

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ



ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Διπλωματική Μελέτη

Μοντελοποίηση υπόγειου υδροφορέα υπό κλίση

Βαρβάρης Ιωάννης

Επιβλέπων καθηγητής
Δρ. Ευάγγελος Ακύλας

Λεμεσός 2013

Πνευματικά δικαιώματα

Copyright © Ιωάννης Βαρβάρης, 2013

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All right reserved.

Η έγκριση της πτυχιακής διατριβής από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Γεωπληροφορικής του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου Κύπρου δεν υποδηλώνει απαραίτητως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος.

Στους γονείς μου

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει γίνει στα πλαίσια της διπλωματικής μου Εργασίας στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Γεωπληροφορικής του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου της Κύπρου, και έχει ως αντικείμενο τη μοντελοποίηση της ροής του νερού σε υπόγειο υδροφορέα με κλίση. Για την επίτευξη του παραπάνω στόχου, η μελέτη βασίστηκε στην εφαρμογή της γενικευμένης υδραυλικής θεωρίας του *Boussinesq* και των *Dupuit – Forchheimer*, ενώ έγινε παραδοχή δημιουργίας συνθηκών ημι-μόνιμης (*quasi-steady*) ροής. Σε αντίθεση με παλαιότερες μελέτες, στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν οι ακριβείς λύσεις για την αποθηκευτικότητα του υδροφορέα σε συνθήκες μόνιμης ροής διατηρώντας τη μη γραμμικότητα χωρίς οποιαδήποτε γραμμική ή άλλη εμπειρική προσέγγιση. Οι μαθηματικές μορφές που εξάγονται οδηγούν αβίαστα στη θεωρητική στοιχειοθέτηση παραδοσιακά χρησιμοποιούμενων εμπειρικών σχέσεων, χωρίς την ανάγκη της εισαγωγής εμπειρικών παραμέτρων. Επιπλέον υποδεικνύουν με σαφήνεια τα όρια ισχύος των παλαιότερων προσεγγίσεων. Τέλος σε μία προσπάθεια διεύρυνσης των δυνατοτήτων εφαρμογής της υδραυλικής θεωρίας που αναπτύχθηκε προς μία περισσότερο εμπειρική υδρολογική κατεύθυνση, προτείνεται ένα νέο υβριδικό μοντέλο περιγραφής της απόκρισης της απορροής σε δυναμικά εξελισσόμενες συνθήκες ροής, και με μεταβλητή φόρτιση, το οποίο πιστεύω ότι θα αποδειχθεί χρήσιμο στην παραμετροποίηση και ερμηνεία πραγματικών υδρογραφημάτων.

Μέρος της εργασίας αυτής έχει παρουσιαστεί στο διεθνές συνέδριο της *European Geosciences Union*, τον Απρίλιο του 2013 στη Βιέννη, ενώ έχει ήδη σταλεί προς δημοσίευση στο επιστημονικό περιοδικό *Water Resources Research*.

Στην επιτυχή ολοκλήρωση της προσπάθειας σημαντικό ρόλο διαδραμάτισε η συνεχής και αποτελεσματική επίβλεψη από τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Γεωπληροφορικής του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου Κύπρου Δρ. Ε. Ακύλα, χωρίς τη βοήθεια του οποίου δεν θα είχε επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Η βοήθεια και η παροχή ιδεών από τον Επιστημονικό Συνεργάτη Δρ. Ηλία Γραβάνη ήταν καθοριστική και απλόχερη σε κάθε περίπτωση και τον ευχαριστώ θερμά. Η γνωριμία μου και η συζήτηση με τον Καθηγητή Δρ. Αντώνιο Κούση, υπήρξε καθοριστική έμπνευση για το σύνολο της επιστημονικής μου αναζήτησης και τον ευγνωμονώ. Επίσης δεν μπορώ να μην εκφράσω ειλικρινείς ευχαριστίες στην Επίκουρη Καθηγήτρια Δρ. Χρυστάλλα Δημητριάδη η οποία βοήθησε σε αρκετές μαθηματικές απαιτήσεις της μελέτης.

Τέλος θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη στη συμφοιτήτρια μου Ζαμπέλλα Πιτάκη για τη πολύτιμη βοήθεια της και υποστήριξη της, όπως επίσης και στην οικογένεια και τους φίλους μου για την αμέριστη συμπαράσταση τους καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Ιωάννης Ν. Βαρβάρης

Μάιος 2013

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αναλύεται η ροή σε υπόγειο υδροφορέα υπό κλίση, ο οποίος εμπλουτίζεται μέσω κατακόρυφης τροφοδοσίας και δημιουργείται και προτείνεται ένα μαθηματικό μοντέλο για τον υπολογισμό της συνολικής εκροής το κατάντη άκρο του. Στην περίπτωση ανατροφοδότησης, το διεισδύον νερό ακολουθεί κάθετη ροή, η οποία καλείται ακόρεστη ροή, έως ότου επέλθει στον υπόγειο υδροφορέα κορεσμένη ροή με το νερό να κινείται παράλληλα με τον υπόγειο υδροφορέα. Ο *Boussinesq* χρησιμοποίησε την υδραυλική θεωρία των *Dupuit-Forchheimer* για να εκφράσει την κορεσμένη ροή των υπογείων υδάτων μέσω ενός πορώδους στρώματος, μέσω μιας μη γραμμικής εξίσωσης για τη υφιστάμενη ροή, η οποία καθορίζεται από τη γραμμική επίδραση της βαρύτητας και την τετραγωνική επίδραση της πίεσης. Χρησιμοποιώντας τη διαφορική εξίσωση της διατήρησης της μάζας, ο *Boussinesq* κατέληξε σε μία μη γραμμική, δεύτερης τάξης, διαφορική εξίσωση που εκφράζει την εξέλιξη των βαθών της στήλης του νερού εντός του υπόγειου υδροφορέα. Μέχρι στιγμής, ωστόσο, μόνο ορισμένες ειδικές λύσεις είναι γνωστές όσον αφορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Η μη γραμμικότητα της εξίσωσης *Boussinesq* αποτελεί το σημαντικότερο εμπόδιο στην αναλυτική λύση της εξέλιξης των προφίλ του νερού και κατ' επέκταση του υπολογισμού της απορροής σε υπόγειο υδροφορέα υπό κλίση, ο οποίος επαναφορτίζεται. Οι *Henderson and Wooding* (1964) ανέπτυξαν μια ακριβή, αναλυτική λύση για τη μόνιμη σταθερή κορεσμένη ροή στο παραπάνω πρόβλημα (υπό σταθερό ρυθμό επαναφόρτισης), και το έργο τους αξίζει ιδιαίτερη μνεία στην ιστορία των λύσεων της μη γραμμικής εξίσωσης του *Boussinesq*. Ωστόσο, η απουσία μιας γενικής λύσης για την μεταβατική δυναμική κατάσταση, η οποία έχει κύριο πρακτικό ενδιαφέρον για το τομέα της Υδρολογίας οδήγησε στην ανάπτυξη προσεγγιστικών λύσεων της μη γραμμικής εξίσωσης του *Boussinesq*.

Στην παρούσα εργασία, προσεγγίζεται η εξίσωση της αποθηκευτικότητας ενός υπόγειου υδροφορέα, με ολοκλήρωση της ακριβούς, αναλυτικής λύση των κατατομών του βάθους της μη γραμμικής εξίσωσης του *Boussinesq* σε κατάσταση μόνιμης ροής (*steady state*). Η εξίσωση αυτή αποτελείται από ένα γραμμικό και ένα μη γραμμικό όρο που επηρεάζουν την απορροή. Σε αντίθεση με παλαιότερες μελέτες, εδώ χρησιμοποιήθηκαν οι ακριβείς λύσεις για την αποθηκευτικότητα του υδροφορέα σε συνθήκες μόνιμης ροής διατηρώντας τη μη γραμμικότητα χωρίς οποιαδήποτε γραμμική ή άλλη εμπειρική προσέγγιση. Οι μαθηματικές μορφές που εξάγονται οδηγούν αβίαστα στη θεωρητική στοιχειοθέτηση παραδοσιακά χρησιμοποιούμενων εμπειρικών σχέσεων, χωρίς την ανάγκη της εισαγωγής εμπειρικών παραμέτρων. Επιπλέον υποδεικνύουν με σαφήνεια τα όρια ισχύος των παλαιότερων προσεγγίσεων, ως προς την εφαρμογή τους στα πλαίσια της προσέγγισης οιωνοί μόνιμων συνθηκών. Τέλος σε μία προσπάθεια διεύρυνσης των δυνατοτήτων εφαρμογής της υδραυλικής θεωρίας που αναπτύχθηκε προς μία περισσότερο εμπειρική υδρολογική κατεύθυνση, προτείνεται ένα νέο υβριδικό μοντέλο περιγραφής της απόκρισης της απορροής

σε δυναμικά εξελισσόμενες συνθήκες ροής, και με μεταβλητή φόρτιση. Το συγκεκριμένο μοντέλο εφαρμόζεται και ελέγχεται σε ιστορικές πειραματικές μετρήσεις με ιδιαίτερη επιτυχία και αναμένεται να αποδειχθεί χρήσιμο στην παραμετροποίηση και ερμηνεία πραγματικών υδρογραφημάτων.

Abstract

Hillslope processes involving flow through an inclined shallow aquifer range from subsurface stormflow to stream base flow (drought flow, or groundwater recession flow). In the case of recharge, the infiltrating water moves vertically as unsaturated flow until it reaches the saturated groundwater, where the flow is approximately parallel to the base of the aquifer. *Boussinesq* (1901) used the *Dupuit-Forchheimer* (D-F) hydraulic theory to formulate unconfined groundwater flow through a soil layer resting on an impervious inclined bed, deriving a nonlinear equation for the flow rate that consists of a linear gravity-driven component and a quadratic pressure-gradient component. Inserting that flow rate equation into the differential storage balance equation (volume conservation) *Boussinesq* obtained a nonlinear second-order partial differential equation for the depth. So far however, only few special solutions have been advanced for that governing equation.

The nonlinearity of the equation of *Boussinesq* is the major obstacle to deriving a general analytical solution for the depth profile of unconfined flow on a sloping base with recharge (from which the discharges could be then determined). *Henderson and Wooding* (1964) were able to obtain an exact analytical solution for steady unconfined flow on a sloping base, with recharge, and their work deserves special note in the realm of solutions of the nonlinear equation of *Boussinesq*. However, the absence of a general solution for the transient case, which is of practical interest to hydrologists, has been the motivation for developing approximate solutions of the non-linear equation of *Boussinesq*.

In this work, we derive the aquifer storage function by integrating analytically over the aquifer base the depth profiles resulting from the complete nonlinear *Boussinesq* equation for steady flow. This storage function consists of a linear and a nonlinear outflow-dependent term. Then, we use this physics-based storage function in the transient storage balance over the hillslope, obtaining analytical solutions of the outflow and the storage, for recharge and drainage, via a quasi-steady flow calculation. The hydraulically derived storage model is thus embedded in a quasi-steady approximation of transient unconfined flow in sloping aquifers. We generalise this hydrologic model of groundwater flow by modifying the storage function to be the weighted sum of the linear and the nonlinear storage terms, determining the weighting factor objectively from a known integral quantity of the flow (either an initial volume of water stored in the aquifer or a drained water volume). We demonstrate the validity of this model through comparisons with experimental data and simulation results.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	i
Περίληψη	iii
1. Εισαγωγή	1
1.1 Υπόγειοι υδροφορείς	2
1.2 Αναδρομή στην υδραυλική περιγραφή των υπογείων υδάτων.....	5
1.3 Δομή της εργασίας.....	9
2. Υδραυλική θεώρηση υπόγειου υδροφορέα	11
2.1 Κορεσμένη ροή σε υπόγειο υδροφορέα	14
2.2 Διαστατική ανάλυση της εξίσωσης μόνιμης ροής.....	16
2.3 Λύση της μη γραμμικής εξίσωσης για την κατάσταση ισορροπίας.....	18
3. Προσέγγιση εξελισσόμενης ροής με διαδοχικές ημι-μόνιμες καταστάσεις ισορροπίας	23
3.1 Αποθηκευτικότητα σε συνθήκες μόνιμης ροής.....	24
3.2 Οιονεί κατάσταση ισορροπίας.....	29
3.3 Εξαγωγή του γραμμικού και τετραγωνικού ταμειυτήρα	30
4. Δημιουργία υβριδικού υδρολογικού μοντέλου και σύγκριση με πειραματικά στοιχεία	33
4.1 Υβριδικό υδρολογικό μοντέλο για τον υπολογισμό της απορροής.....	33
4.2 Πειραματικά δεδομένα	35
4.2.1 Πειραματική διάταξη Coweeta	36
4.2.2 Πειραματική διάταξη Sanford et al. (1993).....	38
4.2.3 Πειραματική διάταξη Mizumura.....	40
4.3 Ανεξάρτητη εφαρμογή του υβριδικού μοντέλου σε πειραματικά δεδομένα.....	42
5. Συμπεράσματα	47
6. Βιβλιογραφία	50

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1. Σχηματική παράσταση φρεάτιων και περιορισμένων υδροφορέων (Κουτσογιάννης και Ξανθόπουλος 1999).	3
Σχήμα 2. Τομή κεκλιμένου στρώματος εδάφους υπό τη διαδικασία εισροής και εκροής υδατικών μετεωρολογικών κατακρημνισμάτων, με παραδοχές ομοιομορφίας στη γεωμετρία και τις φυσικές υδραυλικές παραμέτρους.	14
Σχήμα 3. Γραφική αναπαράσταση των αδιάστατων βαθών $H(x)$ για μόνιμη ροή σε υπόγειο κεκλιμένο υδροφορέα με επαναφόρτιση για τιμές της παραμέτρου $m = 0.00, 0.05, 0.25, 0.75, 1.25$ και 2.00 . Οι αντίστοιχες καμπύλες ξεκινούν από πάνω για $m = 0.00$, που αντιστοιχεί σε οριζόντιο υδροφορέα, και εξελίσσονται προς τα κάτω για μέγιστη τιμή $m = 2.00$. Η περιοχή τιμών της παραμέτρου m ορίζει τον πρώτο κλάδο λύσεων της εξίσωσης (19).	20
Σχήμα 4. Γραφική αναπαράσταση των αδιάστατων βαθών $H(x)$ για μόνιμη ροή σε υπόγειο κεκλιμένο υδροφορέα με επαναφόρτιση για τιμές της παραμέτρου $m = 2.00, 2.50, 3.00$ και 4.50 . Οι αντίστοιχες καμπύλες ξεκινούν από πάνω για $m = 2.00$ και εξελίσσονται προς τα κάτω για μέγιστη τιμή $m = 4.50$. Η περιοχή τιμών της παραμέτρου m ορίζει το δεύτερο κλάδο λύσεων μέσω της εξίσωσης (21).	22
Σχήμα 5. Εξάρτηση της θεμελιώδους παραμέτρου $\sigma(\lambda)$ όπως προκύπτει κατά τον υπολογισμό της αποθηκευτικότητας του υδροφορέα σε συνθήκες μόνιμης ροής.	27
Σχήμα 6. Εξάρτηση της θεμελιώδους παραμέτρου $\sigma(\lambda)$ όπως προκύπτει κατά τον υπολογισμό της αποθηκευτικότητας του υδροφορέα σε συνθήκες μόνιμης ροής (μπλε) και η ασυμπτωτική προσέγγιση της από την εξίσωση (κόκκινο).	28
Σχήμα 7. Μετρήσεις συνολικής απορροής κατά την αποφόρτιση στο πείραμα <i>Coweeta</i> (Hewlett and Hibbert, 1963).	37
Σχήμα 8. Σχηματοποίηση της πειραματική διάταξης που χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα των <i>Sanford et al.</i> (1993) και <i>Mizumura</i> (2002).	38
Σχήμα 9. Μετρήσεις συνολικής απορροής κατά το πείραμα των <i>Sanford et al.</i> (1993) για γωνία $\varphi = 5.1^\circ$	39
Σχήμα 10. Μετρήσεις συνολικής απορροής κατά το πείραμα των <i>Sanford et al.</i> (1993), για γωνία $\varphi = 7.85^\circ$	40
Σχήμα 11. Μετρήσεις συνολικής απορροής κατά την αποφόρτιση στο πείραμα <i>Mizumura</i> (2002).	41

Σχήμα 12. Μετρήσεις συνολικής απορροής (σημεία) κατά την αποφόρτιση στο πείραμα <i>Coweeta</i> (<i>Hewlett and Hibbert</i> , 1963) και εφαρμογή του υβριδικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στη συγκεκριμένη εργασία (γραμμή).....	44
Σχήμα 13. Μετρήσεις συνολικής απορροής (σημεία) κατά την αποφόρτιση στο πείραμα των <i>Sanford et al.</i> (1993) για γωνία $\phi = 5.1^\circ$, και εφαρμογή του υβριδικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στη συγκεκριμένη εργασία (γραμμή).....	44
Σχήμα 14. Μετρήσεις συνολικής απορροής (σημεία) κατά την αποφόρτιση στο πείραμα των <i>Sanford et al.</i> (1993) για γωνία $\phi = 7.85^\circ$, και εφαρμογή του υβριδικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στη συγκεκριμένη εργασία (γραμμή).....	45
Σχήμα 15. Μετρήσεις συνολικής απορροής (σημεία) κατά την αποφόρτιση στο πείραμα <i>Mizumura</i> (2002) και εφαρμογή του υβριδικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στη συγκεκριμένη εργασία (γραμμή).....	45

1. Εισαγωγή

Τα αποθέματα του υπόγειου νερού αποτελούν περίπου το 30% του συνολικού γλυκού νερού, ή το 99% των υγρών αποθεμάτων γλυκού νερού της Γης. Ωστόσο, το νερό δεν αποτελεί αποθεματικό φυσικό πόρο, αλλά ανανεώσιμο, αφού οι αριθμοί αυτοί δεν είναι αντιπροσωπευτικοί της σημασίας του υπόγειου νερού ως υδατικού πόρου, η οποία υπερεκτιμάται. Πιο ενδεικτικά είναι τα ποσοστά συμμετοχής του υπόγειου νερού στο ετήσιο παγκόσμιο υδατικό ισοζύγιο. Τα υπόγεια νερά που καταλήγουν με υπόγεια απορροή στους ωκεανούς είναι μόνο το 2% των κατακρημνισμάτων που πέφτουν στην ξηρά, ή το 4% της συνολικής απορροής. Η επιφανειακή απορροή συμμετέχει στο ετήσιο υδατικό ισοζύγιο της Γης σε πολύ μεγαλύτερες ποσότητες (περίπου 20 φορές). Όμως και η δεύτερη σειρά αριθμών είναι πλασματική, αφού μεγάλο μέρος των επιφανειακών νερών έχει υπάρξει προηγουμένως ως υπόγειο νερό που τροφοδότησε, μέσω των εκφορτίσεων των πηγών, την επιφανειακή απορροή. Κατά συνέπεια, η πραγματική συμμετοχή του υπόγειου νερού στο ετήσιο παγκόσμιο υδρολογικό ισοζύγιο είναι πολύ μεγαλύτερη από τα παραπάνω ποσοστά 2% και 4%. Ανάμεσα στην επιφανειακή απορροή και την υπόγεια απορροή υπάρχει σημαντική διαφορά ως προς τη χρονική κλίμακα εξέλιξης. Λαμβάνοντας υπόψη τα μεγέθη φυσικών αποθεμάτων και ισοζυγίων, διαπιστώνεται εύκολα ότι ο μέσος χρόνος παραμονής του επιφανειακού νερού στους ποταμούς είναι της τάξης του μισού μήνα. Αντίστοιχα, θεωρώντας σε χονδροειδή προσέγγιση ότι το 25% - 50% του επιφανειακού νερού έχει προέλθει από εκροή υπόγειων νερών, δύναται να εκτιμηθεί ότι ο μέσος χρόνος παραμονής του νερού στους υπόγειους ταμιευτήρες είναι 400 – 800 χρόνια. Στην πραγματικότητα, αυτός ο μέσος χρόνος παραμονής κυμαίνεται γεωγραφικά σε διάφορες περιοχές της Γης από μερικά χρόνια μέχρι μερικές χιλιετίες. Η βραδεία κίνηση του νερού στη φάση της υπόγειας απορροής έχει ορισμένες χαρακτηριστικές συνέπειες, οι οποίες είναι οι εξής (Σούλιος, 1996):

Οι νόμοι κίνησης του νερού χαρακτηρίζονται από ήπιες γραμμικές ή σχεδόν γραμμικές σχέσεις παροχής – ενεργειακών απωλειών.

