠΑ.18 στις εξισώσεις ΠΑ.16 και ΠΑ.17 καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων. Επιλύοντας το γραμμικό σύστημα υπολογίζουμε τις σταθερές a_1, a_2, a_3, a_4 . Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (2.5) παίρνουμε τις εξισώσεις σχήματος

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{1}{L^3}(2x^3 - 3x^2L + L^3) \\ N_2(x) &= \frac{1}{L^2}(x^3 - 2x^2L + xL^2) \\ N_3(x) &= \frac{1}{L^3}(-2x^3 + 3x^2L) \\ N_4(x) &= \frac{1}{L^2}(x^3 - x^2L) \end{aligned} \quad (\text{ΠΑ.19})$$

Γνωρίζουμε ότι η καμπυλότητα σε μια δοκό περιγράφεται από την εξίσωση:

$$k = \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}[N]\{u\} = [B]\{u\} \quad (\text{ΠΑ.20})$$

από την εξίσωση ΠΑ.19 και ΠΑ.20 υπολογίζουμε το μητρώο $[B]$

$$\begin{aligned} [B] &= \begin{bmatrix} \frac{d^2N_1}{dx^2} & \frac{d^2N_2}{dx^2} & \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow [B] &= \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} & -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{ΠΑ.21})$$

Εφαρμόζοντας την αρχή των δυνατών έργων που περιγράφεται πιο πάνω καταλήγουμε στο ότι το μητρώο δυσκαμψίας για στοιχείο δοκού είναι

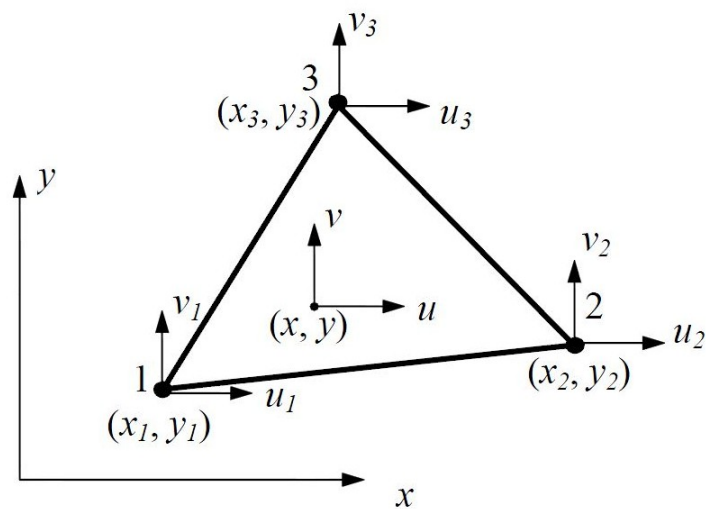
$$[k] = \int_0^L [B]^T EI [B] dx \quad (\text{ΠΑ.22})$$

Τέλος, επιλύοντας το ολοκλήρωμα ΠΑ.22 καταλήγουμε στο μητρώο δυσκαμψίας για τη δοκό

$$[k] = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.23})$$

Α.3 Τριγωνικό Στοιχείο Σταθερών Παραμορφώσεων

Το τριγωνικό στοιχείο είναι το απλούστερο στοιχείο (Σχήμα ΠΑ3). Έχει τρεις κόμβους στις κορυφές του και δύο βαθμούς ελευθερίας (u, v) ανά κόμβο. Συνολικά το στοιχείο έχει 6 βαθμούς ελευθερίας. Άρα το πολυώνυμο θα πρέπει να έχει 6 όρους.



Σχήμα ΠΑ 3 Τριγωνικό στοιχείο σταθερών παραμορφώσεων

Το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων είναι

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.24})$$

Επειδή το στοιχείο έχει έξι βαθμούς ελευθερίας επιλέγεται πολυώνυμο με έξι ανεξάρτητους συντελεστές. Επίσης, θεωρούμε ότι οι μετακινήσεις μεταβάλλονται γραμμικά. Άρα οι μετακινήσεις σε τυχόν σημείο δίνονται από τις σχέσεις

$$u = a_1 + a_2x + a_3y \quad (\text{ΠΑ.25})$$

$$v = a_4 + a_5x + a_6y \quad (\text{ΠΑ.26})$$

Οι εξισώσεις ΠΑ.25 και ΠΑ.26 μπορούν να γραφτούν

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ a_4 + a_5x + a_6y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.27})$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ΠΑ.27 τις συντεταγμένες κάθε κόμβου, λαμβάνουμε εξισώσεις οι οποίες επιλύονται ως προς τους άγνωστους συντελεστές a . Επομένως έχουμε

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.28})$$

ή στη συμπυκνωμένη μορφή

$$\{u\} = [X]\{a\} \quad (\text{ΠΑ.29})$$

Τώρα, οι άγνωστοι πολυωνυμικοί συντελεστές a μπορούν να προσδιορισθούν πολύ εύκολα με αντιστροφή του πίνακα $[X]$

$$\{a\} = [X]^{-1}\{d\} \quad (\text{ΠΑ.30})$$

όπου το μητρώο $[X]^{-1}$ ορίζεται ως

$$[X]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & x_3y_1 - x_1y_3 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.31})$$

και η ορίζουσα $2A$ του μητρώου είναι

$$2A = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \quad (\text{ΠΑ.32})$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ΠΑ.27 και αντικαθιστώντας σε αυτή την εξίσωση ΠΑ.30 καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\{u\} = [N]\{d\} \quad (\text{ΠΑ.33})$$

Από τη θεωρία της ελαστικότητας γνωρίζουμε ότι οι παραμορφώσεις στο εσωτερικό του στοιχείου είναι οι παραγωγήση των μετατοπίσεων. Το στοιχείο στις δυο διαστάσεις έχει τρεις συνιστώσες παραμορφώσεων και στο διάνυσμα του ορίζεται ως

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} \quad (\text{ΠΑ.34})$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση ΠΑ.33 στην ΠΑ.34 καταλήγουμε στην εξίσωση (2.16) που δείξαμε με την Αρχή των Δυνατών Έργων που είναι