Η τροφοδοσία των επιφανειακών υδάτινων σωμάτων από τα υπόγεια νερά γίνεται πρακτικά με ομαλούς, σχεδόν ομοιόμορφους ρυθμούς, σε αντίθεση με τους έντονα μεταβαλλόμενους και διαλείποντες ρυθμούς της πλημμυρικής απορροής.

Από διαχειριστική άποψη, τα υπόγεια υδάτινα σώματα μπορούν να θεωρηθούν ως φυσικοί ταμιευτήρες, πλησιάζοντας ως προς τη συμπεριφορά τους τις φυσικές και τεχνητές επιφανειακές λίμνες.

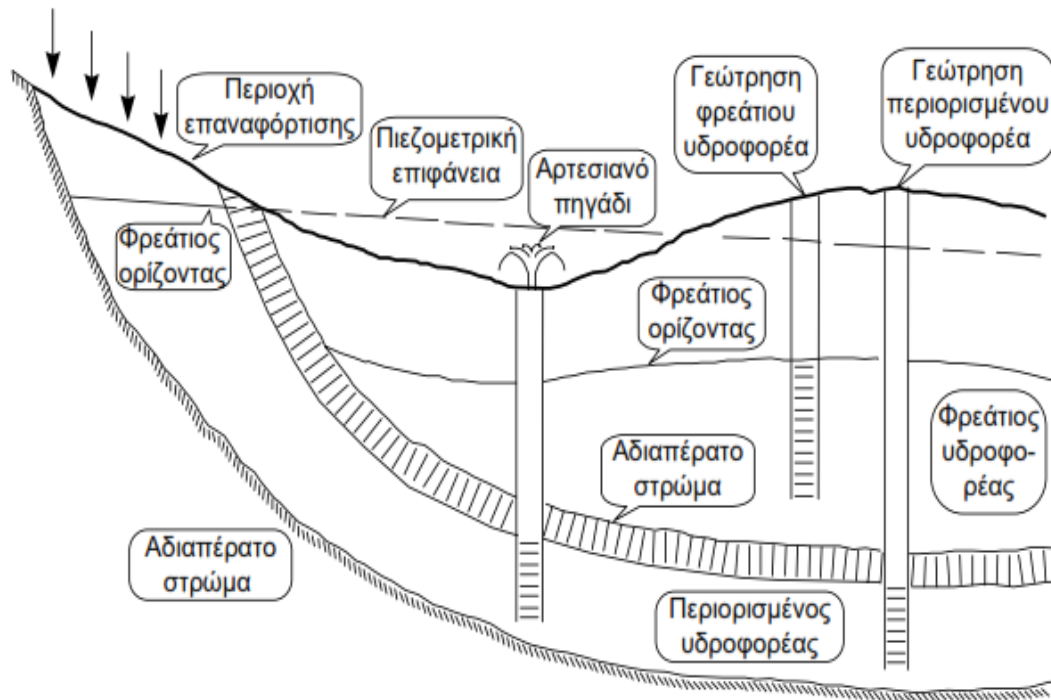
Η ρύπανση των υπόγειων νερών εξελίσσεται με ιδιαίτερα βραδείς ρυθμούς με αποτέλεσμα η κακή διαχείρισή τους να οδηγεί πολλές φορές σε πρακτικώς μη αναστρέψιμα αποτελέσματα.

Παρά τους κατ' αρχήν απλούς νόμους της κίνησης των υπόγειων νερών, η μελέτη τους είναι κατ' εξοχήν δύσκολη υπολογιστικά. Οι δυσκολίες προκαλούνται από την έντονη γεωγραφική μεταβλητότητα και ανισοτροπία των χαρακτηριστικών των υδροφορέων, από τη δυσχέρεια ακριβούς γνώσης τόσο της γεωμετρίας, όσο και των χαρακτηριστικών των υδροφορέων, και από την ανάπτυξη των υπόγειων ροών σε δύο ή τρεις χωρικές διαστάσεις (σε αντίθεση με την κατά κανόνα μονοδιάστατη εικόνα των επιφανειακών ροών). Βάση όμως των παραπάνω, γίνεται έντονα αισθητή η ανάγκη για κατανόηση και σύνθεση μαθηματικών συναρτήσεων για τη μελέτη της ροής σε ένα υπόγειο υδροφορέα (Σούλιος, 1996).

1.1 Υπόγειοι υδροφορείς

Οι υπόγειοι υδροφορείς είναι γεωλογικοί σχηματισμοί, οι οποίοι συγκεντρώνουν το μεγαλύτερο μέρος των εκμεταλλεύσιμων υδατικών πόρων και πιο συγκεκριμένα κάθε γεωλογική μονάδα, η οποία μπορεί να αποθηκεύσει μια αξιόλογη ποσότητα νερού και να τη μεταφέρει με ρυθμό υδρολογικά σημαντικό ονομάζεται υπόγειος υδροφορέας ή απλώς υδροφορέας. Περιέχουν αρκετό κορεσμένο με νερό υλικό, ώστε να τροφοδοτήσουν με σημαντικές ποσότητες νερού γεωτρήσεις ή πηγές. Οι υδροφορείς έχουν αυξημένη ικανότητα να αποθηκεύουν και να μεταβιβάζουν νερό. Δύναται να είναι γεωλογικοί σχηματισμοί, οι οποίοι αποτελούνται από ανεξάρτητους κόκκους είτε παρουσιάζονται ως βραχομάζα, η οποία περιέχει μεγάλο αριθμό από ρωγμές. Η μελέτη της ροής των υδάτων στους παραπάνω γεωλογικούς σχηματισμούς είναι ιδιαίτερα σημαντική για την υδρολογία των ορεινών λεκανών απορροής. Εξέχουσα σημασία διαδραματίζει η παραπάνω έρευνα και για τη κατασκευή χώρων υγειονομικής ταφής στον τομέα της συλλογής των στραγγισμάτων που δημιουργούνται στον ΧΥΤΑ από την αποσύνθεση του οργανικού μέρους των απορριμμάτων και από τη διείσδυση στη μάζα τους νερών της βροχής, τα οποία αποτελούν παράγοντα μόλυνσης του υπεδάφους και του υδροφόρου ορίζοντα. Οι υπόγειοι υδροφορείς

ταξινομούνται, με βάση τη φύση του άνω ορίου τους, σε δύο κατηγορίες και συγκεκριμένα τους φρεάτιους και τους περιορισμένους, οι οποίοι διευκρινίζονται παραστατικά στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1. Σχηματική παράσταση φρεατίων και περιορισμένων υδροφορέων (Κουτσογιάννης και Ξανθόπουλος 1999).

Πιο συγκεκριμένα, οι φρεάτιοι (ή ελεύθεροι ή με ελεύθερη επιφάνεια) υδροφορείς είναι εκείνοι, στους οποίους το άνω όριο είναι ο φρεάτιος οριζοντας. Κατά κανόνα το όριο αυτό είναι μεταβλητό στο χρόνο. Η τροφοδοσία των φρεατίων υδροφορέων γίνεται από το νερό που διηθείται άμεσα από το υπερκείμενο έδαφος ή από γειτονικά επιφανειακά υδάτινα σώματα, κινούμενο κατακόρυφα υπό την επίδραση της βαρύτητας.

Οι περιορισμένοι (ή υπό πίεση) υδροφορείς είναι εκείνοι των οποίων τα άνω και κάτω όρια ορίζονται από γεωλογικούς σχηματισμούς πρακτικά αδιαπέρατους. Τα όρια των περιορισμένων υδροφορέων είναι σταθερά στο χρόνο. Η τροφοδοσία τους με νερό γίνεται συνήθως από μία περιοχή τους που έρχεται σε επαφή με το έδαφος χωρίς να μεσολαβεί αδιαπέρατο στρώμα. Προφανώς η πίεση στο άνω όριο των περιορισμένων υδροφορέων δεν είναι ίση με την ατμοσφαιρική αλλά μεγαλύτερη. Σε περίπτωση που η πιεζομετρική επιφάνεια βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του εδάφους, ο υδροφόρας ονομάζεται αρτεσιανός (Μουτσόπουλος, 2008).

Ασφαλώς οι παραπάνω δύο τύποι υδροφορέων αποτελούν ιδεατές καταστάσεις. Στην πραγματικότητα μπορεί ένας υδροφορέας να εμφανίζει κατά περιοχές χαρακτηριστικά και των δύο κατηγοριών. Εξάλλου τα όρια των υδροφορέων και των δύο κατηγοριών μπορεί να μην είναι αδιαπέρατα και αναφέρονται σε φρεάτιους υδροφορείς με διαρροή και περιορισμένους υδροφορείς με διαρροή. Μερικές φορές η διάταξη των πετρωμάτων μπορεί να οδηγήσει σε σχηματισμό μικρού μεγέθους φρεάτιων οριζόντων τοπικού χαρακτήρα, πάνω από το γενικό φρεάτιο ορίζοντα της περιοχής. Στις περιπτώσεις αυτές ονομάζονται επικρεμάμενοι υδροφορείς.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η φόρτιση των παραπάνω γεωλογικών σχηματισμών, φυσικών ή τεχνητών, πραγματοποιείται μέσω της κατείσδυσης υδατωδών μετεωρολογικών κατακρημνισμάτων. Την τεχνική υδρολογία των τροπικών, υποτροπικών και εύκρατων περιοχών, ενδιαφέρουν κυρίως οι βροχοπτώσεις, γιατί ποσοτικά υπερέχουν πολύ των άλλων μορφών κατακρημνισμάτων και δημιουργούν τα σημαντικότερα φαινόμενα επιφανειακής και υπόγειας απορροής. Δεύτερη σε σπουδαιότητα μορφή κατακρημνισμάτων είναι οι χιονοπτώσεις, οι οποίες στα εύκρατα κλίματα αποτελούν την κυριότερη πηγή της εαρινής απορροής, ρυθμίζοντας, με την υστέρηση στην τήξη του χιονιού, τη δίαιτα των μεγάλων κυρίως υδατορευμάτων που έχουν τις πηγές τους σε ψηλούς ορεινούς σχηματισμούς. Το χαλάζι είναι μια τρίτη μορφή κατακρημνίσματος, η μελέτη του οποίου αποκτά σημασία μόνο στην περίπτωση που μελετούνται τα καταστροφικά αποτελέσματα του ιδίως στη γεωργία, λόγω της μικρής ποσότητας τους. Στην παρούσα μελέτη με τον όρο κατακρημνίσματα νοείται μόνο η βροχόπτωση. Τα βασικά φαινόμενα που παρατηρούνται κατά τη κατείσδυση κατακρημνισμάτων έχουν ως εξής:

Ένα μέρος από το νερό που διαπερνά την επιφάνεια του εδάφους κατ' αρχή θα συμπληρώσει το έλλειμμα υγρασίας των στρωμάτων από τα οποία θα περάσει και ονομάζεται «νερό κατακράτησης».

Το υπόλοιπο θα κινηθεί προς τα κάτω (λόγω βαρύτητας) και είτε θα προστεθεί στο υπάρχον υπόγειο νερό των υδροφόρων στρωμάτων ή θα κινηθεί στα επιπόλαια τμήματα του εδάφους και θα επανέλθει στην επιφάνεια πριν φθάσει στους υπόγειους υδροφόρους ορίζοντες και ονομάζεται «νερό βαρύτητας».

Η συνολική ποσότητα νερού που κατεισδύει ονομάζεται «ολική κατείσδυση $r_{ολ}$ ». Ουσιαστικά όμως, μόνο μία μικρή ποσότητα νερού φθάνει στους υπόγειους υδροφορείς και παραμένει σε αυτά τα στρώματα, σύμφωνα με τα παραπάνω, και ονομάζεται «ενεργή κατείσδυση $r_{εν}$ ».

Η κίνηση του υπογείου νερού θεωρούμενη αυτή καθ' αυτή, ανεξάρτητα από τις γεωλογικές δομές είναι μία ιδιότυπη ροή, πρακτικά ασυμπίεστη και, μέσα σε κορεσμένα υδροφόρα, είναι πρακτικά μονοφασική. Αυτό σημαίνει ότι το ρέον υγρό, το νερό, είναι πρακτικά ασυμπίεστο και αποτελεί πρακτικά τη μοναδική ρέουσα φάση (περιπτώσεις διφασικών ροών συναντώνται σπάνια και τριφασικών σπανιότερα). Για το λόγο αυτό η μελέτη της υπόγειας ροής νερού θα πρέπει ουσιαστικά να στηρίζεται στις βασικές αρχές και στους νόμους της Υδραυλικής και ιδιαίτερα της Υδροδυναμικής, που προκύπτουν άμεσα ή έμμεσα από τις μηχανικές ιδιότητες του νερού (των υγρών γενικότερα). Αυτές οι μηχανικές ιδιότητες προκύπτουν με τη σειρά τους από την εσωτερική δομή του νερού ως υγρού (Μουτσόπουλος, 2008).

1.2 Αναδρομή στην υδραυλική περιγραφή των υπογείων υδάτων

Όπως προαναφέρθηκε, η ανατροφοδότηση των υπόγειων υδροφορέων πραγματοποιείται μέσω της διείσδυσης του νερού (π.χ. συλλογή στραγγισμάτων σε χώρους υγειονομικής ταφής ή τροφοδοσία από την κατείσδυση του επιφανειακού νερού που διηθείται στο έδαφος). Στην περίπτωση της ανατροφοδότησης, η διείσδυση του νερού κινείται κατακόρυφα ως ακόρεστη ροή έως ότου να συναντήσει τα κορεσμένα υπόγεια ύδατα, όπου η ροή του ρευστού (νερό) είναι σχεδόν παράλληλη ως προς τη βάση του υδροφόρου ορίζοντα. Σε κάθε περίπτωση η πραγματική περιγραφή των συνθηκών επαναφόρτισης του υδροφορέα είναι πολύπλοκη, ωστόσο το πρόβλημα συνήθως απλοποιείται κατά τη μοντελοποίηση του στην κλίμακα του χώρου (και του χρόνου) αγνοώντας την ακόρεστη ροή καθώς επίσης και θεωρώντας γνωστό το ρυθμό επαναφόρτισης του ενώ επιπλέον η κατανομή της πίεσης θεωρείται υδροστατική.

Εστιάζοντας στην ευρύτερη θεωρία του θέματος, στην πράξη χρησιμοποιείται η ευρέως διαδεδομένη προσέγγιση των *Dupuit-Forchheimer* (Βασιλακόπουλος, 2010), όπως εφαρμόστηκε το 1877 από τον Boussinesq (*Boussinesq*, 1877) και όπως επεκτάθηκε για κεκλιμένους υδροφορείς στη δεκαετία του 1960 από τους Henderson and Wooding (*Henderson and Wooding* 1964; *Wooding and Chapman* 1966; *Childs* 1971; *Chapman* 1980). Οι μνημειώδεις αυτές εργασίες αποτελούν σταθμό στην υδραυλική περιγραφή της ροής σε

υπόγειους υδροφορείς και στην ουσία είναι η βασική θεωρητική πηγή στη φυσική προσέγγιση και μοντελοποίηση του προβλήματος μέχρι και σήμερα. Γενικότερα η υπόθεση της μη αποκλίνουσας οριζόντιας ροής ισχύει όταν το πάχος του υδροφορέα είναι σημαντικό μικρότερο, συγκρινόμενο με τις οριζόντιες διαστάσεις αυτού. Η υπόθεση αυτή, εφαρμόζεται κυρίως στους φρεάτιους υδροφορείς και είναι γνωστή ως υδραυλική θεωρία *Dupuit-Forchheimer* για τη ροή υπόγειων υδάτων. Σύμφωνα με τη παραδοχή αυτή, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις ως προς το βάθος καταργείται η εξάρτηση από την κάθετη συντεταγμένη. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι σε καλή προσέγγιση το υδραυλικό ύψος καθ' ύψος μιας ορθής διατομής είναι σταθερό και ίσο προς το ύψος της φρεατικής επιφάνειας. Το γεγονός αυτό απλοποιεί σημαντικά τη μαθηματική ανάλυση της ροής και πρακτικά ισοδυναμεί με την θεώρηση κατακόρυφων ισοδυναμικών γραμμών και πιεζομετρικού φορτίου ανεξάρτητου από την κατακόρυφη συνιστώσα της κίνησης. Συμπερασματικά, γίνεται η παραδοχή ότι η ροή είναι βασικά οριζόντια (παράλληλη στη βάση του υδροφορέα) και αγνοούνται οι κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας οι οποίες συνδέονται με ακόρεστη ροή. Η μη γραμμικότητα όμως της συγκεκριμένης εξίσωσης του *Boussinesq* αποτελεί τον κύριο ανασταλτικό παράγοντα για τη μη δυνατή αναλυτική λύση της εξέλιξης του προφίλ του βάθους νερού, το οποίο ρέει σε ένα υπόγειο υδροφορέα. Στην εφαρμοσμένη υδρολογία, ωστόσο, πρωταρχικής σημασίας μέγεθος που σχετίζεται με τα φυσικά χαρακτηριστικά ενός υπόγειου υδροφορέα, είναι η χρονική εξέλιξη της απορροής $Q = q(x = L)$, δηλαδή η συνάρτηση $Q = Q(t)$ και όχι αυτή καθ' αυτή η γνώση της ακριβούς εξέλιξης των βαθών. Την ίδια στιγμή, βάση της ισχύουσας υδραυλικής θεωρίας, η γνώση της χρονικής εξέλιξης της απορροής θα μπορούσε να αποδεσμευτεί από τον υπολογισμό των βαθών, αφού η παραπάνω είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ολοκληρωμένη πληροφορία (μέσο βάθος) στον υπόγειο υδροφορέα και όχι με την τοπική πληροφορία σχετικά με το ακριβές προφίλ του νερού. Ενδεχομένως λοιπόν, η εκτίμηση της απορροής θα μπορούσε να αποτελέσει ένα πιο προσιτό μαθηματικό πρόβλημα σε σχέση με τον ακριβή προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης του προφίλ του νερού σε συνθήκες δυναμικής μη μόνιμης ροής.