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (\text{ΠΑ.35})$$

όπου $[B] = [\partial][N]$ που επιλύοντας βρίσκουμε ότι

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.36})$$

Από την Αρχή των Δυνατών Έργων δείξαμε ότι το μητρώο δυσκαμψίας ορίζεται

$$[K] = \int_V \{B\}^T [D] \{B\} dV \quad (\text{ΠΑ.37})$$

προσαρμόζοντας την εξίσωση ΠΑ.37 για τις δυο διαστάσεις έχουμε

$$[K] = tA \{B\}^T [D] \{B\} \quad (\text{ΠΑ.38})$$

όπου t ορίζεται το πάχος του στοιχείου, A το εμβαδό του στοιχείου που υπολογίσαμε πιο πάνω και $[D]$ μητρώο που εμπεριέχει τις ελαστικές σταθερές του σώματος. Το μητρώο $[D]$ ορίζεται ως

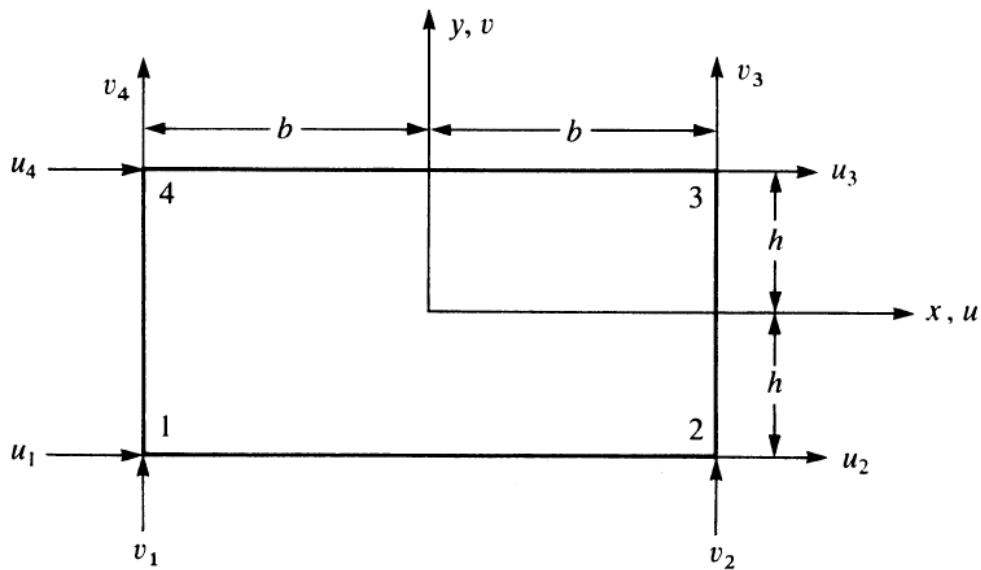
$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.39})$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού και ν ο λόγος Poissons.

Με απλούς πολλαπλασιασμούς των μητρώων παίρνουμε το μητρώο δυσκαμψίας $[K] = tA\{B\}^T [D]\{B\}$ για το τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης.

A.4 Ορθογωνικό στοιχείο

Ορθογωνικό στοιχείο (σχήμα ΠΑ4) τεσσάρων κόμβων. Κάθε κόμβος έχει δυο βαθμούς ελευθερίας στις διευθύνσεις U_x και U_y . Το στοιχείο αυτό συνολικά έχει οχτώ βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα ΠΑ 4 Ορθογωνικό στοιχείο επίπεδης έντασης και παραμόρφωση τεσσάρων κόμβων

Οι πολωνυμικές σχέσεις που ορίζουν τις μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του στοιχείου αυτού έχουν τη μορφή:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (\text{ΠΑ.40})$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (\text{ΠΑ.41})$$

σε μητρική μορφή

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.42})$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ΠΑ.42 τις συντεταγμένες για κάθε κόμβο προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b & -h & bh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b & -h & bh \\ 1 & b & -h & -bh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & -h & -bh \\ 1 & b & h & bh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & h & bh \\ 1 & -b & h & -bh & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b & h & -bh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.43})$$

Λύνοντας ως $\{a\}$ προκύπτει

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4bh} \begin{bmatrix} bh & 0 & bh & 0 & bh & 0 & bh & 0 \\ -h & 0 & h & 0 & h & 0 & -h & 0 \\ -b & 0 & -b & 0 & b & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & bh & 0 & bh & 0 & b & 0 & bh \\ 0 & -h & 0 & h & 0 & h & 0 & -h \\ 0 & -b & 0 & -b & 0 & b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.44})$$

διαφορετικά η ΠΑ.44 μπορεί να γραφεί ως $\{a\} = [A]^{-1} \{d\}$

Αντικαθιστώντας την ΠΑ.44 στην ΠΑ.42 παίρνουμε

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} [A]^{-1} \{d\} \quad (\text{ΠΑ.45})$$

ή

$$\{u\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{d\} \quad \text{ή} \quad \{u\} = [N] \{d\} \quad (\text{ΠΑ.46})$$

Εκτελώντας τις πράξεις στην ΠΑ.45 προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος για το ορθογωνικό στοιχείο:

$$N_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (\text{ΠΑ.47})$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (\text{ΠΑ.48})$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{b}\right) \left(1 + \frac{y}{h}\right) \quad (\text{ΠΑ.49})$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(1 + \frac{y}{h}\right) \quad (\text{ΠΑ.50})$$

Το πεδίο των παραμορφώσεων για το ορθογωνικό στοιχείο ορίζεται ως εξής:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [B] \{d\} \quad (\text{ΠΑ.51})$$

όπου

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.52})$$

όπου τώρα τα στοιχεία του μητρώου παραμορφώσεως δύνονται

$$[B] = \frac{1}{4bh} \begin{bmatrix} y-h & 0 & -y+h & 0 & y+h & 0 & -y-h & 0 \\ 0 & x-b & 0 & -x-b & 0 & x+b & 0 & -x+b \\ x-b & y-h & -x-b & -y+h & x+b & y+h & -x+b & -y-h \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.53})$$

Το μητρώο δυσκαμψίας του ορθογωνικού στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$[K] = \int_{8 \times 8} [B]^T [D] [B] dV \quad (\text{ΠΑ.54})$$

$\begin{matrix} \nu & 8 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 8 \end{matrix}$

διαφορετικά μπορεί να είναι

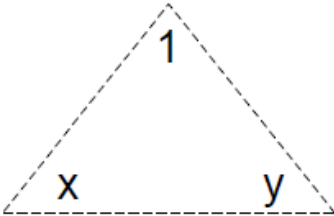
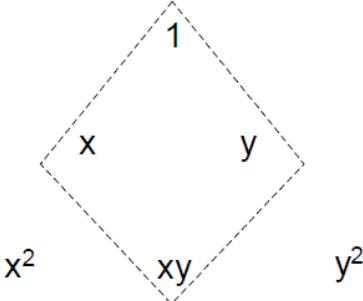
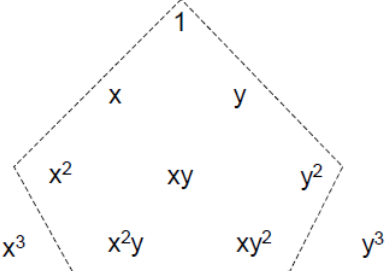
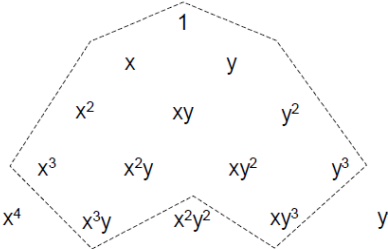
$$[K] = t \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (\text{ΠΑ.55})$$

όπου t το πάχος του στοιχείου, $[D]$ το μητρώο ελαστικότητας σε συνθήκες επίπεδης έντασης και ορίζεται

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΑ.56})$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β (Πολυώνυμα Παρεμβολής με τη Βοήθεια του Τριγώνου του Pascal)

Πίνακα ΠΒ 1 Πολυώνυμα Παρεμβολής

Τύπος Στοιχείου	Τρίγωνο Pascal	Συμπεριφορά
<p>Τριγωνικό Στοιχείο 3 κόμβοι 2 βαθμοί ελευθερίας σε κάθε κόμβο i, συνολικά 6 βαθμοί ελευθερίας</p>		<p>Γραμμική μεταβολή των μετατοπίσεων και κατά μήκος των πλευρών του στοιχείου σταθερή παραμόρφωση</p>
<p>Ορθογωνικό στοιχείο 4 κόμβοι 2 βαθμοί ελευθερίας σε κάθε κόμβο i, συνολικά 8 βαθμοί ελευθερίας</p>		<p>Γραμμική συμπεριφορά των μεταβολών κατά μήκος των πλευρών του στοιχείου.</p>
<p>Ορθογωνικό στοιχείο 8 κόμβοι 2 βαθμοί ελευθερίας σε κάθε κόμβο i συνολικά 16 βαθμοί ελευθερίας</p>		<p>2^{ου} βαθμού παραβολική μεταβολή των μετατοπίσεων κατά μήκος των πλευρών.</p>
<p>Ορθογωνικό στοιχείο λεπτής πλάκας 4 κόμβοι 3 βαθμοί ελευθερίας σε κάθε κόμβο i, συνολικά 12 βαθμοί ελευθερίας.</p>		<p>3^{ου} βαθμού παραβολική μεταβολή των μετατοπίσεων κατά μήκος των πλευρών.</p>

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ (Μέθοδος Arc-Length)

Η μέθοδος Arc-Length είναι μια επαναληπτική μέθοδος και χρησιμοποιείται για την επίλυση μη-γραμμικών προβλημάτων. Αυτή η μέθοδος προέρχεται από παραλλαγές άλλων μεθόδων (Crisfield 1981; Riks 1979). Ο γενικός σκοπός όλων των μεθόδων Arc-Length που έχουν προταθεί μέχρι σήμερα είναι ο έλεγχος της επανάληψης για την επίλυση πολύπλοκων μη γραμμικών προβλημάτων. Η Arc-Length μέθοδος έχει εφαρμογή στην ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία για τον εντοπισμών των πολύπλοκων διαδρομών του φορτίου και μετατόπισης στη μετά-κρίσιμη περιοχή (post-critical range) (Forde, W. R. and Striemer 1987).

Η εξίσωση ισορροπία ενός μη γραμμικού συστήματος γράφεται:

$$\mathbf{g}_i(\lambda_i) = \mathbf{F}_i(\mathbf{u}) - \lambda_i \mathbf{q} = 0 \quad (\text{ΠΓ.1})$$

όπου \mathbf{F}_i το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων που είναι μη-γραμμική συνάρτηση των μετατοπίσεων, \mathbf{q} το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων και λ_i είναι σταθερά και καλείται συντελεστής φορτίου. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση ΠΓ.1 στη θέση \mathbf{u}_0 είναι σε ισορροπία, επομένως έχουμε

$$\mathbf{g}_0(\lambda_0) = \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_0) - \lambda_0 \mathbf{q} = 0 \quad (\text{ΠΓ.2})$$

Θεωρούμαι μια αύξηση των μετατοπίσεων $\Delta \mathbf{u}$ και του φορτίου $\Delta \lambda$ τέτοια έτσι ώστε να υπάρχει ισορροπία. Η εξίσωση ΠΓ.2 τώρα γράφεται ως

$$\mathbf{g}_i(\lambda_0 + \Delta \lambda) = \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}) - (\lambda_0 + \Delta \lambda) \mathbf{q} = 0 \quad (\text{ΠΓ.3})$$

αν ισχύει η εξίσωση ΠΓ.3, τότε υπάρχει ισορροπία, διαφορετικά γίνεται διόρθωση στις μετατοπίσεις και στο φορτίο έτσι ώστε η νέα θέση να ισορροπεί.

$$\mathbf{g}_i(\lambda_0 + \Delta \lambda + \delta \lambda) = \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - (\lambda_0 + \Delta \lambda + \delta \lambda) \mathbf{q} = 0 \quad (\text{ΠΓ.4})$$

Γραμμικοποιώντας την πιο πάνω εξίσωση ΠΓ.4 καταλήγουμε

$$\mathbf{g}_i(\lambda_0 + \Delta\lambda + \delta\lambda) = \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}} - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\mathbf{q} - \delta\lambda\mathbf{q} = 0 \quad (\text{ΠΓ.5})$$

όπου $\left. \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}}$ καλείται εφαπτομενικό μητρώο δισκαμψίας και συμβολίζεται ως $[K_T]$.

Παρατηρείται ότι η εξίσωση ΠΓ.5 η άγνωστη είναι περισσότερη από τις εξισώσεις. Επομένως για τον προσδιορισμό των επιπλέον αγνώστων, θεωρούμε ένα επιπλέον περιορισμό που αντιπροσωπεύει την ακτίνα του μήκους τόξου.

$$(\Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u})^T (\Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) + (\Delta\lambda + \delta\lambda)^2 \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} = \Delta l^2 \quad (\text{ΠΓ.6})$$

όπου, Δl είναι το μήκος της ακτίνας του μήκους τόξου και ψ είναι μια παράμετρος που αφορά τον όρο του φορτίου.