Βάση των παραπάνω, θεωρείται φυσικό να επικεντρωθούμε στην εύρεση θεωρητικώς στοιχειοθετημένων υδραυλικών συμπληρωματικών εκφράσεων της συνάρτησης $Q=Q(t)$, η οποία είναι προτιμότερη από τη σκοπιά της υδρολογικής πρακτικής, παρά να εκφραστούν τα προφίλ του βάθους νερού στις ενδιάμεσες καταστάσεις. Θεωρητικές ημι-εμπειρικές εκφράσεις της συνάρτησης $Q(t)$ υφίστανται από τον καιρό του ίδιου τον *Boussinesq*, όπου όπως συνοψίζει ο *Tallasken* (1995), η θεωρητική του εργασία επί του θέματος χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο σε ολόκληρο τον τελευταίο αιώνα για την ανάλυση της ροής

σε ένα υπόγειο υδροφορέα. Στη σχετικά πρόσφατη βιβλιογραφία ιδιαίτερη σημασία έχει το έργο των *Brutsaert and Nieber* (1977), οι οποίοι εφήρμοσαν θεωρητικές ημι-εμπειρικές εκφράσεις για την εκροή και για την εκτίμηση των μεγάλης κλίμακας υδραυλικών παραμέτρων του υδροφορέα, αξιοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις της εκροής κατά *Boussinesq* (1903, 1904) και *Polubarinova-Kochina* (1962) και τα ημι-εμπειρικά μοντέλα που είναι εμπνευσμένα από αυτούς.

Η διατήρηση της μάζας ή του όγκου αποτελεί τη βασική αρχή, οποία στην στηρίζονται οι περισσότερες προσεγγίσεις για την έκφραση της συνάρτησης εκροής $Q(t)$. Θεωρητικά η αρχή αυτή είναι ενσωματωμένη στην εξίσωση του *Boussinesq* και οποιοδήποτε θεωρητικό αποτέλεσμα σχετικά με τη συνάρτηση $Q(t)$ είναι αναπόφευκτα συσχετισμένο με την αρχή αυτή ανεξάρτητα από το μονοπάτι προέλευσης της. Από μαθηματικής απόψεως, η διατήρηση του όγκου εκφράζεται από την εξίσωση του ισοζυγίου, η οποία είναι:

$$\frac{dS}{dt} + Q = \text{inflow} + \text{recharge} \quad (1.1)$$

Η παράμετρος S εκφράζει την αποθήκευση του νερού στον υδροφόρο ορίζοντα και το Q είναι η τρέχουσα απορροή. Η εισροή και η επαναφόρτιση χαρακτηρίζονται ως μη μεταβλητές παράμετροι της ροής, όπως και η γεωμετρία του υπόγειου υδροφορέα. Ως εκ τούτου, μόνον η γνώση της σχέσης μεταξύ των παραμέτρων S και Q είναι αναγκαία, ή αλλιώς η σχέση αποθηκευτικότητας-εκροής (ή $S-Q$ σχέση όπως θα την αποκαλούμε) είναι απαραίτητη, προκειμένου να καθοριστεί πλήρως η συνάρτηση $Q(t)$. Αντιστρόφως, αν ο υπολογισμός της συνάρτησης απορροής γίνεται με διαφορετικό τρόπο, πάντα εξυπηρετεί να γίνεται μετασχηματισμός της συνάρτησης απορροής σε μορφή που να περιλαμβάνει την $S-Q$ σχέση. Δύο κυρίως ημι-εμπειρικές σχέσεις έχουν χρησιμοποιηθεί έως σήμερα σε αυτήν την κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, η θεώρηση γραμμικής σχέσης μεταξύ των παραμέτρων $S-Q$ χωρίς να υφίσταται επαναφόρτιση ή αρχική εισροή στον υπόγειο υδροφορέα οδηγεί σε μία εκθετικώς φθίνουσα εκροή. Σε μία τέτοιου είδους έκφραση οδηγήθηκε ο *Boussinesq* (1903) με την αγνόηση του μη-γραμμικού όρου στην εξίσωση του. Το συγκεκριμένο μοντέλο καλείται ως γραμμικό μοντέλο αποθήκευσης. Αντίστοιχα, η θεώρηση τετραγωνικής εξάρτησης $Q \propto S^2$ οδηγεί, όταν δε λαμβάνει χώρα επαναφόρτιση ή εισροή, σε τετραγωνικό εκθετικό νόμο της απορροής. Και αυτό το μοντέλο επίσης προτάθηκε από τον *Boussinesq* (1904), που έδειξε ότι μπορεί αν προέλθει από μία πολύ ειδική «στενή» λύση της εξίσωσης του *Boussinesq* – στην περίπτωση της εφαρμογής χωριζόμενων μεταβλητών – για έναν

οριζόντιο υδροφορέα. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως τετραγωνικό μοντέλο της αποθήκευσης. Και τα δύο παραπάνω μοντέλα έχουν ιδιαίτερη πρακτική σημασία, όπως έχει αποδειχθεί από τον *Maillet* (1905). Λόγω της απλότητας του, το γραμμικό μοντέλο αποθήκευσης ή αλλιώς «γραμμικός ταμιευτήρας», (που χρησιμοποιείται συνήθως λόγω γραμμικότητας με υπέρθεση λύσεων σε περιπτώσεις μεταβλητής φορτίσεως) είναι το πιο διαδεδομένο μοντέλο της μηχανικής υδρολογίας. Το συγκεκριμένο μοντέλο το οποίο εισήχθη από τον *Barnes* (1939) έχει αναθεωρηθεί πολλές φορές στη θεωρητική του βάση, όπως για παράδειγμα η αναθεώρηση του *Tallasken* (1995), και κυρίως από τους *Werner and Sundquist* (1951).

Αντίστοιχα, το τετραγωνικό μοντέλο αποθήκευσης συγκαταλέγεται στην πιο γενική κατηγορία των μη γραμμικών μοντέλων, οπότε η σχέση μεταξύ των παραμέτρων $S-Q$ έχει εκφρασθεί από τον *Coutagne* (1968), όπου $Q \propto S^n$, όπου n είναι μία σταθερά. Παρόλα αυτά, όπως ήδη έχει αναφερθεί, η χρησιμότητα του έχει αναγνωριστεί προ πολλού και δόθηκε σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση εμπειρικά και θεωρητικά, όπως για παράδειγμα από στις εργασίες των *Werner and Sundquist* (1951), *Chapman* (1963), *Ishihara and Takagi* (1965), *Singh* (1969), και *Brutsaert and Nieber* (1977), *Ambroise* (1988), *Wittenberg* (1994, 1999).

Στη συγκεκριμένη εργασία εξετάζονται οι υπόγειοι υδροφορείς υπό κλίση και κατ' επέκταση οι παράμετροι που αντικατοπτρίζουν τα χαρακτηριστικά των παραπάνω και από τις οποίες εξαρτάται η συμπεριφορά της ροής των υδάτων εντός αυτών. Παράλληλα εξετάζεται ο ρυθμός επαναφόρτισης των υπόγειων υδροφορέων και ο ρυθμός εκροής αυτών. Η γνώση της συμπεριφοράς της ροής των υπόγειων υδροφορέων υπό κλίση θεωρείται σήμερα ιδιαίτερα σημαντική, αφού πλέον η μόλυνση των υπόγειων υδροφορέων σε περιοχές υγειονομικής ταφής έχει λάβει απειλητικές διαστάσεις και η εισροή μολυσμένων υδάτων σε αυτούς έχει ως αποτέλεσμα την σημαντική υποβάθμιση των εναπομεινάντων πόρων πόσιμου ύδατος. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται προσπάθεια μαθηματικής μοντελοποίησης και επίλυσης του προβλήματος της ροής σε υπόγειο κεκλιμένο υδροφορέα με επαναφόρτιση. Η μελέτη επικεντρώνεται στην υδραυλική περιγραφή του προβλήματος θεωρώντας απαιτούμενες τις στοιχειοθετημένες προσεγγίσεις ομοιομορφίας στη φυσική αναπαράσταση του υδροφορέα, με στόχο την ολοκληρωμένη μαθηματική περιγραφή της φυσικής τους συμπεριφοράς. Τα αποτελέσματα της μελέτης βοηθούν στη βαθύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς των υπόγειων ροών και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία επιμέρους μοντελοποίησης σε ευρύτερο υδρολογικό σχεδιασμό.

1.3 Δομή της εργασίας

Στην παρούσα εργασία, τόσο το γραμμικό όσο και το τετραγωνικό μοντέλο θα επανεμφανιστούν προερχόμενα από μία νέα και πρωτότυπη θεωρητική διαδρομή. Τα μόνα συστατικά στο σχηματισμό των παραπάνω είναι η ακριβής μη-γραμμική εξίσωση του *Boussinesq* που θα αναπτυχθεί στο 2^ο κεφάλαιο και η υπόθεση της οιονεί μόνιμης (ημι-μόνιμης) κατάστασης ισορροπίας που θα εφαρμοστεί διεξοδικά και με πρωτότυπο τρόπο στο 3^ο κεφάλαιο της μελέτης αυτής. Υποθέτοντας μία σχέση μεταξύ των παραμέτρων *S-Q* υπαγορεύεται ένα είδος καταστατικής εξίσωσης που περιγράφει τη ροή σε ένα υπόγειο υδροφορέα, η οποία βασίζεται στη σύζευξη εμπειρικών ιδεών και αμιγούς υδραυλικής θεωρίας. Η θεώρηση της οιονεί κατάστασης ισορροπίας ορίζει μία τέτοια σχέση μεταξύ των παραμέτρων *S-Q*, ώστε να διατηρείται το σύστημα σε υποθετική συνεχή κατάσταση ισορροπίας. Η παραδοχή που γίνεται είναι, πως οι μεταβατικές – ενδιάμεσες καταστάσεις δύναται να περιγραφθούν από μία σειρά διαδοχικών καταστάσεων ισορροπίας (*Akylas et al.*, 2006; 2007; 2012, *Akylas and Koussis* 1998). Η θεώρηση αυτή έχει μία μακρά ιστορία στην υδρολογία και την επιστήμη γενικότερα και τα τελευταία χρόνια έχει τύχει ιδιαίτερης χρήσης στην υδρολογία. Ακολουθώντας τους *Beven and Kirkby* (1979), το γραμμικό μοντέλο αποθήκευσης μόνον χρησιμοποιείται ως μοντέλο για τον υπολογισμό του συγκεντρωμένου όγκου σε θεώρηση οιονεί κατάστασης ισορροπίας. Αντίθετα, σύμφωνα με τη μαθηματική ανάλυση που θα παρουσιαστεί στα επόμενα κεφάλαια, εμείς θεωρούμε ότι θα έπρεπε να ακολουθηθεί η συγκεκριμένη θεωρία στο σύνολο της, χωρίς άλλες υποθέσεις ή εννοιολογικές προσεγγίσεις. Αυτό είναι δυνατόν εφόσον η ενιαία θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί ακριβώς στις λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης του *Boussinesq*, όπως αυτές επιλύθηκαν για την περίπτωση της κατάστασης ισορροπίας από τους (*Henderson and Wooding*, 1964). Η λύση των *Henderson and Wooding* διαθέτει δύο συγκεκριμένους κλάδους που οδηγούν σε πολύ διαφορετική μαθηματική έκφραση ανάλογα με τις σταθερές και παραμέτρους του προβλήματος.

Στο 3^ο κεφάλαιο αποδεικνύεται πως σε περιπτώσεις μεγάλων κλίσεων ή χαμηλού ρυθμού επαναφόρτισης, η σχέση μεταξύ των παραμέτρων *S-Q* είναι γραμμική, ενώ σε περιπτώσεις μικρών κλίσεων ή μεγάλων ρυθμών επαναφόρτισης, η σχέση των προαναφερθέντων παραμέτρων αντικαταθίσταται από μία ασυμπτωτική μορφή του τύπου $Q-S^2$. Είναι σαφές, πως εφόσον οι δύο παραπάνω σχέσεις απορρέουν από την εξίσωση του *Boussinesq*, δεν υφίστανται επιπλέον παράμετροι, παρά μόνον οι φυσικές του προβλήματος. Σε αντίθεση

δηλαδή με την ημι-εμπειρική προσέγγιση παρελθοντικών εργασιών πάνω στο γραμμικό και τετραγωνικό μοντέλο, σε αυτήν την εργασία προκύπτουν θεωρητικά στοιχειοθετημένες ολοκληρωμένες υδραυλικές σχέσεις χωρίς την ύπαρξη εμπειρικότητας. Αυτά τα μοντέλα μπορούν να εφαρμοστούν ενιαία εντός των ορίων ισχύος τους. Φυσικά, όπως είναι φυσικό αναμένεται να έχουν καλύτερες επιδόσεις (μικρότερη αβεβαιότητα) στα συστήματα με συνδυασμούς παραμέτρων που συνδέονται με αυτά.

Από τη στιγμή που μορφοποιούνται τα δύο συγκεκριμένα υδραυλικά μοντέλα, ένα υδρολογικό υβριδικό εμπειρικό μοντέλο που ακολουθεί την αρχή διατήρησης της μάζας μπορεί εύκολα να σχεδιασθεί ως γραμμική παρεμβολή των δύο παραπάνω κλάδων που αναλύθηκαν, όπως αναπτύσσεται στο 4^ο Κεφάλαιο. Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμεύσει ως ένα ευέλικτο εργαλείο που μπορεί να αμβλύνει τις αβεβαιότητες που υφίστανται στις βασικές θεωρητικές προσεγγίσεις μας, δηλαδή της οιονεί κατάστασης ισορροπίας αλλά και τις παραδοχές που εμπλέκονται στην ίδια την εξίσωση του *Boussinesq*, καθώς και τις αβεβαιότητες των πραγματικών δεδομένων. Το υβριδικό μοντέλο, ή *w*-μοντέλο, όπως θα αποκαλείται, διαθέτει μια ελεύθερη παράμετρο, το βάρος *w* που καθορίζει τη γραμμική παρεμβολή, και παρέχει μία ομάδα υδρογραφημάτων, τα οποία σε πολύ υψηλό βαθμό επιτυγχάνουν την παραμετροποίηση πραγματικών υδρογραφημάτων. Το βάρος *w* καθορίζεται από χαρακτηριστικές ιδιότητες του υδρογραφήματος, όπως τον συνολικό όγκο του νερού που αποβάλλεται ή απορροφάται από το έδαφος. Κατά σύμπτωση, ένα παρόμοιου τύπου μοντέλο χρησιμοποιήθηκε και από τους *Ishihara and Takagi* (1965), με τελείως όμως εμπειρική εφαρμογή, θεωρώντας ότι η συνάρτηση απορροής είναι ένα εντελώς εμπειρικό άθροισμα του γραμμικού και του τετραγωνικού ταμειυτήρα σε περιπτώσεις αποφόρτισης. Στη δική μας περίπτωση το προτεινόμενο υδρολογικό μοντέλο πέραν του ότι είναι πλήρως τεκμηριωμένο από φυσική άποψη, έχει την ελάχιστη δυνατή εμπειρικότητα, και μπορεί να περιγράψει με ιδιαίτερη ακρίβεια γνωστά πειραματικά δεδομένα, όπως ελπίζουμε ότι θα αποδειχθεί.

2. Υδραυλική θεώρηση υπόγειου υδροφορέα

Επικεντρώνοντας στο πρόβλημα της ροής σε υπόγειο κεκλιμένο υδροφορέα, αρχικά πραγματοποιείται επεξήγηση όλων των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν ένα υπόγειο υδροφορέα. Επίσης αναλύονται οι παράγοντες που λαμβάνουν χώρα ως προς την ανατροφοδότηση αυτού και πώς όλοι οι παραπάνω επηρεάζουν τη συμπεριφορά της ροής εντός ενός υπόγειου υδροφορέα. Συγκεκριμένα, η ασταθής ή μη μόνιμη κίνηση του νερού στα ελεύθερα υδροφόρα στρώματα περιγράφεται από μία μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση, η οποία καλείται εξίσωση του *Boussinesq* (1904). Μία γενική μορφή της εξίσωσης που περιγράφει τη ροή διαμέσου ενός ελεύθερου υδροφόρου στρώματος (Σχήμα 2) σε δύο διαστάσεις εκφράζοντας τη διατήρηση της μάζας είναι (Βασιλακόπουλος, 2010):

$$\frac{\partial}{\partial x} (hK_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (hK_z \frac{\partial h}{\partial z}) = n \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.1)$$

Οι παράμετροι που εμφανίζονται στην παραπάνω εξίσωση και κάποιες επιπλέον που θα μας απασχολήσουν στο σύνολο της ανάλυσης μας είναι οι παρακάτω:

Πιεζομετρικό ύψος ή αλλιώς πιεζομετρικό φορτίο (h): Πρακτικά είναι η ενέργεια ίση με το άθροισμα του φορτίου πίεσης P/γ και του φορτίου ύψους (ή υψομετρικό ή θέσης) της απόστασης δηλαδή από το επίπεδο αναφοράς z . Συγκεκριμένα $h = (P/\gamma) + z$, όπου P είναι η υδροστατική πίεση και γ το ειδικό βάρος του νερού ίσο με την πυκνότητά του επί την επιτάχυνση της βαρύτητας. Επίσης μετράται κάθετα από την επιφάνεια του αδιαπέρατου στρώματος του υπεδάφους του υδροφόρου ορίζοντα (προς τα πάνω) και έχει διαστάσεις L^1 .

Υδραυλική αγωγιμότητα (K): Η υδραυλική αγωγιμότητα (*hydraulic conductivity*) ονομάζεται η ιδιότητα των πετρωμάτων και σχηματισμών να επιτρέπουν την κίνηση των υγρών δια μέσου αυτών. Ένα μέσο έχει υδραυλική αγωγιμότητα ίση με τη μονάδα, όταν μεταβιβάζει στη μονάδα του χρόνου κάθετα στη διεύθυνση της υπόγειας ροής, τη μονάδα του όγκου νερού από μοναδιαία διατομή με υδραυλική κλίση ίση με τη μονάδα και την επικράτηση του κινηματικού ιξώδους. Μέτρο της υδραυλικής αγωγιμότητας (περατότητας) είναι ο συντελεστής υδραυλικής αγωγιμότητας και έχει διαστάσεις ταχύτητας LT^{-1} . Στη γενικότητα η υδραυλική αγωγιμότητα εξαρτάται από την κατακόρυφη και την οριζόντια χωρική συνιστώσα (K_x και K_z).