Μετά από απλοποιήσεις τις εξισώσεις ΠΓ.5 και ΠΓ.6 καταλήγουμε στην πιο κάτω εξίσωση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα για τον υπολογισμό της αλλαγής του διανύσματος μετατόπισης και του φορτίου.

$$\begin{bmatrix} [K_T] & -q \\ 2\Delta\mathbf{u}^T & 2\Delta\lambda\psi^2\mathbf{q}^T\mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ a \end{Bmatrix} \quad (\text{ΠΓ.7})$$

όπου

$$a = \Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u} + \Delta\lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} - \Delta l^2 \quad (\text{ΠΓ.8})$$

Το σύστημα των εξισώσεων (ΠΓ.6) μπορεί να επιλυθεί και να πάρουμε τις τιμές του $\delta\mathbf{u}$ και $\delta\lambda$. Η λύση της μεθόδου της μεθόδου της Arc-length αποσκοπεί στο να βρει την τομή του δρόμου ισορροπίας με μια σφαίρα ακτίνας Δl (Σχήμα Π1).

Μια εναλλακτική επίλυση του προβλήματος για τον υπολογισμό των μεταβλητών είναι η εξής

$$[K_T]\delta\mathbf{u} = -\{\mathbf{F}_i(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\mathbf{q}\} + \delta\lambda\mathbf{q} \quad (\text{ΠΓ.9})$$

Επομένως

$$\delta\mathbf{u} = \delta\bar{\mathbf{u}} + \delta\lambda\delta\mathbf{u}_t \quad (\text{ΠΓ.10})$$

όπου

$$\delta\bar{\mathbf{u}} = -[K_T]^{-1}\{\mathbf{F}_i(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\mathbf{q}\} \quad (\text{ΠΓ.11})$$

$$\delta\mathbf{u}_t = -[K_T]^{-1}\mathbf{q} \quad (\text{ΠΓ.12})$$

Στην εξίσωση ΠΓ.5 αντικαθιστούμε την εξίσωση ΠΓ.9

$$(\Delta\mathbf{u} + \delta\bar{\mathbf{u}} + \delta\lambda\delta\mathbf{u}_t)^T (\Delta\mathbf{u} + \delta\bar{\mathbf{u}} + \delta\lambda\delta\mathbf{u}_t) + (\Delta\lambda + \delta\lambda)^2 \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} = \Delta l^2 \quad (\text{ΠΓ.13})$$

τώρα από την πιο πάνω εξίσωση ΠΓ.12 καταλήγουμε σε μια εξίσωση ως προς το $\delta\lambda$

$$a_1 (\delta\lambda)^2 + a_2 (\delta\lambda) + a_3 = 0 \quad (\text{ΠΓ.14})$$

όπου a_1 , a_2 και a_3 συντελεστές

$$a_1 = \delta\mathbf{u}_t^T \delta\mathbf{u}_t + \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} \quad (\text{ΠΓ.15})$$

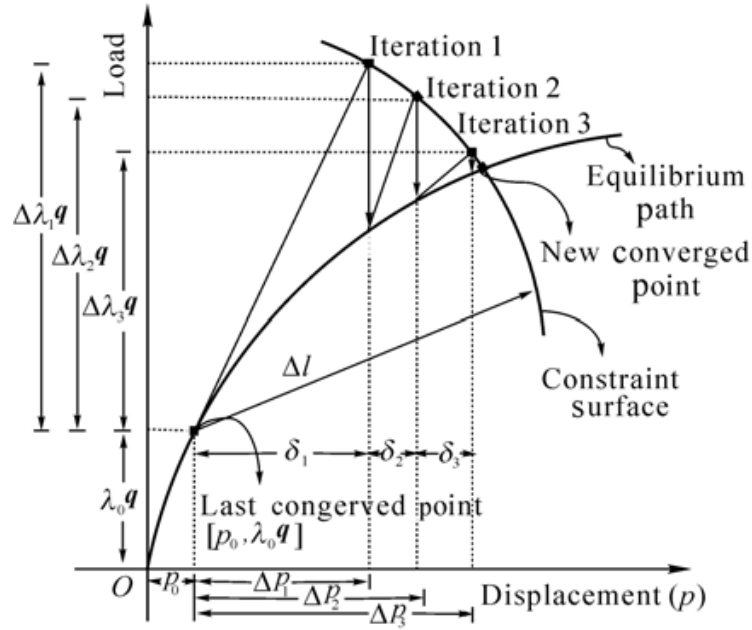
$$a_2 = 2(\Delta\mathbf{u} + \delta\bar{\mathbf{u}})^T \delta\mathbf{u}_t + 2\Delta\lambda\psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} \quad (\text{ΠΓ.16})$$

$$a_3 = (\Delta\mathbf{u} + \delta\bar{\mathbf{u}})^T (\Delta\mathbf{u} + \delta\bar{\mathbf{u}}) + \Delta\lambda^2 \psi^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} - \Delta l^2 \quad (\text{ΠΓ.17})$$

επιλύοντας την εξίσωση ΠΓ.13 παίρνουμε δυο λύσης $\delta\lambda_1$ και $\delta\lambda_2$. Η επιλογή του $\delta\lambda$ γίνεται από την εξίσωση

$$\Delta\mathbf{u}^T (\Delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) + \psi^2 \Delta\lambda (\Delta\lambda + \delta\lambda) \mathbf{q}^T \mathbf{q} \quad (\text{ΠΓ.18})$$

επιλέγεται το $\delta\lambda$ που δίνει την μεγαλύτερη τιμή στην εξίσωση ΠΓ.17.