Πορώδες (n): Ορισμένοι εδαφικοί και γενικότερα γεωλογικοί σχηματισμοί επιτρέπουν τη διείσδυση αλλά και την κυκλοφορία του νερού μέσω αυτών. Από υδραυλική άποψη εντάσσονται στη γενική κατηγορία του πορώδους μέσου. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν ιζηματογενή, μη πλήρως στερεοποιημένα εδάφη, ή και στερεοποιημένα πετρώματα που έχουν όμως αποκτήσει ρωγμές, είτε από χημική διάβρωση (ασβεστόλιθοι) είτε από ρηγμάτωση (εκρηξιγενή, μεταμορφωσιγενή). Τα πορώδη μέσα χαρακτηρίζονται από τις στατικές και τις δυναμικές υδραυλικές ιδιότητες τους. Ως δεξαμενές νερού έχουν κύριο χαρακτηριστικό τη χωρητικότητα τους, ενώ ως γνωστοί αγωγοί διέλευσης νερού χαρακτηρίζονται από τις αντιστάσεις που προβάλλουν στην κίνηση του νερού. Το πορώδες (*n*) ή ολικό πορώδες (*porosity*) είναι ένα μέτρο των διακένων (πόρων, κενών, ρωγμών) που υπάρχουν σε ένα πέτρωμα ή έδαφος και εκφράζεται με το λόγο του συνολικού όγκου των διακένων (V_K) προς τον συνολικό όγκο του πετρώματος εδάφους ($V_{ολ}$): $n = V_K/V_{ολ}$. Όπως διαφαίνεται βάση των παραπάνω δεν υφίσταται απόλυτα συμπαγές πέτρωμα, δηλαδή συμπαγής στερεά φάση προκειμένου για δείγμα με διαστάσεις της τάξης των μερικών m^3 ή μερικών δεκάδων m^3 . Αντίθετα οι σχηματισμοί παρουσιάζουν περισσότερο ή λιγότερο ασυνέχειες, πόρους και γενικά κενά διαφόρων τύπων. Ο βαθμός και η ένταση με τα οποία παρουσιάζονται αυτά τα κενά εκφράζεται με μία υδρογεωλογική παράμετρο, το πορώδες.

ρυθμός επαναφόρτισης (r): Ο ρυθμός φόρτισης των υδάτων του υπόγειου υδροφορέα λόγω κατείσδυσης (*recharge*) και έχει διαστάσεις ταχύτητας LT^{-1} .

Απορροή (q): Η όγκος ρέοντος στο υδροφόρο στρώμα νερού ανά μονάδα χρόνου, η οποία λαμβάνεται θετική στην περίπτωση επαναφόρτισης και αρνητική στην περίπτωση εκφόρτισης και έχει διαστάσεις L^2T^{-1} . Στην περίπτωση μελέτης του συγκεκριμένου μεγέθους στο σημείο εξόδου του υδροφορέα αναφερόμαστε στη συνολική απορροή ανά μονάδα χρόνου (*outflow*).

Κλίση (ϕ): είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του επιπέδου του υδροφόρου ορίζοντα και του οριζόντιου επιπέδου.

Μήκος (L): είναι το μήκος του υδροφόρου ορίζοντα και έχει διαστάσεις L^1 .

Οι βασικές παραδοχές που ισχύουν για την εξαγωγή της παραπάνω εξίσωσης είναι οι εξής:

Το έδαφος είναι ανισότροπο. Για αυτό άλλωστε υπάρχουν διάφορες διοχετευτικότητες κατά τη x και z διευθύνσεις.

Το νερό είναι ασυμπίεστο.

Η κίνηση του νερού είναι αργή.

Ισχύει για κάθε στιγμή και θέση ο νόμος του Darcy.

Η κλίση του υδραυλικού φορτίου είναι ίση με την κλίση της υπόγειας στάθμης.

Η ροή είναι οριζόντια και ομοιόμορφη σε όλα τα σημεία μιας κατακόρυφης διατομής.

Οι δύο τελευταίες παραδοχές είναι γνωστές βάση των παραπάνω, ως παραδοχές των *Dupuit – Forchheimer* (D-F), και οδηγούν στη βασική διαφορική περιγραφή του προβλήματος. Για την πλήρη μαθηματική περιγραφή απαιτείται εκτός από την κατάλληλη διαφορική εξίσωση και οι συμπληρωματικές συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή η αρχική και οι οριακές συνθήκες. Με τη σωστή επιλογή των βασικών διαφορικών εξισώσεων και με τις κατάλληλες συνθήκες, το μαθηματικό ομοίωμα του φυσικού προβλήματος είναι σε θέση να δώσει μια γενική λύση που να αποδίδει τα υδραυλικά φορτία σε όλη την έκταση του υδροφόρου στρώματος και για όλους τους χρόνους.

Σε κάθε περίπτωση, το νερό ενός υδροφόρου στρώματος κινείται προς την κατεύθυνση του μικρότερου δυναμικού με ταχύτητα που είναι ανάλογη προς την κλίση του δυναμικού και την υδραυλική αγωγιμότητα του υδροφόρου στρώματος. Η ροή του υπόγειου νερού μπορεί να διακριθεί:

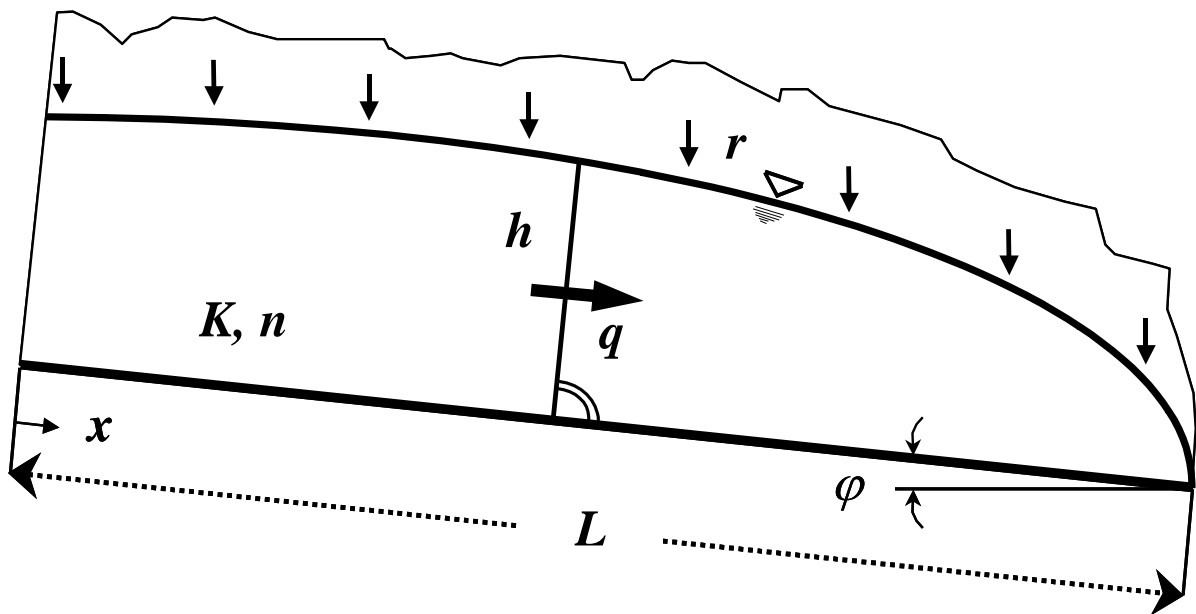
Σταθερή ή μόνιμη ροή, όταν οι εξαρτημένες μεταβλητές της είναι συναρτήσεις μόνο των συντεταγμένων του χώρου.

Ασταθή ή μη μόνιμη ροή, όταν οι εξαρτημένες μεταβλητές της είναι συναρτήσεις και του χρόνου.

Στις επόμενες ενότητες γίνεται προσπάθεια για τη μαθηματική μοντελοποίηση του υπόγειου υδροφορέα και την εκτίμηση των δύο τύπου ροών που αναφέρθηκαν παραπάνω.

2.1 Κορεσμένη ροή σε υπόγειο υδροφορέα

Στο Σχήμα 2, περιγράφεται η βασική διαδικασία με την οποία ένας υδροφόρος ορίζοντας λειτουργεί, δηλαδή τη διαδικασία εισροής και απορροής υδάτων, με ενδιάμεση κατάσταση πλήρους κορεσμού στην οποία όλοι οι πόροι του εδάφους είναι πληρωμένοι από νερό και θεωρώντας το κατώτατο επίπεδο του υδροφορέα αδιαπέρατο. Η περιγραφή της ροής καθορίζεται από τις τιμές των συγκεκριμένων φυσικών παραμέτρων, οι οποίες αναλύθηκαν.



Σχήμα 2. Τομή κεκλιμένου στρώματος εδάφους υπό τη διαδικασία εισροής και εκροής υδατικών μετεωρολογικών κατακρημνισμάτων, με παραδοχές ομοιομορφίας στη γεωμετρία και τις φυσικές υδραυλικές παραμέτρους.

Υποθέτοντας ομοιομορφία στην κατακόρυφη και οριζόντια διεύθυνση, σύμφωνα με τους *Wooding* και *Chapman* (1966), η ροή ανά μονάδα πλάτους, για κάθε χρονική στιγμή t και για κάθε θέση x δίνεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση (*Akylas et al.*, 2006; 2007)

$$q(x,t) = h(x,t)K(S - \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \cos \varphi) \quad (2.2)$$

όπου με S συμβολίζουμε το $\sin \varphi$. Η εξίσωση της συνέχειας (εξίσωση διατήρησης της μάζας) εκφράζει ότι η συνολική ποσότητα των υδάτων που εισρέουν σε οποιοδήποτε σημείο του υδροφορέα τοπικά, $r \cos \varphi + r \partial h(x,t) / \partial x \sin \varphi$, ισούται με το άθροισμα της ποσότητας των

υδάτων που απορρέουν, $\partial q(x,t)/\partial x$, συν τη μεταβολή της αποθηκευτικότητας, $n\partial h(x,t)/\partial t$ και στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$n \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = r \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \sin \varphi + r \cos \varphi \quad (2.3)$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση (2.2) και την εξίσωση (2.3), προκύπτει η ακόλουθη έκφραση, η οποία είναι η γενικευμένη εξίσωση του *Boussinesq* (1877) που περιγράφει την ανεμπόδιστη ροή σε κεκλιμένο επίπεδο. Το δεξί μέρος της εξίσωσης προκύπτει από το πολλαπλασιασμό του διανύσματος της επαναφόρτισης επί το μοναδιαίο διάνυσμα της ελεύθερης επιφάνειας (*Wooding and Chapman, 1966; Chapman, 2003*).

$$n \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + K \left(1 - \frac{r}{K} \right) S \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} - \cos \varphi K \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x,t) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \right) = r \cos \varphi \quad (2.4)$$

Οι *Henderson* και *Wooding* (1964) αγνοώντας το τελευταίο μέρος της εξίσωσης (2.3) και προσεγγίζοντας το $1-r/K = 1$, απλοποίησαν την προηγούμενη εξίσωση στην παρακάτω:

$$n \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + K \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} S - \cos \varphi K \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x,t) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \right) = r \cos \varphi \quad (2.5)$$

Είναι προφανές πως για την περίπτωση της κατάστασης ισορροπίας – σταθερής κατάστασης (*steady-state*), ο πρώτος όρος της εξίσωσης (2.5) μηδενίζεται, αφού κανένα στοιχείο της ροής (ταχύτητα, παροχή, πιεζομετρική επιφάνεια κ.α.) δεν μεταβάλλεται με τη πάροδο του χρόνου. Η παραπάνω εξίσωση έχει υιοθετηθεί ευρέως και ισχύει εφόσον $r/K \ll 1$ (για παράδειγμα για $t = 24\text{mm/day}$ και $K = 2.5 \text{ m/day}$, $r/K \approx 0.01$). Ο *Chapman* (2003) πραγματοποίησε μία εξαιρετική ανασκόπηση των ισχυουσών εξισώσεων, καθώς επίσης πραγματοποίησε σύγκριση της επίλυσης της εξίσωσης (2.4) με γραμμικές προσεγγίσεις της. Από την παραπάνω εργασία φάνηκε πως τα αποτελέσματα διαφέρουν σημαντικά μόνο για μεγάλες τιμές του r/K (δηλαδή $r/K \geq 0.1$). Αντίθετα για τιμές $r/K < 0.05$ και λαμβάνοντας υπόψη την αβεβαιότητα των τιμών των k_{sat} και n , τα αποτελέσματα ήταν παραπλήσια για τις περισσότερες περιπτώσεις. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η λύση των εξισώσεων (2.4-2.5) για την περίπτωση μόνιμης ροής.

2.2 Διαστατική ανάλυση της εξίσωσης μόνιμης ροής

Για τη γενική περιγραφή του προβλήματος θα χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες αδιάστατοι παράμετροι:

$$X = \frac{x}{L}, \quad T = \frac{t(rK)^{1/2} \cos \varphi}{nL}, \quad H = \frac{h}{L} \left(\frac{K}{r} \right)^{1/2}, \quad Q = \frac{q - rSh}{rL \cos \varphi},$$

$$\rho = \frac{r}{K}, \quad m = (1 - \rho) \tan \varphi \left(\frac{K}{r} \right)^{1/2}$$
(2.6)

Η παραπάνω αδιαστατοποίηση ισχύει για τις περιπτώσεις, όπου το φορτίο τροφοδότησης των υδροφόρων οριζόντων είναι μεγαλύτερο του μηδενός, $r > 0$, και η γωνία κλίσεως $\varphi < 90^\circ$. Χρησιμοποιώντας, τις παραπάνω αδιάστατες παραμέτρους στην (2.2), προκύπτει η παρακάτω εξίσωση της αποφόρτισης - απορροής των υπόγειων υδροφορέων

$$Q(X, T) = H(X, T) \left(m - \frac{\partial H(X, T)}{\partial X} \right)$$
(2.7)

ενώ η εξίσωση συνέχειας (2.3), χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες παραμέτρους, μετατρέπεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial H(X, T)}{\partial T} + \frac{\partial Q(X, T)}{\partial X} - 1 = 0$$
(2.8)

Σε συνθήκες ισορροπίας, μηδενίζονται τα μέλη της παραπάνω εξίσωσης στα οποία πραγματοποιείται μερική παραγωγή ως προς το χρόνο, και επομένως η εξίσωση (2.8) διαμορφώνεται, όπως φαίνεται ακολούθως

$$\frac{\partial Q(X, T)}{\partial X} - 1 = 0$$
(2.9)

Με τον τρόπο αυτό, προκύπτει η εξίσωση για το αδιάστατο βάθος του υπόγειου υδροφορέα υπό συνθήκες μόνιμης ροής και ανεξάρτητα του χρόνου, αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.9) στην (2.8).

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(H \frac{\partial H}{\partial X} \right) - m \frac{\partial H}{\partial X} + 1 = 0 \quad (2.10)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις (2.7) έως (2.10), περιγράφουν και την απλοποιημένη περίπτωση που δίνεται από την εξίσωση (2.5), χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η διόρθωση του *Charman*, αλλάζοντας μόνος τις αδιάστατες παραμέτρους Q και m (2.6) σε $Q = q/rL\cos\varphi$ και $m = \tan\varphi(K/r)^{1/2}$ αντίστοιχα. Η αδιάστατη εξίσωση (2.10) καθορίζει ως παράγοντα ομοιότητας την αδιάστατη παράμετρο m . Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη (2.10) όλες οι περιπτώσεις για τις οποίες προκύπτει ίδια τιμή για την παράμετρο m , έχουν παρόμοια συμπεριφορά και την ίδια λύση χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες παραμέτρους που αναλύθηκαν στην (2.6). Η επίλυση της εξίσωσης (2.10) είναι γραμμική και οδηγεί (*Akylas et al.*, 2006) στο εξής

$$\int \frac{\partial}{\partial X} \left(H \frac{\partial H}{\partial X} \right) dx - m \int \frac{\partial H}{\partial X} dx + \int 1 dx = 0 \Rightarrow H \left(\frac{\partial H}{\partial X} - m \right) + X = C \quad (2.11)$$

όπου η C είναι σταθερά που προέκυψε από την ολοκλήρωση της εξίσωσης. Επικεντρώνοντας στη θέση $X = 0$, δηλαδή τη θέση $x = 0m$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, προκύπτει ότι η σταθερά C ταυτίζεται με τη ροή στο ανάντι όριο, Q_0 , δηλαδή

$$H \left(\frac{\partial H}{\partial X} - m \right) + X = Q_0 \quad (2.12)$$

όπου $C = Q_0$ και Q_0 είναι η τιμή της αδιάστατης παραμέτρου Q για τη θέση $x = 0$ ή $X = 0$. Η παραπάνω εξίσωση προφανώς επαληθεύει την κατάσταση ισορροπίας που εκφράζεται μέσω των εξισώσεων με αδιάστατες παραμέτρους για την απεικόνιση της απορροής του υπόγειου υδροφορέα, όπου και πιο συγκεκριμένα θα ισχύει

$$Q(X) = Q_0 + X \quad (2.13)$$

Ολοκληρώνοντας σε αυτό το σημείο τη μαθηματική αναπαράσταση της ροής σε κεκλιμένο υδροφορέα στα πλαίσια της θεωρίας *Dupuit-Forchheimer* θα συνεχίσουμε με τον υπολογισμό των προφίλ (κατατομών) του νερού που αναπτύσσονται σε κατάσταση μόνιμης ροής.

2.3 Λύση της μη γραμμικής εξίσωσης για την κατάσταση ισορροπίας

Η επίλυση για τη κατάσταση ισορροπίας (*non-linear steady state*) όταν $dh(x,t)/dt=0$ μπορεί δύναται να χρησιμοποιηθεί για διάφορες γραμμικές προσεγγίσεις μελέτης υπόγειων υδροφορέων. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση με απλοποιημένα γραμμικά μοντέλα της εξίσωσης (2.5) με στόχο την εκτίμηση των παραμέτρων τους και τον έλεγχο της καλής τους συμπεριφοράς (Beven 1981; Chapman 1995; 2003; 2005; Koussis and Lien 1982; Koussis 1992; Koussis et al. 1998; Akylas et al., 2006; 2007). Για τη μη γραμμική κατάσταση ισορροπίας αρχικά μετασχηματίζουμε τη χωρική μεταβλητή θέτοντας $X' = X+Q_0$, οπότε και βάσει της (2.13) θα ισχύει $Q_0 < X' < 1+Q_0$. Στο σημείο αυτό να επαναλάβουμε για λόγους καλύτερης εποπτείας ότι ο ορισμός της ροής στο ανάντη σημείο που αποτελεί και την πρώτη οριακή συνθήκη γίνεται με το σύμβολο $Q_0 = Q_{up}$ που εκφράζει την αρχική τιμή της παροχής στο σημείο $x = 0m$ (βλ. Σχήμα 2) στον υπόγειο υδροφορέα. Αντίστοιχα στην έξοδο του υδροφορέα η παροχή είναι $Q_{down}=1+Q_0=1+Q_{up}$ που εκφράζει την τιμή της παροχής στο σημείο $x = L$ (βλ. Σχήμα 2), δηλαδή το σημείο απορροής του υπόγειου υδροφορέα.

Παρατηρώντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς και την εξίσωση (2.13), συμπεραίνεται πως $Q = X'$. Στη συνέχεια διαμορφώνεται αναλόγως και η εξίσωση (2.12) ως

$$H \left(\frac{\partial H}{\partial X'} - m \right) + X' = Q_0 \quad \text{ή} \quad H \frac{\partial H}{\partial X'} - mH + X' = 0 \quad (2.14)$$

ενώ, προφανώς μετά το μετασχηματισμό ισχύει ότι $H_{down} = H(X'=1+Q_0)$. Η διαφορική εξίσωση (2.14) είναι ομογενής, ανεξάρτητη από αλλαγή της κλίμακας των δύο μεταβλητών. Παρακάτω, παρατίθενται οι γενικές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, όπως δόθηκαν από τους Henderson and Wooding (1964) στη γενική μορφή

$$F(H, X') = F_{down} = F_{up} \quad (2.15)$$

όπου $F_{down} = F(H_{down}, 1+Q_0)$ και $F_{up} = F(H_{up}, Q_0)$. Οι τιμές των παραπάνω λύσεων εξαρτώνται από την αδιάστατη μεταβλητή m , η οποία είναι συνάρτηση των μεταβλητών της υδραυλικής αγωγιμότητας (K) και του φορτίου τροφοδοσίας (r). Παρακάτω αναλύονται οι διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές της αδιάστατης παραμέτρου m για το διάστημα $[0,2)$ και $(2,\infty)$. Για τιμές της παραμέτρου $m < 2$ η επίλυση οδηγεί σε:

$$F(H, X') := \frac{m}{\sqrt{4-m^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\frac{2H}{X'} - m}{\sqrt{4-m^2}} \right) + \frac{1}{2} \log \left(1 - m \frac{H}{X'} + \frac{H^2}{X'^2} \right) + \log X' \quad (2.16)$$

ενώ για τιμές του $m > 2$ η επίλυση δίνει:

$$F(H, X') := \frac{|H/X' - m_1|^{m_1/(m_1-m_2)}}{|H/X' - m_2|^{m_2/(m_1-m_2)}} X' \quad (2.17)$$

όπου $m_1 = m/2 + \sqrt{m^2/4 - 1}$ και $m_2 = m/2 - \sqrt{m^2/4 - 1}$

Με βάση τα προηγούμενα, οι (2.16) και οι (2.17) είναι γενικές λύσεις που επιδέχονται ως οριακές συνθήκες οποιοσδήποτε τιμές για τις παραμέτρους Q_0 και $H(1)$. Στη συνέχεια ακολουθούν ειδικές λύσεις για την περίπτωση που πραγματεύεται η παρούσα εργασία, θεωρώντας δηλαδή $Q(0) = 0$ και $H(1) = 0$. Όπως ειπώθηκε παραπάνω για την ειδική περίπτωση οριακών συνθηκών μηδενικής ροής στο $X = 0$ (αρχή του υπόγειου υδροφορέα) και μηδενικού βάθους στο $X = 1$ (θέση απορροής υπόγειου υδροφορέα), η εξίσωση (2.15) γίνεται

$$F(H, X) = F(0, 1) \quad (2.18)$$

και βεβαίως ακολουθεί τους δύο διαφορετικούς κλάδους της λύσεως για τιμές της παραμέτρου $m < 2$ και $m > 2$. Στην περίπτωση όπου $m < 2$, η ειδική λύση της εξίσωσης για την κατάσταση ισορροπίας (*steady state*) οδηγεί στην υπερβατική εξίσωση

$$\frac{m}{\sqrt{4-m^2}} \tan^{-1} \left(\frac{-m}{\sqrt{4-m^2}} \right) = \frac{m}{\sqrt{4-m^2}} \tan^{-1} \left(\frac{2H/X - m}{\sqrt{4-m^2}} \right) + \frac{1}{2} \log(H^2) \quad (2.19)$$

με το ύψος $H(0)$ να δίνεται από το όριο της προηγούμενης σχέσης στο $X \rightarrow 0$, δηλαδή

$$H(0) = \exp \left(\frac{m}{\sqrt{4-m^2}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{2H(1) - m}{\sqrt{4-m^2}} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (2.20)$$

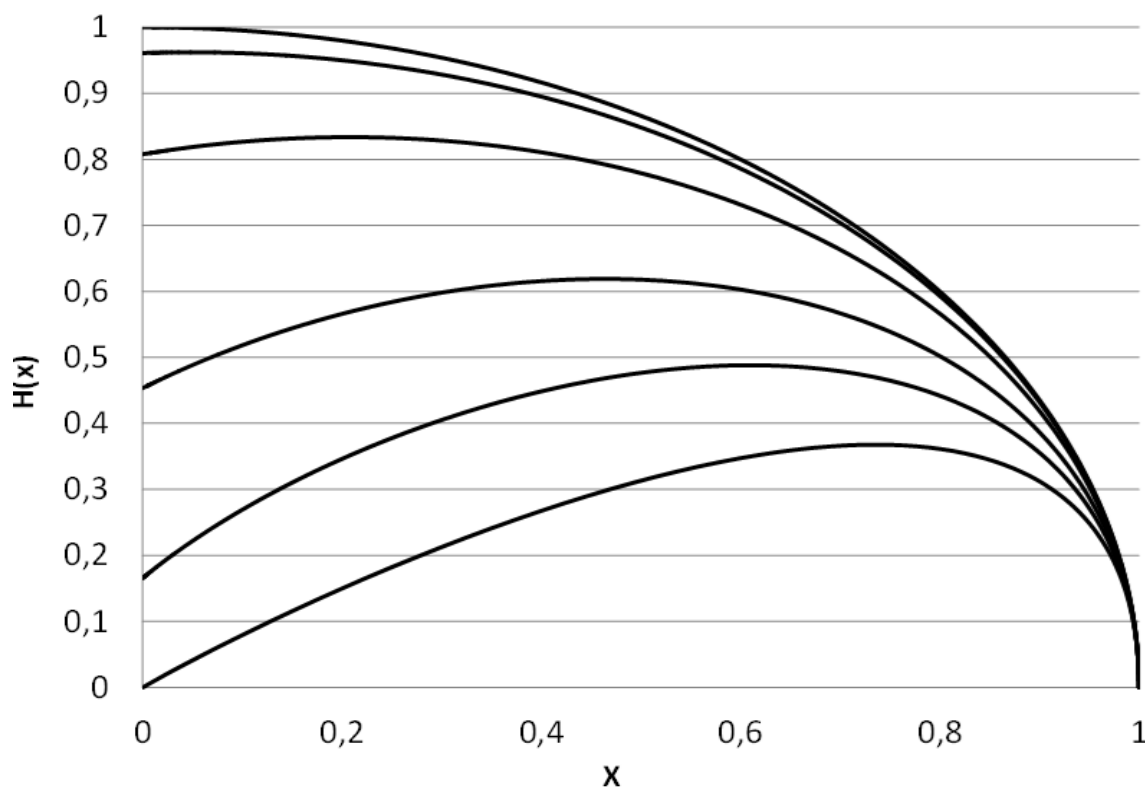
Αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου $m > 2$, η ειδική λύση της εξίσωσης για την κατάσταση ισορροπίας γίνεται

$$\frac{|-m_1|^{m_1/(m_1-m_2)}}{|-m_2|^{m_2/(m_1-m_2)}} = \frac{|H/X - m_1|^{m_1/(m_1-m_2)}}{|H/X - m_2|^{m_2/(m_1-m_2)}} X \quad (2.21)$$

όπου το ύψος $H(0)$ σε αυτήν την περίπτωση μηδενίζεται

$$H(0) = 0 \quad (2.22)$$

Στο Σχήμα 3, παρουσιάζεται η διαμόρφωση των αδιάστατων προφίλ του $H(X)$ συναρτήσει της αδιάστατης παραμέτρου X , για διάφορες τιμές της παραμέτρου ομοιότητας m .



Σχήμα 3. Γραφική αναπαράσταση των αδιάστατων βαθών $H(x)$ για μόνιμη ροή σε υπόγειο κεκλιμένο υδροφορέα με επαναφόρτιση για τιμές της παραμέτρου $m = 0.00, 0.05, 0.25, 0.75, 1.25$ και 2.00 . Οι αντίστοιχες καμπύλες ξεκινούν από πάνω για $m = 0.00$, που αντιστοιχεί σε οριζόντιο υδροφορέα, και εξελίσσονται προς τα κάτω για μέγιστη τιμή $m = 2.00$. Η περιοχή τιμών της παραμέτρου m ορίζει τον πρώτο κλάδο λύσεων της εξίσωσης (2.19).

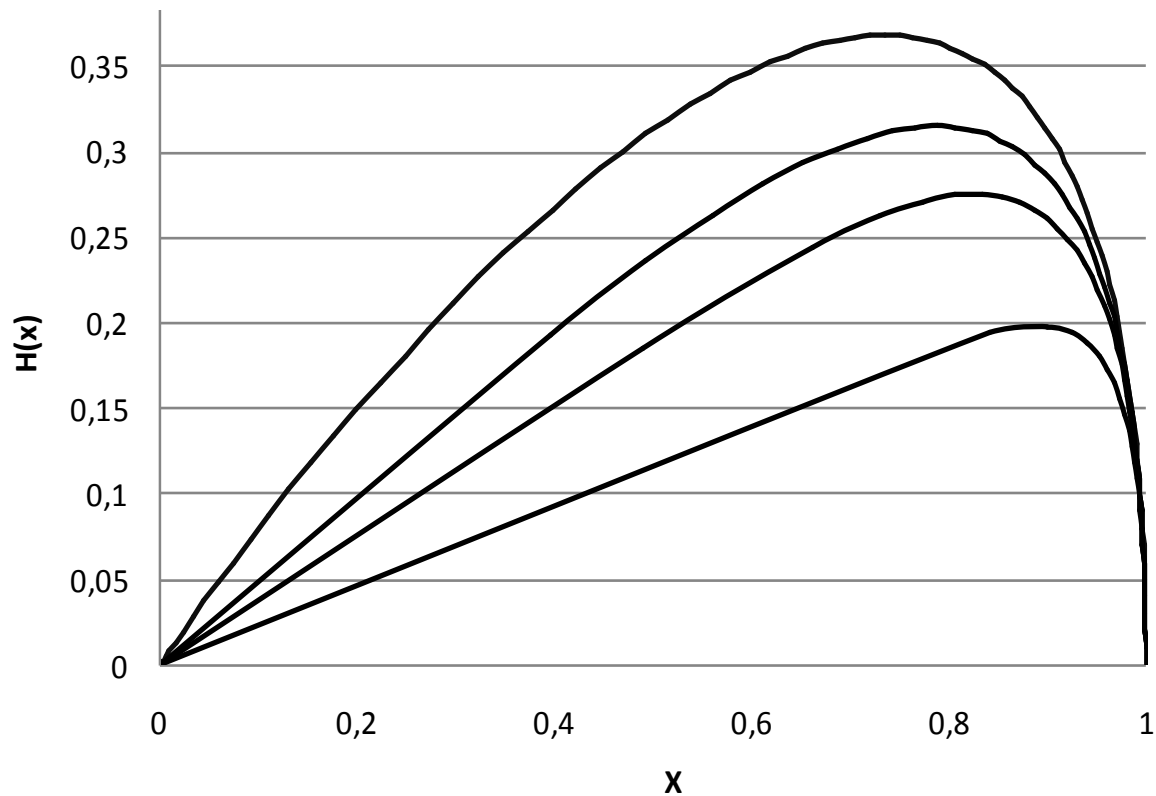
Οι καμπύλες αναφέρονται στην ειδική περίπτωση με οριακές συνθήκες $Q(0) = 0$ και $H(1) = 0$ και για την περίπτωση $m < 2$ (εξ. 2.19). Για την παραγωγή των αποτελεσμάτων, ετέθησαν συγκεκριμένες τιμές του λόγου H/X , και χρησιμοποιώντας το λογισμικό EXCEL, υπολογίστηκαν μέσω της (2.19) οι αντίστοιχες τιμές για τις παραμέτρους $H(X)$ και τελικά και για τη μεταβλητή X .

Επίσης για λόγους σύγκρισης εφαρμόστηκε η εξίσωση (2.14) για την οριακή περίπτωση $m = 0$, που αντιστοιχεί σε οριζόντιο υδροφορέα (μηδενικής κλίσης), οπότε και λύνοντας τη διαφορική εξίσωση με αρχικές συνθήκες $H(1) = 0$ και $\partial H / \partial X = 1 (\tan \varphi = 0)$ προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση

$$H(X) = \sqrt{1 - X^2} \quad (2.23)$$

Παρατηρώντας το συγκεκριμένο γράφημα και συγκρίνοντας την αλλαγή των αδιάστατων προφίλ $H(X)$, γίνεται κατανοητό πως με την αύξηση της παραμέτρου m , η οποία είναι ανάλογη της κλίσης και αντιστρόφως ανάλογη του φορτίου τροφοδοσίας r , το $H(0)$ τείνει συνεχώς προς το μηδέν. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της κλίσης (ή/και τη σχετική μείωση της τροφοδοσίας), οπότε το νερό παραμένει μικρότερο χρονικό διάστημα στην αρχική θέση $x = 0$ λόγω της μεγαλύτερης ταχύτητας που αναπτύσσει. Επίσης το ίδιο φαινόμενο μπορεί να οφείλεται σε μειωμένο ρυθμό βροχόπτωσης r , ο οποίος παραμένει σταθερός καθ' όλη τη διάρκεια του προς εξέταση φαινομένου εφόσον αποδίδονται τιμές για την παραμέτρου m μικρότερες του 2. Με την αύξηση της παραμέτρου m μειώνεται συνεχώς το υδατικό απόθεμα (αποθηκευτικότητα) του υδροφορέα. Όταν το m ξεπεράσει την τιμή 2, τότε η κατάσταση ισορροπίας περιγράφεται από τον επόμενο κλάδο της λύσεως σύμφωνα με την εξίσωση (2.21).

Στο Σχήμα 4, το οποίο παρουσιάζει την μεταβολή του $H(X)$, χρησιμοποιώντας την λύση για οριακές συνθήκες $Q(0) = 0$ και $H(1) = 0$ και $m > 2$ (εξ. 2.21) φαίνεται ότι σε κάθε περίπτωση το βάθος στο ανάντι όριο $H(0)$ μηδενίζεται. Με την αύξηση της παραμέτρου m , η οποία είναι ανάλογη της κλίσης και αντιστρόφως ανάλογη του φορτίου τροφοδοσίας (r) όπως έχει διευκρινιστεί παραπάνω, το μέγιστο βάθος συνεχώς μειώνεται. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της κλίσης, αφού το νερό παραμένει μικρότερο χρονικό διάστημα σε κάθε τυχαία θέση X λόγω της μεγαλύτερης ταχύτητας που αναπτύσσει. Το ίδιο επίσης δύναται να οφείλεται σε μικρότερο ρυθμό βροχόπτωσης r .



Σχήμα 4. Γραφική αναπαράσταση των αδιάστατων βαθών $H(x)$ για μόνιμη ροή σε υπόγειο κεκλιμένο υδροφορέα με επαναφόρτιση για τιμές της παραμέτρου $m = 2.00$, 2.50 , 3.00 και 4.50 . Οι αντίστοιχες καμπύλες ξεκινούν από πάνω για $m = 2.00$ και εξελίσσονται προς τα κάτω για μέγιστη τιμή $m = 4.50$. Η περιοχή τιμών της παραμέτρου m ορίζει το δεύτερο κλάδο λύσεων μέσω της εξίσωσης (2.21).

Στο επόμενο κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθεί η πληροφορία της λύσης για τα προφίλ σε συνθήκες μόνιμης ροής, προκειμένου να υπολογιστεί η αποθηκευτικότητα ως συνάρτηση της παραμέτρου ομοιότητας m , και να χρησιμοποιηθεί σε μοντέλο ημι-μόνιμης ροής για να περιγράψει δυναμικά εξελισσόμενες περιπτώσεις.

3. Προσέγγιση εξελισσόμενης ροής με διαδοχικές ημι-μόνιμες καταστάσεις ισορροπίας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράψαμε διεξοδικά τις λύσεις που προκύπτουν για τα προφίλ του νερού σε περίπτωση της κατάστασης μόνιμης ροής, όταν δηλαδή η εισροή και η εκροή νερού έχουν ισορροπήσει σε δυναμικό επίπεδο. Στα επόμενα θα επιχειρηθεί η χρήση της πληροφορίας αυτής για την εκτίμηση της δυναμικής εξέλιξης της ροής σε περιπτώσεις μη-μόνιμης ροής μέσω της παραδοχής της ημι-μονιμότητας (*quasi steady state approximation*) στην διαμόρφωση των διαδοχικών εξελισσόμενων προφίλ του νερού, μέσα στον κεκλιμένο υδροφορέα. Η υπόθεση αυτή που έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στην υπόγεια υδρολογία (*Verhoest and Troch, 2000; Akylas and Koussis, 2006; Akylas et al., 2007; Basha and Maaahuf, 2005; Koussis and Akylas 2011; 2012*), μπορεί να δώσει ποσοτικά ορθές εκτιμήσεις σε επίπεδο απορροής και η ακρίβεια της αυξάνεται με τη μείωση του χρόνου απόκρισης (μείωση της παραμέτρου m) του συστήματος. Η πρωτοτυπία της παρούσας έρευνας έγκειται στο γεγονός της χρήσης της ακριβούς λύσεως της μη γραμμικής εξισώσεως του *Boussinesq* (2.2-2.5), που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο στην εφαρμογή της συγκεκριμένης υπόθεσης, σε αντίθεση με τη χρήση πιο απλουστευμένων γραμμικών προσεγγιστικών λύσεων του παρελθόντος. Το βήμα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, προσφέροντας αφ' ενός ακριβέστερη περιγραφή στα πλαίσια της θεωρίας των *Dupuit-Forchheimer*, και ελαχιστοποιώντας (ή και εκμηδενίζοντας), αφ' ετέρου, τη χρήση εμπειρικών παραμέτρων για την ποσοτική εκτίμηση του προβλήματος.

Η οιονεί κατάσταση ισορροπίας υποθέτει την ύπαρξη διαδοχικών σταθερών καταστάσεων ισορροπίας για τον υπολογισμό της απόκρισης για ένα υδροφόρο ορίζοντα υπό κλίση για διαφορετικούς ρυθμούς επαναφόρτισης. Πρόκειται για μία ιδιαίτερα χρήσιμη μέθοδο για τη δημιουργία ενός υδρογραφήματος εκροής για συγκεκριμένο ρυθμό επαναφόρτισης χωρίς να απαιτείται η προσφυγή στην πραγματική διακύμανση της στάθμης $H(X)$ στον υδροφόρο ορίζοντα. Συγκεκριμένα με την επίλυση της οιονεί κατάστασης ισορροπίας δύναται να προσεγγιστούν πολύ ικανοποιητικά τα στάδια φόρτισης ενός υπόγειου υδροφορέα έως τον πλήρη κορεσμό του ή έως την πλήρη αποφόρτιση του. Για να επιτευχθεί το παραπάνω, στη συγκεκριμένη μέθοδο πραγματοποιείται η υπόθεση, πως ο υδροφόρος ορίζοντας σε κάθε χρονική στιγμή και για οποιοδήποτε πραγματικό ρυθμό επαναφόρτισης συμπεριφέρεται σαν να βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπημένης μόνιμης ροής με βάση κάποιο τρέχοντα υποθετικό ρυθμό φόρτισης. Στην οιονεί κατάσταση ισορροπίας εισάγεται η έννοια της

αποθηκευτικότητας (S), η οποία θα αναλυθεί παρακάτω. Σημαντικό θεωρείται να αναφερθεί, πως σε αντίθεση με τη κατάσταση ισορροπίας (*steady state*), στην εξίσωση περιγραφής της οιονεί κατάστασης ισορροπίας (*quasi -steady state*) η μερική παράγωγος του πιεζομετρικού ύψους ως προς το χρόνο δεν μηδενίζεται.