Σχήμα ΠΓ1 Σχηματική Παράσταση της μεθόδου Arc-Length (Memon, B. and Su 2003)

Σημαντικό στοιχείο της μεθόδου είναι η αρχική πρόβλεψη που πρέπει να γίνει. Επομένως, υποθέτουμε ότι στη θέση $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ το $\Delta\lambda = 0$ και $\psi^2 = 1$. Η εξίσωση ΠΓ.11 και ΠΓ.11 τώρα είναι

$$\delta\bar{\mathbf{u}} = -[K_T]^{-1} \{ \mathbf{F}_i(\mathbf{u}_0) - \lambda_0 \mathbf{q} \} \quad (\text{ΠΓ.19})$$

Από τις εξισώσεις ΠΓ.15 – ΠΓ.17 οι συντελεστές a_1 , a_2 και a_3 γίνονται

$$a_1 = \delta\mathbf{u}_i^T \delta\mathbf{u}_i + \mathbf{q}^T \mathbf{q} \quad (\text{ΠΓ.20})$$

$$a_2 = 0 \quad (\text{ΠΓ.21})$$

$$a_3 = -\Delta l^2 \quad (\text{ΠΓ.22})$$

οπότε η δευτεροβάθμια εξίσωση

$$a_1 (\delta\lambda)^2 + a_2 (\delta\lambda) + a_3 = 0 \quad (\text{ΠΓ.23})$$

Επιλύοντας την γίνεται

$$\delta\lambda^2 (\mathbf{q}^T \mathbf{q}) = \Delta l^2 \quad (\text{ΠΓ.24})$$

Από την εξίσωση ΠΓ.24 έχουμε δυο λύσεις

$$\delta\lambda = \pm \frac{\Delta l}{(\mathbf{q}^T \mathbf{q})} \quad (\text{ΠΓ.25})$$

και επομένως

$$\Delta\lambda = \delta\lambda \quad (\text{ΠΓ.26})$$

$$\Delta\mathbf{u} = \delta\lambda \delta\mathbf{u}_t + \delta\bar{\mathbf{u}} = \delta\lambda \delta\mathbf{u}_t \quad (\text{ΠΓ.27})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u} \quad (\text{ΠΓ.28})$$

Από τις εξισώσεις ΠΓ.26 – ΠΓ.28 ελέγχουμε την πιο κάτω εξίσωση αν ικανοποιείται η ισορροπία

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) - (\lambda_0 + \Delta\lambda)\mathbf{q} = 0 \quad (\text{ΠΓ.29})$$

αν δεν ικανοποιείται η εξίσωση ΠΓ.29 τότε επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι η εξίσωση ΠΓ.29 να ικανοποιείται.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ (Κώδικας ANSYS)

Στο παράρτημα αυτό δίνεται ο κώδικας ANSYS που χρησιμοποιήθηκε για την μελέτη της λυγισμικής συμπεριφοράς των σάντουιτς πάνελ (Sandwich panel). Ο πιο κάτω κώδικας χωρίζεται σε τρία μέρη:

Προ-επεξεργασία (Pre-processing): Περιλαμβάνει την προετοιμασία των δεδομένων, όπως τη γεωμετρία, το είδος του στοιχείου, τη διακριτοποίηση, της συνοριακές συνθήκες και τις ιδιότητες των υλικών.

Επεξεργασία (Processing): Περιλαμβάνει το είδος της ανάλυσης και την επίλυση των εξισώσεων, που οδηγούν στον υπολογισμό των κομβικών μεταβλητών.

Μετά-επεξεργασία (Post-processing): Ασχολείται με την ανάλυση και παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

```
!@ =====
!@ --- Header ---
!@ =====

!! FILENAME: sandwich_panel_new4.inp
!! CREATION DATE: Fri Mar 08 10:34:38 2013
!! ANSYS VERSION: 145
!! DESCRIPTION:

FINISH ! THESE TWO COMMANDS CLEAR CURRENT DATA
/CLEAR !
/FILNAME, sandwichpanel
/TITLE, SANDWICH PANEL (L=100mm, b=5.1mm, t=0.51mm )

!@ =====
!@ --- Data input ---
!@ =====

!@ GEOMETRY
!@ -----
t=0.51 ! FACE PLATE THICKNESS (mm)
b=4.59 ! CORE THICKNESS (mm)
L=100 ! LENGTH (mm)

!@ MATERIAL PROPERTY
!@ -----
EXX1=68950.0 ! YOUNG'S MODULUS OF THE FACE PLATES (N/mm^2)
PRXY1=0.3 ! POISSON RATIO
EXX2=199.0 ! YOUNG'S MODULUS OF THE CORE (N/mm^2)
PRXY2=0.2 ! POISSON RATIO

!@ SPECIFIES THE DIVISIONS ON UNMESHED LINES
!@ -----
! ** HORIZONTAL LINES
```

```

HLS=0.5      ! HLS -> HORIZONTAL LINE SIZE
! ** VERTICAL LINES
VLSFP=0.125 ! *Face plates ! VLSFP -> VERTICAL LINE SIZE FACE PLATE
VLSC=0.5    ! *Core ! VLSC -> VERTICAL LINE SIZE CORE

!@ OPTIONS
!@ -----
ITYPE=0     ! ITYPE=0 -> CONSTANT YOUNG'S MODULUS
            ! ITYPE=1 -> GRADIENT YOUNG'S MODULUS
IOPT=1      ! IOPT=0 -> EIGENVALUE BUCKLING ANALYSIS
            ! IOPT=1 -> NON-LINEAR BUCKLING ANALYSIS
IETOPT=0    ! IETOPT=0 -> NO UNIFORM REDUCED INTEGRATION WITH HOURGLASS CONTROL
            ! IETOPT=1 -> UNIFORM REDUCED INTEGRATION WITH HOURGLASS CONTROL

!@ EIGENVALUE BUCKLING ANALYSIS
!@ -----
NNMODE=1    ! NUMBER OF EIGENMODE

!@ NON-LINEAR BUCKLING ANALYSIS
!@ -----
NSBSTP=40   ! NUMBER OF SUBSTEPS TO BE USED (TIME STEP SIZE)
TERVAL=21   ! MAXIMUM DESIRED DISPLACEMENT (UY). CONTROLS TERMINATION
            ! OF THE SOLUTION WHEN THE ARC-LENGTH METHOD IS USED

!@@@
!@ ***** END DATA INPUT *****
!@@@

!@ =====
!@ --- Preprocessing ---
!@ =====
/PREP7
!! .....
!@@@ - Geometry -
!! .....
!@
!@          9o-----o10
!@   t L12|                A4                |L13
!@   - 7o-----o8
!@   |   |                L4                |
!@   | L10|                A3                |L11
!@   |   |                L3                |
!@   b 5o-----o6
!@   |   |
!@   | L8|                A2                |L9
!@   |   |                L2                |
!@   - 3o-----o4
!@   t L6|                A1                |L7
!@   -  o-----o
!@       1                L1                2
!@
!@          <-----L/2----->
!@
! CREATE KEYPOINTS
K,1,0,0,0
K,2,L/2,0,0
K,3,0,t,0,0
K,4,L/2,t,0
K,5,0,t+b/2,0
K,6,L/2,t+b/2,0
K,7,0,t+b,0
K,8,L/2,t+b,0
K,9,0,2*t+b,0