3.1 Αποθηκευτικότητα σε συνθήκες μόνιμης ροής

Το δεξί μέλος της διαφορικής εξίσωσης της διατήρησης της μάζας σε ένα υπόγειο υδροφορέα υπό κλίση (εξ. 2.3) προκύπτει από το γεγονός ότι ο όγκος του νερού που ρέει κατά μήκος του προαναφερθέντος ανά μονάδα χρόνου ισούται με $r \cos \phi \Delta x + r \sin \phi \Delta h$ για τμήμα του υπόγειου υδροφορέα ίσο με Δx , (*Wooding and Chapman, 1964*). Το τελευταίο τμήμα της παραπάνω εξίσωσης συνήθως παραλείπεται από την παραπάνω εξίσωση συνέχειας (εξ. 2.5) και δύναται να απαλειφθεί δεδομένου ότι ο λόγος r/k είναι συνήθως πολύ μικρός, όπως προαναφέρθηκε (*Chapman, 2005*). Λαμβάνοντας το ανάντη άκρο του υπόγειου υδροφορέα ($x = 0$) ως υδραυλικό χάσμα, δηλαδή θεωρώντας ότι για τη θέση $x = 0$ η παροχή νερού είναι μηδενική για οποιαδήποτε χρονική στιγμή, και ολοκληρώνοντας σε ολόκληρο το μήκος του υπόγειου υδροφορέα, η διαφορική εξίσωση διατήρησης της μάζας διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dS}{dt} + Q = rL \cos \phi \quad (3.1)$$

όπου τα μεγέθη

$$S = n \int_0^L h dx, \quad Q = q(L, t) \quad (3.2)$$

είναι η αποθηκευτικότητα και η απορροή αντίστοιχα. Η ανάλυση της οιονεί κατάστασης ισορροπίας πρόκειται να βασιστεί κυρίως στις προηγούμενες εξισώσεις. Η κατάσταση ισορροπίας του συστήματος του υπόγειου υδροφορέα περιγράφεται όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο από την ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{\partial q}{\partial x} = r \cos \phi \quad (3.3)$$

οδηγώντας σε απορροή στο κατάντη όριο

$$Q = rL \cos \phi \quad (3.3)$$

Η παραπάνω εξίσωση εκφράζει το ρυθμό εκροής της κατάστασης ισορροπίας, ο οποίος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί στη παρούσα εργασία. Από την εξίσωση 3.1 προκύπτει εύκολα η αποθηκευτικότητα με ολοκλήρωση στη μορφή

$$S = \frac{nL^2 r}{2k \tan \phi} + \frac{n(h^2(x=L) - h^2(x=0))}{2 \tan \phi} \quad (3.4)$$

Το βάθος στο κατάντη άκρο ($x=L$) θεωρείται ως μία από τις οριακές συνθήκες. Το συγκεκριμένο βάθος είναι πολύ μικρό σε λοφώδεις εκτάσεις και συνήθως επηρεάζει πολύ λίγο τις συνθήκες ροής σε διπλανούς υπόγειους υδροφορείς, (*Brutsaert, 1994*); γενικά, το βάθος του κατάντη άκρου $h(x=L)$ επηρεάζει το προφίλ του υπόγειου υδροφορέα μόνο κοντά στη θέση $x=L$, επηρεάζοντας την αποθήκευση ελάχιστα. Για τους παραπάνω λόγους θεωρήθηκε πρακτικώς ορθό, το βάθος στο κατάντη άκρο να ληφθεί ως μηδενικό, $h(x=L) = 0$, απλοποιώντας εκτός των άλλων ιδιαίτερα την ανάλυση. Αντίθετα, το βάθος στο ανάντη άκρο ($x=0$) δεν είναι εκ προοιμίου γνωστό. Το συγκεκριμένο πιεζομετρικό ύψος, *hupstream*, είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί μέσω της επίλυσης της εξίσωσης 2.2 ή των εξισώσεων 2.18-22 δεδομένων των οριακών συνθηκών, ως συνάρτηση των χρησιμοποιηθέντων παραμέτρων, και ειδικότερα της παραμέτρου Q , ή ισοδύναμα της παραμέτρου r . Η εύρεση λοιπόν του πιεζομετρικού ύψους συναρτήσει των υπολοίπων παραμέτρων είναι δυνατόν να προκύψει από την επίλυση των εξισώσεων 2.18-22 για το διάστημα $0 \leq q \leq Q$ για τη συνθήκη $h(x=L) = 0$. Οι οριακές συνθήκες που επελέγησαν για το ανάντη άκρο είναι: $q(x=0) = 0$ και $h(x=0) = h_{\text{upstream}}$, ενώ στο κατάντη όριο: $q(x=L) = Q$ και $h(x=L) = 0$. Όπως ειπώθηκε και νωρίτερα, για την επίλυση της κατάστασης ισορροπίας δε λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή του πιεζομετρικού ύψους ως προς το χρόνο, θεωρώντας μηδενικές χρονικές παραγώγους. Το συγκεκριμένο στοιχείο όμως θα ληφθεί υπόψη κατά την μελέτη της οιονεί κατάστασης ισορροπίας, όπου το βάθος στο ανάντη και κατάντη άκρο του υπόγειου υδροφορέα θα θεωρηθεί πως παρουσιάζει δυναμική μεταβολή ως προς το χρόνο t .

Η εξίσωση 3.4 επιλύεται με τη χρήση της πληροφορίας που προέκυψε στο προηγούμενο κεφάλαιο στις εξισώσεις 2.20 και 2.22 για τις τιμές του ύψους στο ανάντη όριο. Ακολουθώντας τη διαφοροποίηση των σχετικών λύσεων των *Henderson and Wooding* (1964) σε δύο κλάδους όπως αναπτύχθηκε ανάλογα με την τιμή της αδιάστατης παραμέτρου λ , η οποία ορίζεται σε σχέση με την αδιάστατη παράμετρο m ως

$$\lambda \equiv \frac{4r}{k \tan^2 \phi} = \frac{4}{\sqrt{m}} \quad (3.5)$$

Για $\lambda \leq 1$ προκύπτει ότι το πιεζομετρικό ύψος του ανάντη άκρου είναι μηδενικό $h_{\text{upstream}} = 0$. Βάση των παραπάνω, προκύπτει το συμπέρασμα ότι σε αυτήν την περίπτωση η αποθήκευση είναι γραμμική συνάρτηση της επαναφόρτισης.

$$S = \frac{nL^2}{2k \tan \phi} r \quad (3.6)$$

Για $\lambda > 1$ όμως προκύπτει η δεύτερη μορφή μέσω της εξίσωσης 2.22 και το πιεζομετρικό ύψος στο ανάντη άκρο είναι μία μη τετριμμένη εξίσωση της απορροής, δηλαδή της επαναφόρτισης την οποία ξαναγράφουμε σε διαστατική μορφή.

$$h_{\text{upstream}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{k}} L \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\frac{4r}{k \tan^2 \phi} - 1}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arctan\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{4r}{k \tan^2 \phi} - 1}}\right] \right\}\right\}. \quad (3.7)$$

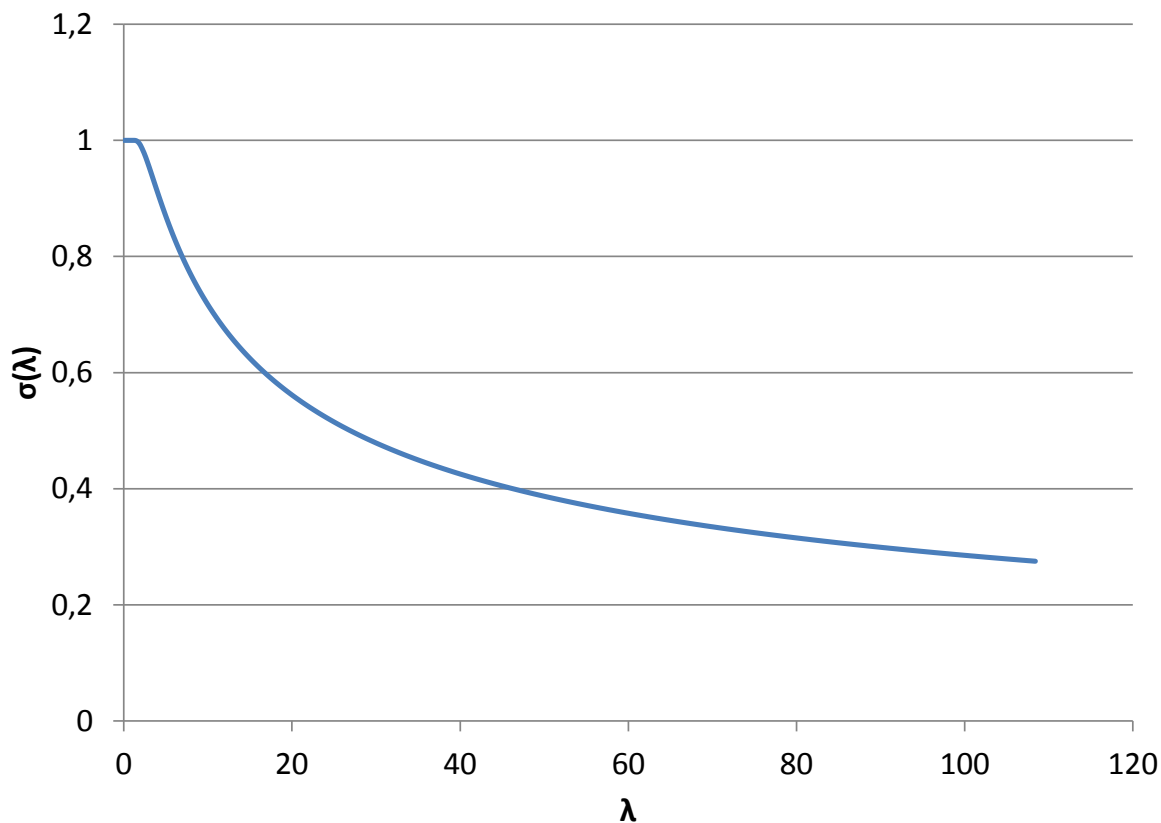
Με τον τρόπο αυτό η αποθήκευση για την κατάσταση ισορροπίας σε περιπτώσεις όπου $\lambda > 1$ διαμορφώνεται ως εξής:

$$S = \frac{nL^2}{2k \tan \phi} r \sigma(\lambda) = \frac{nL}{2k \sin \phi} q \sigma(\lambda) \quad (3.8)$$

όπου

$$\sigma = 1 - \exp\left\{-\frac{2}{\sqrt{\lambda - 1}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda - 1}}\right) \right\}\right\} \quad (3.9)$$

Η συνάρτηση της παραμέτρου σ είναι μία θεμελιώδης ποσότητα, και η γραφική της παράσταση ως προς την εξάρτηση της από το λ , $\sigma(\lambda)$, δίνεται στο Σχήμα 5, που ακολουθεί.

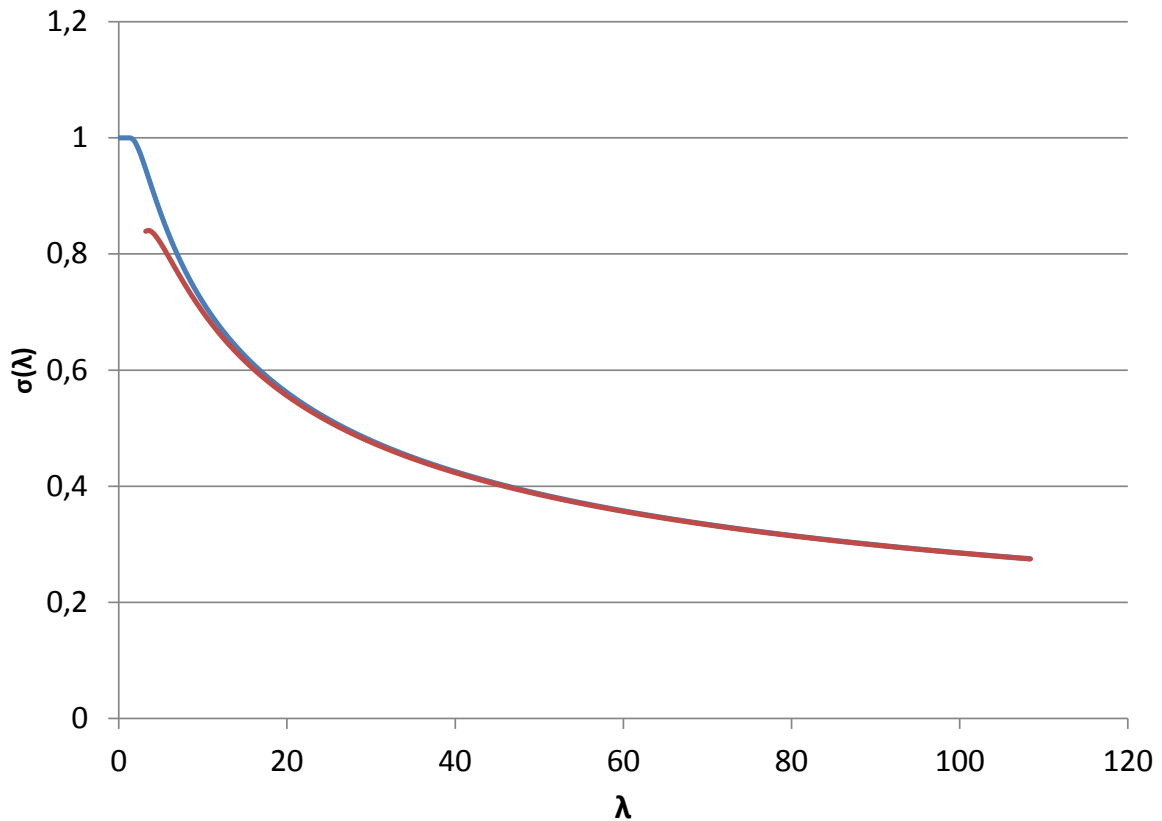


Σχήμα 5. Εξάρτηση της θεμελιώδους παραμέτρου $\sigma(\lambda)$ όπως προκύπτει κατά τον υπολογισμό της αποθηκευτικότητας του υδροφορέα σε συνθήκες μόνιμης ροής.

Βάση των παραπάνω παρατηρείται, πως οι λύσεις για $\lambda \leq 1$ δεν επηρεάζουν την αποθηκευτικότητα του υπόγειου υδροφορέα, αφού για τις περιπτώσεις αυτές, η παράμετρος σ ισούται με τη μονάδα. Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω παρατηρήσεις, συμπεραίνεται πως η εξίσωση 3.8-9 δύναται να χαρακτηριστεί ως η πλήρης εξίσωση αποθήκευσης ενός υπόγειου υδροφορέα για όλες τις πιθανές λύσεις της ακριβούς μη-γραμμικής εξίσωσης σταθερής κατάστασης σε μόνιμη ροή, ορίζοντας τη παράμετρο $\sigma = 1$, όταν $\lambda \leq 1$.

Από ανάλυση κατά Taylor, επίσης προκύπτει ότι για πολύ μεγάλες τιμές της παραμέτρου, η ασυμπτωτική συμπεριφορά της παραμέτρου σ είναι η εξής

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} + \frac{4 - \pi^2}{2\lambda} \text{ για } \lambda > 1 \quad (3.10)$$



Σχήμα 6. Εξάρτηση της θεμελιώδους παραμέτρου $\sigma(\lambda)$ όπως προκύπτει κατά τον υπολογισμό της αποθηκευτικότητας του υδροφορέα σε συνθήκες μόνιμης ροής (μπλε) και η ασυμπτωτική προσέγγιση της από την εξίσωση (κόκκινο).

Η σημασία της παραπάνω ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της παραμέτρου σ έγκειται σε δύο σημεία. Αρχικά, η μαθηματική έκφραση της παραμέτρου σ από την εξίσωση 3.10 διαφέρει πολύ λίγο από εκείνη της ακριβούς εξίσωσης 3.9, καθώς μεγαλώνουν οι τιμές της παραμέτρου λ , όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 6. Επιπλέον, ο δεύτερος όρος στη μαθηματική εξίσωση 3.10 παραλείπεται όταν χρησιμοποιείται η εξίσωση αποθήκευσης του υπόγειου υδροφορέα στην ανάλυση της οιονεί κατάστασης ισορροπίας, όπως θα διαπιστωθεί στην επόμενη ενότητα.

3.2 Οιονεί κατάσταση ισορροπίας

Η προσέγγιση της οιονεί κατάστασης ισορροπίας (*Quasi-steady state*) ποσοτικοποιεί τη μεταβατική κατάσταση ως μια πραγματική χρονική ακολουθία άπειρων σταθερών καταστάσεων ισορροπίας, η οποία προκύπτει εισάγοντας τη χρονική μεταβλητότητα (κατάλληλα επιλεγμένη) σε όλες τις παραμέτρους που περιγράφουν τις ενδιάμεσες καταστάσεις ισορροπίας. Στη συνέχεια η δυναμική εξίσωση της οιονεί κατάστασης ισορροπίας «παραμορφώνει» μία δοθείσα σταθερή κατάσταση ισορροπίας σε μία σταθερή τελική κατάσταση ισορροπίας. Οι καταστάσεις ισορροπίας περιγράφονται από τη συσχέτιση των παραμέτρων $S-Q$, η οποία δίνεται από την εξίσωση 3.1. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.8, προκύπτει η ακόλουθη μαθηματική έκφραση της αποθήκευσης ενός υπόγειου υδροφορέα:

$$S = \frac{nL}{2k \sin \phi} Q \sigma \quad (3.11)$$

Για τις λύσεις στην περιοχή $\lambda \leq 1$, η παράμετρος σ ισούται με τη μονάδα ($\sigma = 1$) όπως δείξαμε, ενώ για τις λύσεις για $\lambda > 1$, η παράμετρος σ προκύπτει από την εξίσωση 3.9. Η παράμετρος λ στην εξίσωση 3.9 αντικαθίσταται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{4 \cos \phi}{kL \sin^2 \phi} Q \quad (3.12)$$

Ενσωματώνοντας δηλαδή τη χρονική εξάρτηση στη παράμετρο Q , οι μεταβλητές της αποθήκευσης και της εκροής ενός υπόγειου υδροφορέα (Q και S αντίστοιχα) μετατρέπονται σε μεταβλητές της οιονεί κατάστασης ισορροπίας. Με τον τρόπο αυτό δύναται κάποιος να συμπεράνει, πως οι παραπάνω παράμετροι είναι μεταβλητές της σταθερής κατάστασης ισορροπίας, καθώς προέκυψαν από θεωρητικούς ρυθμούς επαναφόρτισης και είναι μοναδικοί για κάθε χρονική στιγμή. Επιπλέον, η θεώρηση της μαθηματικής εξίσωσης της διατήρησης της μάζας ως μόνιμης πηγής σύνδεσης των θεμελιωδών μεγεθών αντικατοπτρίζει το ρόλο των δυναμικών εξισώσεων που διαμορφώνονται από τις παραμέτρους από τις οποίες εξαρτάται η οιονεί κατάσταση ισορροπίας.

$$\frac{dS}{dt} + Q = rL \cos \phi \quad (3.13)$$

όπου r είναι ο πραγματικός ρυθμός επαναφόρτισης και $rL \cos \phi$ είναι η πραγματική εκροή κατά την τελική (επακριβώς ενδιάμεση) σταθερή κατάσταση ισορροπίας, η οποία καθορίζεται από το πραγματικό ρυθμό επαναφόρτισης κατά τη διάρκεια μιας φάσης επαναφόρτισης που μελετάται. Για την περίπτωση αποφόρτισης του υπόγειου υδροφορέα θεωρείται βεβαίως ότι $r = 0$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 3.9 και 3.13 στη γενική τους διατύπωση, ανακτάται τελικά η εξίσωση της οιονεί κατάστασης ισορροπίας, όπου για την σύνδεση των μεταβλητών της αποθήκευσης και της απορροής του υδροφορέα χρησιμοποιούμε την πλήρη μη-γραμμική εξίσωση του *Boussinesq*

$$\frac{nL}{2k \sin \phi} \frac{d}{dt} \{Q\sigma\} + Q = rL \cos \phi \quad (3.14)$$

Η μη γραμμική αυτή εξίσωση μπορεί να λυθεί αριθμητικά ή να προσεγγιστεί εποικοδομητικά, όπως θα δείξουμε στην επόμενη ενότητα από απλές μαθηματικές εκφράσεις.