```



```

K,10,L/2,2*t+b,0
! CREATE LINES
! **HORIZONTAL LINES
L,1,2 ! LINE 1
L,3,4 ! LINE 2
L,5,6 ! LINE 3
L,7,8 ! LINE 4
L,9,10 ! LINE 5
! **VERTICAL LINES
L,1,3 ! LINE 6
L,2,4 ! LINE 7
L,3,5 ! LINE 8
L,4,6 ! LINE 9
L,5,7 ! LINE 10
L,6,8 ! LINE 11
L,7,9 ! LINE 12
L,8,10 ! LINE 13
! CREATE AREAS
AL,1,7,2,6 ! AREA 1 - FACE PLATE
AL,2,9,3,8 ! AREA 2 - CORE
AL,3,11,4,10 ! AREA 3 - CORE
AL,4,13,5,12 ! AREA 4 - FACE PLATE

!! .....
!@@@ - Materials Propertys -
!! .....
MP,EX,1,EXX1 ! YOUNG'S MODULUS OF THE FACE PLATES
MP,PRXY,1,PRXY1 ! POISSON'S RATIO OF THE FACE PLATES
MP,EX,2,EXX2 ! YOUNG'S MODULUS OF THE CORE
MP,PRXY,2,PRXY2 ! POISSON'S RATIO OF THE CORE

!! .....
!@@@ - Element Types -
!! .....
ET,1,PLANE182
*IF,IETOPT,EQ,1,THEN
    KEYOPT,1,1,3 ! UNIFORM REDUCED INTEGRATION WITH HOURGLASS CONTROL
*ENDIF
KEYOPT,1,3,2 ! PLANE STRAINE (Z STRAIN=0.0)

ET,2,21
KEYOPT,2,3,3 ! DEGREE OF FREEDOM UX,UY AND ROTZ
R,2,1E-10

!! .....
!@@@ - Meshing -
!! .....
! HORIZONTAL LINES
LESIZE,1,HLS ! FACE PLATE
LESIZE,2,HLS ! FACE PLATE AND CORE
LESIZE,3,HLS ! CORE
LESIZE,4,HLS ! FACE PLATE AND CORE
LESIZE,5,HLS ! FACE PLATE
! VERTICAL LINES
LESIZE,6,VLSFP ! FACE PLATE
LESIZE,7,VLSFP
LESIZE,12,VLSFP
LESIZE,13,VLSFP
LESIZE,8,VLSC ! CORE
LESIZE,9,VLSC
LESIZE,10,VLSC

```

```

LESIZE,11,VLSC

TYPE,1
MAT,1 ! MATERIAL PROPERTY OF THE FACE PLARES
AMESH,1
MAT,2 ! MATERIAL PROPERTY OF THE CORE
AMESH,2
AMESH,3
MAT,1 ! MATERIAL PROPERTY OF THE FACE PLATES
AMESH,4

NSEL,S,LOC,Y,t+b/2.
NSEL,R,LOC,X,0
*GET,MY_NODE,NODE,0,NUM,MIN
TYPE,2,$ REAL,2
E,MY_NODE

!! .....
!@@@ - Changes the material number attribute of an element -
!! .....
*IF,ITYPE,EQ,1,THEN
  ESEL,S,CENT,X,0,HLS ! SELECT ELEMENTS FROM X LOCATION
  ESEL,R,CENT,Y,t,t+b/2. ! RESELECT ELEMENTS FROM Y LOCATION
  *GET,NELY,ELEM,0,COUNT ! COUNT THE NUMBER OF ELEMENTS IN THE SELECTED SET
  ALLSEL
  ND=NINT((b/2)/VLSC)+1
  DD=(b/2)/ND

  *DO,I,1,NELY
    NSEL,S,LOC,Y,t+b/2.-DD*(I-1)*1.03,t+b/2.-DD*(I-1)
    *GET,NNOD,NODE,0,COUNT
    *DO,J,1,NNOD-1
      IEL=ENEARN(J+1)
      MATT=EXX2*(1+((I-1)*VLSC/b))*(1+((I-1)*VLSC/b))
      MP,EX,I+1,MATT ! YOUNG'S MODULUS
      MP,PRXY,I+1,PRXY2 ! POISSON RATIO
      MPCHG,I+1,IEL ! CHANGES THE MATERIAL NUMBER ATTRIBUTE OF AN ELEMENT
    *ENDDO
  ALLSEL
  NSEL,S,LOC,Y,t+b/2.+DD*I,t+b/2.+DD*I*1.03
  *GET,NNOD,NODE,0,COUNT
  *DO,J,1,NNOD-1
    IEL=ENEARN(J+1)
    MATT=EXX2*(1+((I-1)*VLSC/b))*(1+((I-1)*VLSC/b))
    MP,EX,I+1,MATT ! YOUNG'S MODULUS
    MP,PRXY,I+1,PRXY2 ! POISSON RATIO
    MPCHG,I+1,IEL ! CHANGES THE MATERIAL NUMBER ATTRIBUTE OF AN ELEMENT
  *ENDDO
*ENDDO
*ENDIF

!@ -----
!@@ -- Boundary Conditions -
!! -----
!! .....
!@@@ - Constraint Equations -
!! .....
!! .....
!@@@ - DOF Constraints -
!! .....
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,A,NODE,,MY_NODE