3.3 Εξαγωγή του γραμμικού και τετραγωνικού ταμειυτήρα

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, η τιμή σ για τις λύσεις για $\lambda \leq 1$ ισούται με τη μονάδα. Με τον τρόπο αυτό η εξίσωση 3.14 μετατρέπεται σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση, η οποία ισχύει για τις λύσεις για $\lambda \leq 1$ και είναι η εξής:

$$A \frac{dQ}{dt} + Q = rL \cos \phi \quad A \equiv \frac{nL}{2k \sin \phi} \quad (3.15)$$

Η παραπάνω μαθηματική έκφραση είναι ένα γραμμικό μοντέλο αποθήκευσης, λόγω της γραμμικής σχέσης των παραμέτρων S-Q:

$$S = AQ \quad \text{δηλαδή} \quad Q \propto S \quad (3.16)$$

Για τις λύσεις για $\lambda > 1$, η παράμετρος σ της εξίσωσης 3.14 δύναται εύκολα να εκτιμηθεί – προσεγγισθεί χρησιμοποιώντας την ασύμπτωτική μαθηματική έκφραση της παραμέτρου σ της

εξίσωσης 3.10. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι το αποτέλεσμα της εξίσωσης 3.10 παρεκκλίνει λιγότερο από 5% από την ακριβή τιμή της παραμέτρου σ όπως καθορίζεται από την πλήρη εξίσωση 3.9, εφόσον αναφερόμαστε σε τιμές της παραμέτρου $\lambda > 6$. Επιπλέον, ο δεύτερος όρος στην εξίσωση 3.10 είναι ανάλογος του $1/Q$ και πρακτικά παραλείπεται όταν χρησιμοποιείται ακολούθως στη εξίσωση 3.14 της οιονεί κατάστασης ισορροπίας (λόγω της παραγωγίσιμης). Πιο συγκεκριμένα, η εξίσωση 3.14 λειτουργεί αποκλειστικά μόνο με τον 1^ο όρο της 3.10, διατηρώντας παράλληλα την μέγιστη δυνατή ακρίβεια και των δύο μελών της, τουλάχιστον για τις περιπτώσεις που η παράμετρος λ λαμβάνει μεγάλες τιμές. Το αποτέλεσμα είναι μη-γραμμικό, αλλά η εξίσωση είναι δυνατό να επιλυθεί ως:

$$B \frac{d\sqrt{Q}}{dt} + Q = rL \cos \phi, \quad B \equiv \frac{nL^{3/2}\pi}{4\sqrt{k}\sqrt{\cos \phi}} \quad (3.17)$$

Η παραπάνω μαθηματική έκφραση καλείται τετραγωνικό μοντέλο της αποθήκευσης, λόγω της τετραγωνικής σχέσης των παραμέτρων $S-Q$:

$$S = B\sqrt{Q} \quad \text{δηλαδή} \quad Q \propto S^2 \quad (3.18)$$

Ιστορικά, όπως εισαγωγικά αναφέρθηκε, τα δύο παραπάνω μοντέλα ως μορφές είναι γνωστά, τουλάχιστον σε γενικές γραμμές, από την εποχή του *Boussinesq*, ο οποίος τα εφήρμοσε πρώτος. Τα τελευταία χρόνια έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς στην υδρολογία και κυρίως μέσω της εργασίας των *Brutsaert and Nieber* (1977), οι οποίοι ξεκίνησαν με μια φαινομενολογική εξίσωση για την εκροή ενός υπόγειου υδροφορέα, $dQ/dt = f(Q)$, και θεώρησαν τα δύο μοντέλα αυτά ως ειδικές περιπτώσεις μιας συνάρτησης f της μορφής, $f(Q) = -aQ^b$, όπου η μεταβλητή a λαμβάνει τιμές $a = 1$ και $a = 3/2$ για το γραμμικό και τετραγωνικό μοντέλο της αποθήκευσης αντίστοιχα. Οι μαθηματικές μορφές στη δική μας περίπτωση προέκυψαν αβίαστα και με σαφή θεωρητική στοιχειοθέτηση χωρίς την ανάγκη της εισαγωγής οποιασδήποτε εμπειρικής παραμέτρου. Επιπλέον υποδεικνύουν με σαφήνεια τα όρια ισχύος των παλαιότερων προσεγγίσεων, ως προς την εφαρμογή τους στα πλαίσια της προσέγγισης οιονεί μονίμων συνθηκών.

Κατά τη διάρκεια της φάση της αποστράγγισης ενός υδροφορέα εκροής, εφόσον $r = 0$, ένας αρχικός όγκος νερού S_0 αποθηκεύεται στον υδροφόρο ορίζοντα που ξεκινά να

αποφορτίζεται. Η σωρευτική εκροή μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και t είναι για το γραμμικό ταμειυτήρα

$$V = \int_0^t Q dt \quad (3.19)$$

ενώ για τον τετραγωνικό

$$V = S_0(1 - e^{-t/A}), \quad V = S_0 \frac{\frac{S_0}{B^2} t}{1 + \frac{S_0}{B^2} t} \quad (3.20)$$

Και στις δύο περιπτώσεις, οι σταθερές A και B^2/S_0 είναι δυνατόν να θεωρηθούν ως οι τυπικές χρονικές κλίμακες της εκροής για το γραμμικό και τετραγωνικό μοντέλο αποθήκευσης αντίστοιχα. Η προφανής εξάρτηση της τελευταίας κλίμακας και από την αρχική κατάσταση για την περίπτωση του τετραγωνικού μοντέλου οφείλεται στην μη-γραμμικότητα του.

Στην περίπτωση της εφαρμογής των δύο λύσεων σε περιπτώσεις επαναφόρτισης με σταθερό ρυθμό τροφοδοσίας r , ξεκινώντας από έναν αρχικό όγκο νερού S_0 που είναι αποθηκευμένο στον υδροφόρο ορίζοντα κατά το στάδιο της περασμένης επαναφόρτισης έως ότου ο ρυθμός επαναφόρτισης να ανέλθει σε r , για το γραμμικό αποθήκευσης προκύπτει

$$V = (S_0 - \frac{nL^2}{2k \tan \phi} r)(1 - e^{-t/A}) + rL \cos \phi t \quad (3.21)$$

ενώ για το τετραγωνικό μοντέλο αποθήκευσης αντίστοιχα

$$V = \frac{S_0^2 - \frac{n^2 L^4 r}{16k}}{S_0 + \frac{nL^2 \sqrt{r}}{4\sqrt{k}} \coth\left(\frac{4 \cos \phi \sqrt{kr}}{\pi nL} t\right)} + rL \cos \phi t \quad (3.22)$$

Τελειώνοντας να σημειωθεί, πως για τις προηγούμενες εξισώσεις, η τιμή του χρόνου $t = 0$ θεωρείται ως η έναρξη οποιασδήποτε ενιαίας φάσης. Όταν οι εξισώσεις αυτές εφαρμόζονται σε μία ακολουθία φάσεων με διαφορετικό ρυθμό επαναφόρτισης, η μεταβλητή του χρόνου σε αυτές τις εξισώσεις πρέπει να μετατοπιστεί ανάλογα και ο όγκος V θα πρέπει να προστίθεται στον όγκο του νερού που εκρέει στις προηγούμενες φάσεις.

4. Δημιουργία υβριδικού υδρολογικού μοντέλου και σύγκριση με πειραματικά στοιχεία

Στα προηγούμενα κεφάλαια χρησιμοποιήσαμε τη μαθηματική περιγραφή των συνθηκών μόνιμης ροής σε κεκλιμένο υδροφορέα για να αναπτύξουμε πλήρως τη μη γραμμική περιγραφή ενός υδραυλικού μοντέλου ημι-μόνιμης κατάστασης. Επιπλέον αποδείχτηκε ότι οι δύο κύριοι ημι-εμπειρικοί τύποι υδρολογικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται μπορούν να στοιχειοθετηθούν επαρκώς και από τη συγκεκριμένη οπτική του όλου θέματος. Οι δύο βασικές σχέσεις στις οποίες καταλήξαμε μπορούν να θεωρηθούν αυτούσια υδραυλικά μοντέλα τα οποία, στο μέτρο του δυνατού και εντός των μαθηματικών ορίων ισχύος κάθε μίας, με την χρήση μόνο φυσικών χαρακτηριστικών του υδροφορέα περιγράφουν την απόκριση του από πλευράς απορροής του υδροφορέα. Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η χρήση αυτών των σχέσεων για τη δημιουργία ενός ημι-εμπειρικού υδρολογικού μοντέλου για την όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστη περιγραφή του μεγέθους της απορροής σε διάφορες πραγματικές συνθήκες.

4.1 Υβριδικό υδρολογικό μοντέλο για τον υπολογισμό της απορροής

Όπως έχει διευκρινιστεί έως τώρα, η περιγραφή της ροής εντός υπόγειου υδροφορέα έχει βασιστεί στη χρήση υδραυλικής θεωρία και την ιδέα της οιονεί κατάστασης. Είναι προφανές όμως, πως η προσέγγιση της μεταβατικής μη-μόνιμης κατάστασης, δηλαδή της κατάστασης κατά την οποία ο υπόγειος υδροφορέας βρίσκεται σε περιπτώσεις μείωσης ή αύξησης του ρυθμού φόρτισης και μακριά από τη δημιουργία συνθηκών μόνιμης ροής, η προσέγγιση της ημι-μονιμότητας δε μπορεί να θεωρηθεί απολύτως ακριβής. Συγκεκριμένα για να εξιδανικευτεί η παραπάνω προσέγγιση απαιτείται η ροή του νερού κατά μήκος του υδροφορέα να είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την κατακόρυφη ροή αυτού. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου το παραπάνω δεν ισχύει αποτελεί η περίπτωση υπόγειου υδροφορέα με πολύ μεγάλη κλίση (ϕ), όπου οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας δε διαφέρουν σημαντικά, λόγω της επίδρασης της βαρύτητας. Για να γίνει δυνατή η προσέγγιση αυτών των περιπτώσεων και για να προκύψει ένα ευέλικτο εργαλείο που θα μπορεί να αμβλύνει την αβεβαιότητα που εισάγουν οι φυσικές προσεγγίσεις που πραγματοποιούνται, καθώς επίσης και την υπό αίρεση αξιοπιστία των πραγματικών δεδομένων, τόσο ως προς την ίδια τη διαδικασία της μέτρησης όσο και ως προς την ομοιομορφία των μετρούμενων

παραμέτρων, θεωρούμε ότι η επίλυση των παραπάνω προβλημάτων θα μπορούσε να βασιστεί σε εμπειρικές μεθόδους. Ειδικότερα, τα δύο μοντέλα για την οιονεί μόνιμη κατάσταση που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο τείνουν να συμπεριφέρονται κατά τρόπο συμπληρωματικό υπό τις ίδιες περιστάσεις. Χαρακτηριστικά, εάν ένα εκ των δύο μοντέλων τείνει να υπερβεί τα πραγματικά δεδομένα, τότε το δεύτερο μοντέλο έχει την τάση να υποτιμά το μέγεθος της εκροής και τον όγκο νερού. Χρησιμοποιώντας τη συμπεριφορά αυτή, μία αρκετά καλή παραμετροποίηση του υδρογραφήματος θα μπορούσε να αποδοθεί εφαρμόζοντας ένα σταθμισμένο υβριδικό υδρολογικό μοντέλο - αυτό το οποίο θα ονομάσουμε μοντέλο- w . Η ουσία του μοντέλου αυτού δεν είναι παρά μία κατάλληλη γραμμική παρεμβολή μεταξύ του γραμμικού μοντέλου και του τετραγωνικού μοντέλου αποθήκευσης. Αναλυτικότερα, αποδίδοντας τιμές στις παραμέτρους εισόδου, δηλαδή τις χαρακτηριστικές τιμές των L , φ , k , n , και r δύναται να γραφθούν και να επιλυθούν τόσο το γραμμικό και όσο και το τετραγωνικό μοντέλο για τη μοναδική αυτή περίπτωση. Καθένα εκ των δύο παραπάνω μοντέλων προβλέπει την δικιά του συνάρτηση που εκφράζει την εκροή του συγκεκριμένου υπόγειου υδροφορέα και συνεπώς αποδίδει τα δικά του δεδομένα που σχετίζονται και με τη παράμετρο της αποθηκευτικότητας. Χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο λύσεις όπως αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε (σε ένα διαισθητικό άλμα) να γράψουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για την αποθηκευτικότητα

$$S = wS_{\text{linear storage model}} + (1-w)S_{\text{quadratic storage model}} \quad (4.1)$$

και αντίστοιχα για την απορροή

$$Q = wQ_{\text{linear storage model}} + (1-w)Q_{\text{quadratic storage model}} \quad (4.2)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αντιπροσωπεύουν το υβριδικό μοντέλο w . Δεδομένου ότι οι δύο αρχικές υδραυλικές λύσεις που δομούν το συγκεκριμένο υδρολογικό πλέον μοντέλο ικανοποιούν πλήρως την αρχή διατήρησης της μάζας, είναι φυσικό επακόλουθο πως και το νεοσύστατο μοντέλο θα ικανοποιεί τη παραπάνω αρχή. Ο πραγματικός αριθμός w είναι μία σταθερά, η οποία θα πρέπει να εξαρτάται από την χαρακτηριστική καμπύλη της συνολικής εκροής $Q(t)$. Η σχέση μεταξύ των παραμέτρων εκροής και αποθήκευσης στο μοντέλο αυτό έχει παρουσιαστεί εμμέσως μέσω των εξισώσεων 3.15-17.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί, πως η σταθερά w έχει οριστεί εντελώς εμπειρικά. Η σταθερά w λαμβάνει τιμή ίση με τη μονάδα, όταν χρησιμοποιείται για να αναπαραχθεί το αμιγές γραμμικό μοντέλο αποθήκευσης, ενώ όταν καλείται να αναπαραχθεί το τετραγωνικό μοντέλο αποθήκευσης λαμβάνει τιμή ίση με μηδέν. Θεωρητικά το γραμμικό μοντέλο αποθήκευσης οριοθετείται εντός των ορίων της περιοχής για $\lambda < 1$, ενώ οι λύσεις για το τετραγωνικό μοντέλο αποθήκευσης θα πρέπει να υιοθετηθούν εντός των διαστημάτων της περιοχής που ορίζεται για $\lambda > 1$, και μάλιστα αρκετά μακριά από την εν λόγω περιοχή και κυρίως για μεγάλα λ . Σε αυτές τις δύο σαφώς διακεκριμένες περιοχές αναφέρονται υπό την αυστηρή έννοια οι λύσεις των παραπάνω των δύο παραπάνω μοντέλων για τις οποίες η σταθερά w λαμβάνει θεωρητικά τις οριακές τιμές 1 και 0 αντιστοίχως. Είναι σαφές όμως, πως τα παραπάνω αποτελέσματα βασίζονται στην υπόθεση της καθολικής ισχύος της εξίσωσης της κατάστασης ημι-μόνιμης ροής και δεν έχουν ακριβές φυσικό υπόβαθρο, ιδιαίτερα όταν οι εξισώσεις αποθήκευσης εφαρμόζονται σε μοντέλο τύπου οιονεί μόνιμης προσεγγιστικής κατάστασης.

Πρακτικά, τόσο το γραμμικό όσο και το τετραγωνικό μοντέλο χαρακτηρίζονται ως προσεγγίσεις ακόμα και αν οι λύσεις των αντίστοιχων εξισώσεων τους πληρούν τα όρια που έχουν τεθεί παραπάνω. Επιπλέον, πάντα υφίσταται και η περιοχή των όχι πάρα πολύ μεγάλων λ , (πχ. λ περίπου 3 ή 4), οι οποίες συμπεριφέρονται ως γκρίζες. Αυτό διότι η απόκριση του συστήματος σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι γνωστή και τόσο το γραμμικό όσο και το τετραγωνικό μοντέλο που αναπτύξαμε αποδίδουν εσφαλμένες εκτιμήσεις. Η έμπνευση για τη δημιουργία του υβριδικού μοντέλου- w , έρχεται να εξυπηρετήσει κυρίως αυτόν το στόχο. Να συμπεριλάβει την αβεβαιότητα της εφαρμογής των δύο υδραυλικών λύσεων στην εμπειρικότητα της τιμής που πρόκειται να λάβει η παράμετρος w . Εντούτοις, μια χονδροειδής φαινομενολογική έκφραση της παραμέτρου w ως συνάρτηση της παραμέτρου λ , $w(\lambda)$, θα μπορούσε ενδεχομένως να εξαχθεί από τη διερεύνηση της εφαρμογής του w -μοντέλου σε ικανό αριθμό πραγματικών υδρογραφημάτων.