```

```

CERIG,MY_NODE,ALL,UY,UX

NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Y,t+b/2.
D,ALL,UY

LSEL,S,LOC,X,L/2
DL,ALL,,UX

!! .....
!@@@ - SELECT ATOMS FROM THE RIGHT EDGE -
!!.....
NSEL,S,LOC,X,L/2.
NSEL,R,LOC,Y,2*t+b
*GET,TNODE,NODE,0,NUM,MIN ! -> RIGHT TOP NODE
NSEL,S,LOC,X,L/2. NSEL,R,LOC,Y,0
*GET,BNODE,NODE,0,NUM,MIN ! -> RIGHT BOTTOM NODE
!! .....
!@@@ - SELECT NODES FROM THE LEFT EDGE -
!!.....
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Y,t+b/2
*GET,LCNODE,NODE,0,NUM,MIN ! -> LEFT CENTER NODE
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Y,2*t+b
*GET,LTNODE,NODE,0,NUM,MIN ! -> LEFT TOP NODE
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Y,0 *GET,LBNODE,NODE,0,NUM,MIN ! -> LEFT BOTTOM NODE
ALLSEL
FINISH

!@ =====
!@ --- Solution ---
!@ =====
!! -- Static --/Solu
/SOLU
ANTYPE,STATIC
PSTRES,ON

F,LCNODE,FX,1.0
ALLSEL,ALL

SOLVE
FINISH

!! -- Eigenvalue buckling analysis --/solu
/SOLU
ANTYPE,BUCKLE
BUCOPT,SUBSP,NNMODE
OUTRES,ALL,ALL
MXPAND,NNMODE,,,YES
SOLVE
FINISH

! GET A CRITICAL LOAD
*GET,PCR,MODE,1,FREQ

!! -- Non-linear buckling analysis --/solu
*IF,IOPT,EQ,1,THEN
  /PREP7
  ! ADDS DISPLACEMENTS FROM A PREVIOUS ANALYSIS
  ! AND UPDATES THE GEOMETRY OF THE FINITE ELEMENT

```

```

! MODEL TO THE DEFORMED CONFIGURATION
UPGEOM,L/10000,1,1,sandwichpanel,rst
FINISH

! NON-LINEAR ANALYSIS
/SOLU
ANTYPE,STATIC
NLGEOM,ON      ! NON-LINEAR ANALYSIS
ARCLEN,ON,10  ! ARC-LENGTH METHOD
ARCTRM,U,TERVAL,TNODE,UY ! CONTROLS TERMINATION OF THE SOLUTION WHEN THE
                        ! ARC-LENGTH METHOD IS USED

NSUBST,NSBSTP
F,LCNODE,FX,PCR+5.0
OUTRES,ALL,ALL
SOLVE
FINISH

!@ -----
!@@ -- General Postprocessing -
!! -----
/POST1
SET,LAST ! DISPLAYS THE DISPLACED STRUCTURE
PLDISP,0 ! 0 -> DISPLAY ONLY DISPLACED STRUCTURE
          ! 1 -> OVERLAY DISPLACED DISPLAY WITH SIMILAR UNDISPLACED
          ! 2 -> SAME AS 1 EXCEPT OVERLAY WITH UNDISPLACED EDGE DISPLAY
! SAVE IMAGE
! /IMAGE,SAVE,sandwich_panel_figure,bmp

TN=TNODE
BN=BNODE
LCN=LCNODE
LTN=LTNODE
LBN=LBNODE
SET,LAST ! SET RESULT TO LAST SUBSTEP
*GET,SB,ACTIVE,0,SET,SBST      ! CURENT SUBSTEP NUMBER
/OUTPUT,SANDWICHPANEL,RESULT ! REDIRECT TO FILE SANDWICHPANEL.RESULT.
                              ! OUTPUT IS WRITEN STARTING AT THE TOP OF THE
                              ! FILE.
*VWRITE,'F','UY_B','UY_T','UX_B','UX_C','UY_T/b','UY_B/b','2*UX_B/L','2*UX_C/
L'
(2X,A10,5X,A15,5X,A15,5X,A15,5X,A15,5X,A15,5X,A15,5X,A15,5X,A15,5X,A15)
/OUTPUT
*DO,I,1,SB
  SET,1,I ! SET RESULTS TO SUBSTEP I
  *GET,TT,ACTIVE,0,SET,TIME ! STORE CURRENT TIME TO TT
  FT=TT*(PCR+5.0) ! FIND CURRENT FORCE (N/mm)
  /OUTPUT,SANDWICHPANEL,RESULT,,APPEND ! REDIRECT OUTPUT TO FILE
                                       ! SANDWICHPANEL.RESULT. OUTPUT IS
                                       ! APPENDED TO EXISTING FILE.
*VWRITE,FT,UY(TN),UY(BN),UX(LTN),UX(LCN),UY(TN)/b,UY(BN)/b,2*UX(LTN)/L,2*UX(L
CN)/L ! WRITE FORCE AND DISPLACEMENTS TO FILE
(2X,F15.2,5X,E16.8,5X,E16.8,5X,E16.8,5X,E16.8,5X,E16.8,5X,E16.8,5X,E16.8,5X,E
16.8) ! FORMAT STATEMENT
/OUTPUT
*ENDDO

SET,LAST ! SET RESULT TO LAST SUBSTEP
!@ ---- BOTTOM EDGE ----
LSEL,S,LINE,,1
NSLL,S,1
*GET,NN,NODE,0,COUNT
*DIME,XX_L,,NN

```

```

*DIM,YY_L,,NN
*DIM,XX_R,,NN
*DIM,YY_R,,NN
/OUTPUT,MODEL,RESULT
*VWRITE,'BE'
(2X,A10)
/OUTPUT
INODE=NODE(NX(1),NY(1),0)
XX_L(1)=UX(INODE)
YY_L(1)=UY(INODE)
XX_R(1)=L-XX_L(1)
YY_R(1)=YY_L(1)
*DO,I,2,NN-1
    INODE=NODE(NX(I+1),NY(I+1),0)
    XX_L(I)=UX(INODE)+I*(L/2)/NN
    YY_L(I)=UY(INODE)
    XX_R(I)=L-XX_L(I)
    YY_R(I)=YY_L(I)
*ENDDO INODE=NODE(NX(2),NY(2),0)
XX_L(NN)=UX(INODE)+NN*(L/2)/NN
YY_L(NN)=UY(INODE)
XX_R(I)=L-XX_L(NN)
YY_R(I)=YY_L(NN)

/OUTPUT,MODEL,RESULT,,APPEND
*VWRITE,XX_L(1),YY_L(1),XX_R(1),YY_R(1)
(2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10)
/OUTPUT

!@ ----- TOP EDGE -----
LSEL,S,LINE,,5
NSLL,S,1
/OUTPUT,MODEL,RESULT,,APPEND
*VWRITE,'TE'
(2X,A10)
/OUTPUT
*GET,NN,NODE,0,COUNT
INODE=NODE(NX(1),NY(1),0)
XX_L(1)=UX(INODE)
YY_L(1)=UY(INODE)+t*2+b
XX_R(1)=L-XX_L(1)
YY_R(1)=YY_L(1)
*DO,I,2,NN-1
    INODE=NODE(NX(I+1),NY(I+1),0)
    XX_L(I)=UX(INODE)+I*(L/2)/NN
    YY_L(I)=UY(INODE)+t*2+b
    XX_R(I)=L-XX_L(I)
    YY_R(I)=YY_L(I)
*ENDDO
INODE=NODE(NX(2),NY(2),0)
XX_L(NN)=UX(INODE)+NN*(L/2)/NN
YY_L(NN)=UY(INODE)+t*2+b
XX_R(I)=L-XX_L(NN)
YY_R(I)=YY_L(NN)

/OUTPUT,MODEL,RESULT,,APPEND
*VWRITE,XX_L(1),YY_L(1),XX_R(1),YY_R(1)
(2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10)
/OUTPUT

!@ ----- LEFT EDGE -----
LSEL,S,LINE,,6

```

```

NSLL,S,1
/OUTPUT,MODEL,RESULT,,APPEND
*VWRITE,'LE' (2X,A10)
/OUTPUT *GET,NN,NODE,0,COUNT
*DIM,XX_L1,,NN
*DIM,YY_L1,,NN
*DIM,XX_R1,,NN
*DIM,YY_R1,,NN
INODE=NODE(NX(1),NY(1),0)
XX_L1(1)=UX(INODE)
YY_L1(1)=UY(INODE)
XX_R1(1)=L-XX_L1(1)
YY_R1(1)=YY_L1(1)
INODE=NDNEXT(INODE)
XX_L1(NN)=UX(INODE)
YY_L1(NN)=UY(INODE)+t
XX_R1(NN)=L-XX_L1(NN)
YY_R1(NN)=YY_L1(NN)
*DO,I,2,NN-1
  INODE=NDNEXT(INODE)
  XX_L1(I)=UX(INODE)
  YY_L1(I)=UY(INODE)+I*t/NN
  XX_R1(I)=L-XX_L1(I)
  YY_R1(I)=YY_L1(I)
*ENDDO

/OUTPUT,MODEL,RESULT,,APPEND
*VWRITE,XX_L1(1),YY_L1(1),XX_R1(1),YY_R1(1)
(2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10)
/OUTPUT

LSEL,S,LINE,,8
NSLL,S,1
*GET,NN,NODE,0,COUNT
*DIM,XX_L2,,NN
*DIM,YY_L2,,NN
*DIM,XX_R2,,NN
*DIM,YY_R2,,NN
INODE=NODE(NX(1),NY(1),0)
XX_L2(1)=UX(INODE)
YY_L2(1)=UY(INODE)+t
XX_R2(1)=L-XX_L2(1)
YY_R2(1)=YY_L2(1)
INODE=NDNEXT(INODE)
XX_L2(NN)=UX(INODE)
YY_L2(NN)=UY(INODE)+t+b/2.
XX_R2(NN)=L-XX_L2(NN)
YY_R2(NN)=YY_L2(NN)
*DO,I,2,NN-1
  INODE=NDNEXT(INODE)
  XX_L2(I)=UX(INODE)
  YY_L2(I)=UY(INODE)+I*(b/2)/NN+t
  XX_R2(I)=L-XX_L2(I)
  YY_R2(I)=YY_L2(I)
*ENDDO

/OUTPUT,MODEL,RESULT,,APPEND
*VWRITE,XX_L2(1),YY_L2(1),XX_R2(1),YY_R2(1)
(2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10)
/OUTPUT

LSEL,S,LINE,,10

```

```

NSLL,S,1
*GET,NN,NODE,0,COUNT
*DIM,XX_L3,,NN
*DIM,YY_L3,,NN
*DIM,XX_R3,,NN
*DIM,YY_R3,,NN
INODE=NODE(NX(1),NY(1),0)
XX_L3(1)=UX(INODE)
YY_L3(1)=UY(INODE)+t+b/2
XX_R3(1)=L-XX_L3(1)
YY_R3(1)=YY_L3(1)
INODE=NDNEXT(INODE)
XX_L3(NN)=UX(INODE)
YY_L3(NN)=UY(INODE)+t+b
XX_R3(NN)=L-XX_L3(NN)
YY_R3(NN)=YY_L3(NN)
*DO,I,2,NN-1
  INODE=NDNEXT(INODE)
  XX_L3(I)=UX(INODE)
  YY_L3(I)=UY(INODE)+I*(b/2)/NN+t+b/2
  XX_R3(I)=L-XX_L3(I)
  YY_R3(I)=YY_L3(I)
*ENDDO

/OUTPUT,MODEL,RESULT,,APPEND
*VWRITE,XX_L3(1),YY_L3(1),XX_R3(1),YY_R3(1)
(2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10)
/OUTPUT

LSEL,S,LINE,,12
NSLL,S,1
*GET,NN,NODE,0,COUNT
*DIM,XX_L4,,NN
*DIM,YY_L4,,NN
*DIM,XX_R4,,NN
*DIM,YY_R4,,NN
INODE=NODE(NX(1),NY(1),0)
XX_L4(1)=UX(INODE)
YY_L4(1)=UY(INODE)+t+b
XX_R4(1)=L-XX_L4(1)
YY_R4(1)=YY_L4(1)
INODE=NDNEXT(INODE)
XX_L4(NN)=UX(INODE)
YY_L4(NN)=UY(INODE)+2*t+b
XX_R4(NN)=L-XX_L4(NN)
YY_R4(NN)=YY_L4(NN)
*DO,I,2,NN-1
  INODE=NDNEXT(INODE)
  XX_L4(I)=UX(INODE)
  YY_L4(I)=UY(INODE)+I*t/NN+t+b
  XX_R4(I)=L-XX_L4(I)
  YY_R4(I)=YY_L4(I)
*ENDDO

/OUTPUT,MODEL,RESULT,,APPEND
*VWRITE,XX_L4(1),YY_L4(1),XX_R4(1),YY_R4(1)
(2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10,2X,F20.10)
/OUTPUT

FINISH

!@ -----

```

```
!@@ -- Time-History Postprocessing -  
!@ -----  
/POST26  
NUMVAR,100  
NSOL,2,TNODE,U,Y,UY_TOP  
NSOL,3,BNODE,U,Y,UY_BOTTOM  
ADD,4,3,2,,UY,,,1,-1 PPCR=(PCR+5.0)  
NSOL,5,LCNODE,U,X,UX_CENTER  
PROD,6,1,,,PCritical,,,PPCR  
FINISH  
  
*ENDIF  
  
/eof -----
```