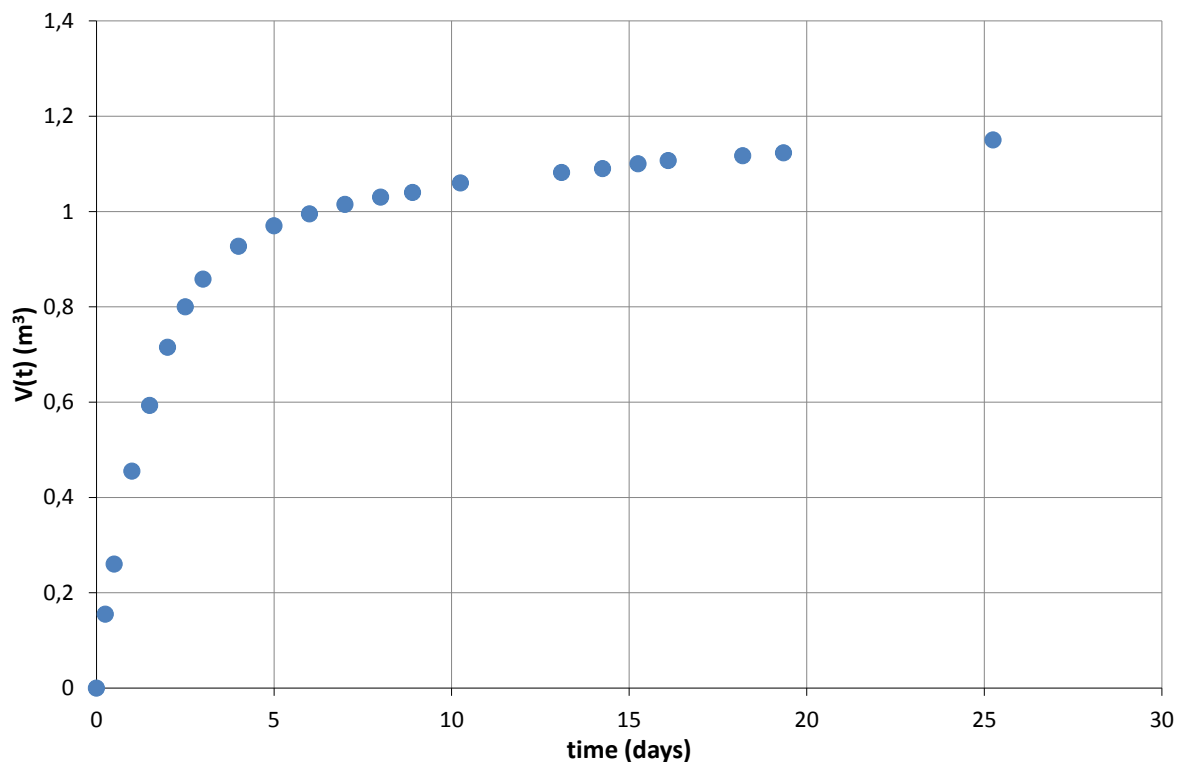
4.2 Πειραματικά δεδομένα

Η αποτελεσματικότητα του εμπειρικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να ελεγχθεί μέσω της εφαρμογής του στην ερμηνεία και προσέγγιση πειραματικών δεδομένων που έχουν προκύψει από την πειραματική μελέτη

υπόγειου υδροφορέα υπό κλίση. Συγκεκριμένα, μέχρι σήμερα υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία από 4 πειραματικές διατάξεις οι οποίες προσομοιώνουν τη ροή σε υπόγειο υδροφορέα υπό κλίση. Και τα τέσσερα πειράματα αναφέρονται σε περιπτώσεις αποφόρτισης και έχουν μελετηθεί διεξοδικά στη βιβλιογραφία ώστε να εξαχθούν σημαντικά συμπεράσματα ως προς τη συμπεριφορά των κορεσμένων υδροφορέων κατά τη διαδικασία της αποφόρτισης. Πρέπει να αναφερθεί πως και στα 4 πειράματα παραλείπεται η άμεση εξάρτηση από την παράμετρο της τροφοδοσίας (r) η οποία όμως, εμμέσως, υφίσταται ως ανάμνηση στο σύστημα, δεδομένου ότι θεωρείται πως σε καθένα εκ των πειραμάτων είχε επιτευχθεί κατάσταση ισορροπίας και μόνιμης ροής πριν την έναρξη καταγραφής των μετρήσεων της εκροής. Η συγκεκριμένη θεώρηση βέβαια δεν είναι πάντοτε ακριβής, ιδιαίτερα στα πειράματα των *Sanford et al.* (1993) και *Mizumura* (2002), όπως θα αναπτυχθεί και παρακάτω, όμως η εμπειρική του συντελεστή βαρύτητας στο υβριδικό υδρολογικό μοντέλο θεωρούμε ότι μπορεί να ανταποκριθεί σε τέτοιου τύπου ασάφειες, κάτι ιδιαίτερα χρήσιμο στην περίπτωση προσομοίωσης πραγματικών υδρολογικών συστημάτων. Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται και σχολιάζονται οι πειραματικές διατάξεις καθώς και οι μετρήσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν ως πεδίο εφαρμογής και ελέγχου της εφαρμογής του υβριδικού μοντέλου.

4.2.1 Πειραματική διάταξη Coweeta

Οι *Hewlett and Hibbert* δημοσίευσαν το 1963 τα δεδομένα απορροής του σχετικού πειράματος που διενεργήθηκε στο Υδρολογικό Ινστιτούτο *Coweeta*. Το συγκεκριμένο πείραμα είναι το μοναδικό που διενεργήθηκε υπό όσο το δυνατόν πιο αληθοφανείς (κοντά στην πραγματικότητα) συνθήκες, αποφεύγοντας την εργαστηριακή προσομοίωση. Η πειραματική διάταξη αποτελείται από μία τάφρο διαστάσεων (0.914 x 0.914 x 13.72 m), η οποία είχε κατασκευαστεί από οπλισμένο σκυρόδεμα, ώστε να συμπεριφέρεται πρακτικά ως αδιαπέρατο στρώμα, στοιχείο που διακρίνει εξίσου και τους υπόγειους υδροφορείς που μελετώνται στη παρούσα εργασία. Η εκ κατασκευής κλίση ήταν 40% και στη συνέχεια καλά αναμεμιγμένη ποσότητα χώματος πλήρωσε πλήρως τη παραπάνω διάταξη. Με τον τρόπο αυτό προσομοιώθηκε υπόγειος υδροφορέας με γνωστή κλίση, ενώ παράλληλα ήταν γνωστά και τα υπόλοιπα φυσικά χαρακτηριστικά αυτού, δηλαδή το μήκος, η γωνία που σχηματίζεται με το οριζόντιο επίπεδο, η διαπερατότητα και το πορώδες.

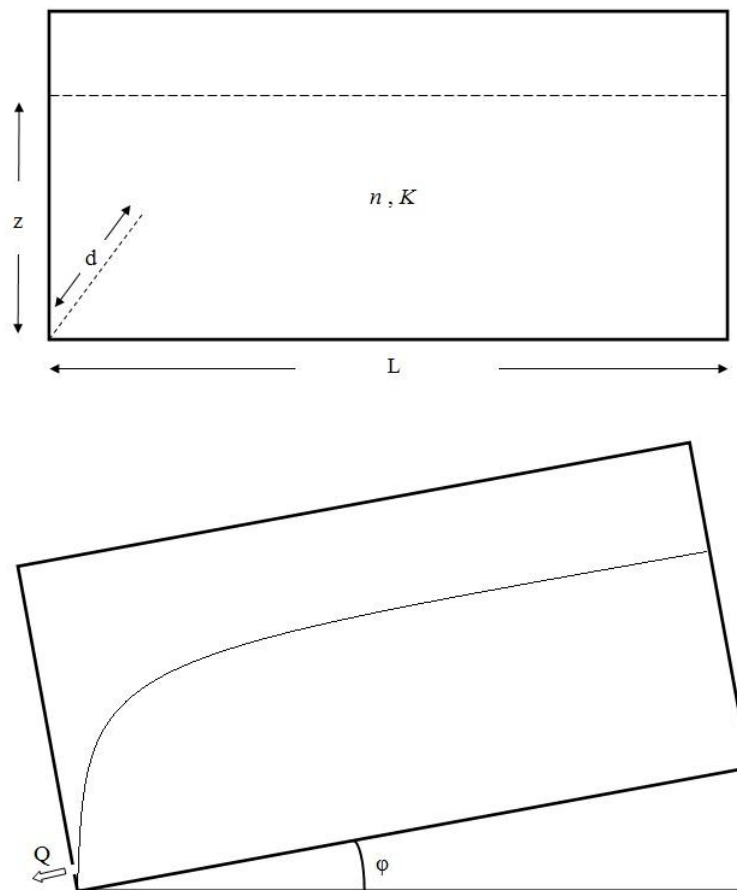


Σχήμα 7. Μετρήσεις συνολικής απορροής κατά την αποφόρτιση στο πείραμα *Coweeta* (*Hewlett and Hibbert, 1963*).

Στην όλη κατασκευή χρησιμοποιήθηκε σύστημα ψεκασμού νερού για αρκετές μέρες με ρυθμό τροφοδότησης 2.1 mm/h, ώστε οι σταγόνες του νερού να πέφτουν κάθετα στη βάση του υδροφορέα και στο σύνολο του μήκους του, εξασφαλίζοντας τελικά συνθήκες μόνιμης (κατά το δυνατόν) ροής με εισροή και εκροή σε ισορροπία ίσες με 632 L/d. Αφού η δομή καλύφθηκε με νερό σε συνθήκες μόνιμης ροής, η τροφοδοσία διεκόπη και το σύστημα αφήθηκε να στραγγιστεί. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι μετρήσεις του όγκου της απορροής ξεκίνησαν, αφού πρώτα είχε επιτευχθεί κατάσταση ισορροπίας στο σύστημα, δηλαδή η ποσότητα εισροής να ισούται με την ποσότητα νερού που απέρρευε από τον υπόγειο υδροφορέα. Η κορεσμένη υδραυλική αγωγιμότητα του συστήματος είχε υπολογιστεί από απ' ευθείας μετρήσεις σε 168 mm/h, ενώ το πορώδες του συστήματος εκτιμήθηκε σε $n = 0.264$. Να αναφερθεί πάντως ότι οι συγκεκριμένες τιμές έχουν διαφοροποιηθεί από αρκετούς ερευνητές, κυρίως, στα πλαίσια της βαθμονόμησης δικών τους ημι-εμπειρικών μοντέλων στα πειραματικά δεδομένα (*Zecharias and Brutsaert, 1988*). Στο Σχήμα 7 παρατίθενται οι μετρήσεις του συνολικού απορρέοντος όγκου συναρτήσει του χρόνου.

4.2.2 Πειραματική διάταξη Sanford et al. (1993)

Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε από τους *Sanford et al.* (1993) αποτελούνταν από ένα υάλινο δοχείο του οποίου οι διαστάσεις ήταν 30 x 30 x 245cm και το οποίο είχε πληρωθεί με άμμο σε βάθος 23cm. Στο δοχείο αρχικά είχε τοποθετηθεί ποσότητα νερού έως ότου να επιτευχθεί ενιαίο κορεσμένο βάθος, ενώ βρισκόταν σε οριζόντια θέση (Σχ. 8 επάνω). Στη συνέχεια η πειραματική διάταξη ανυψώθηκε, ώστε να σχηματιστεί η επιθυμητή γωνία με το οριζόντιο επίπεδο και να προσομοιωθεί κατάλληλα ο υπόγειος υδροφόρος υπό κλίση. Η πρόσθεση νερού συνεχίστηκε για κατάλληλο χρονικό διάστημα, ώστε να διατηρηθεί η ομοιογένεια του κορεσμένου βάθους και να επιτευχθεί κατάσταση ισορροπίας στο σύστημα, διατηρώντας μία σταθερή και μόνιμη ροή (Σχ. 8 κάτω).

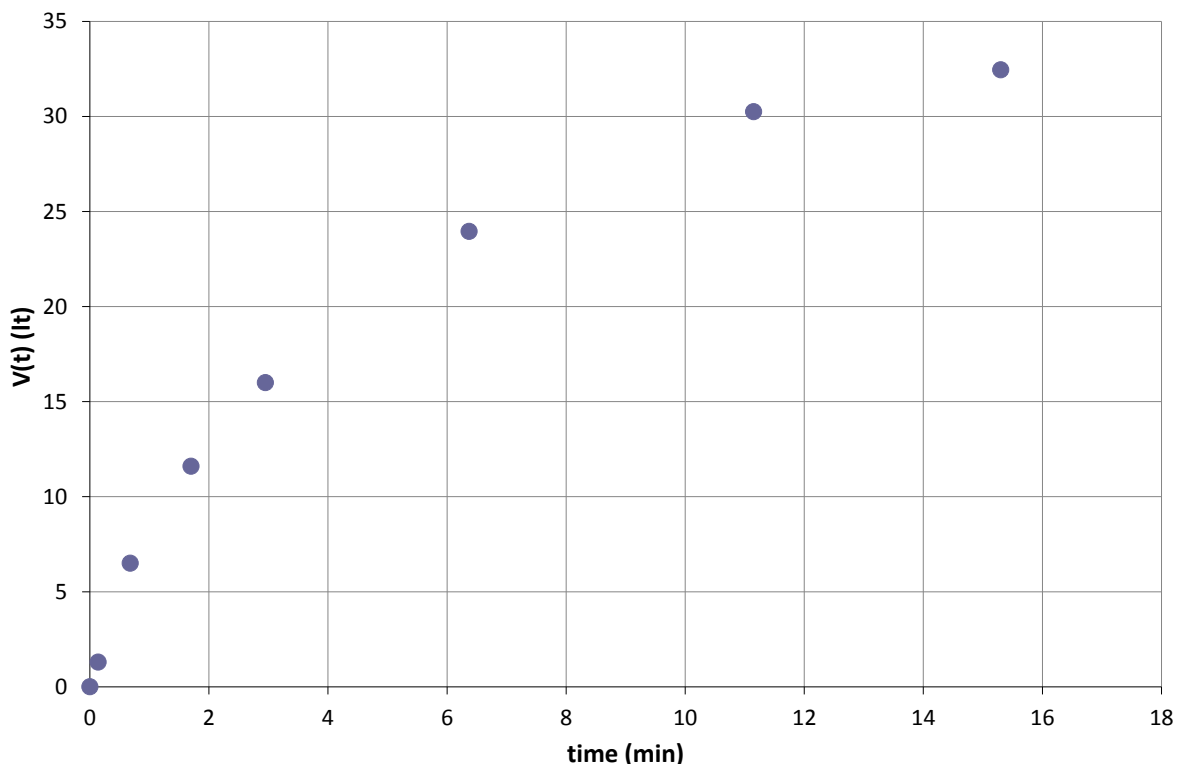


Σχήμα 8. Σχηματοποίηση της πειραματική διάταξης που χρησιμοποιήθηκε στα πειράματα των *Sanford et al.* (1993) και *Mizumura* (2002).

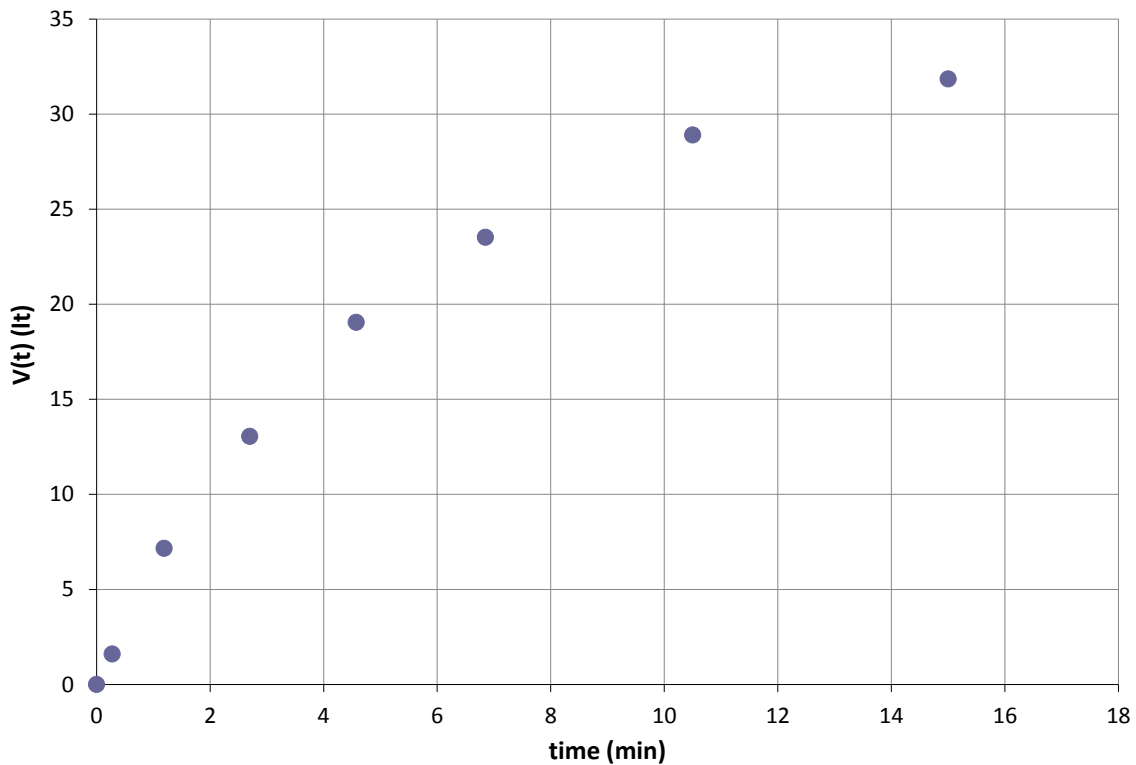
Έπειτα έλαβε χώρα η διαδικασία της αποστράγγισης, χρησιμοποιώντας οπές κατάλληλου διαμετρήματος που διέθετε το υάλινο δοχείο. Η υδραυλική αγωγιμότητα στη πρωτότυπη

πειραματική προσέγγιση υπολογίστηκε αρχικώς χρησιμοποιώντας έναν απλοποιημένο νόμο του *Darcy*, στον οποίο η παράμετρος της πίεσης λόγω της κλίσεως του πειραματικού δοχείου παραλείφθηκε. Ωστόσο, η συγκεκριμένη παραδοχή δεν συνιστά την ορθότερη υπόθεση για τη συγκεκριμένη κλίση του προσομοιωμένου υπόγειου υδροφορέα και των καταστάσεων ροής, αφού η κινηματική παράμετρος λ ήταν μεγαλύτερη της μονάδος. Για το λόγο αυτό κατά την επανάληψη της πειραματικής αυτής προσέγγισης η υδραυλική αγωγιμότητα υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας την πλήρη μορφή του Νόμου του *Darcy*. Επίσης και ο παράγοντας της τριχοειδούς ανύψωσης του νερού συνυπολογίστηκε κατά το καθορισμό της τιμής του πορώδους του συστήματος χωρίς να γίνει ο υπολογισμός από τη μείωση του βάθους του υδροφορέα. Η συγκεκριμένη υπόθεση συμφωνεί πλήρως με τις παραδοχές που λαμβάνουν χώρα στην εξίσωση του *Boussinesq*.

Καθορίζοντας λοιπόν τις τιμές των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν ένα υπόγειο υδροφορέα υπό κλίση (K, n, L, φ) και θεωρώντας πως ισχύει ομοιομορφία σε όλο το μήκος του προσομοιωμένου υδροφορέα, οι *Sanford et al.* (1993) μέτρησαν την συσσωρευτική απορροή ανά μονά χρόνου κατά την αποφόρτιση του παραπάνω συστήματος.



Σχήμα 9. Μετρήσεις συνολικής απορροής κατά το πείραμα των *Sanford et al.* (1993) για γωνία $\varphi = 5.1^\circ$.



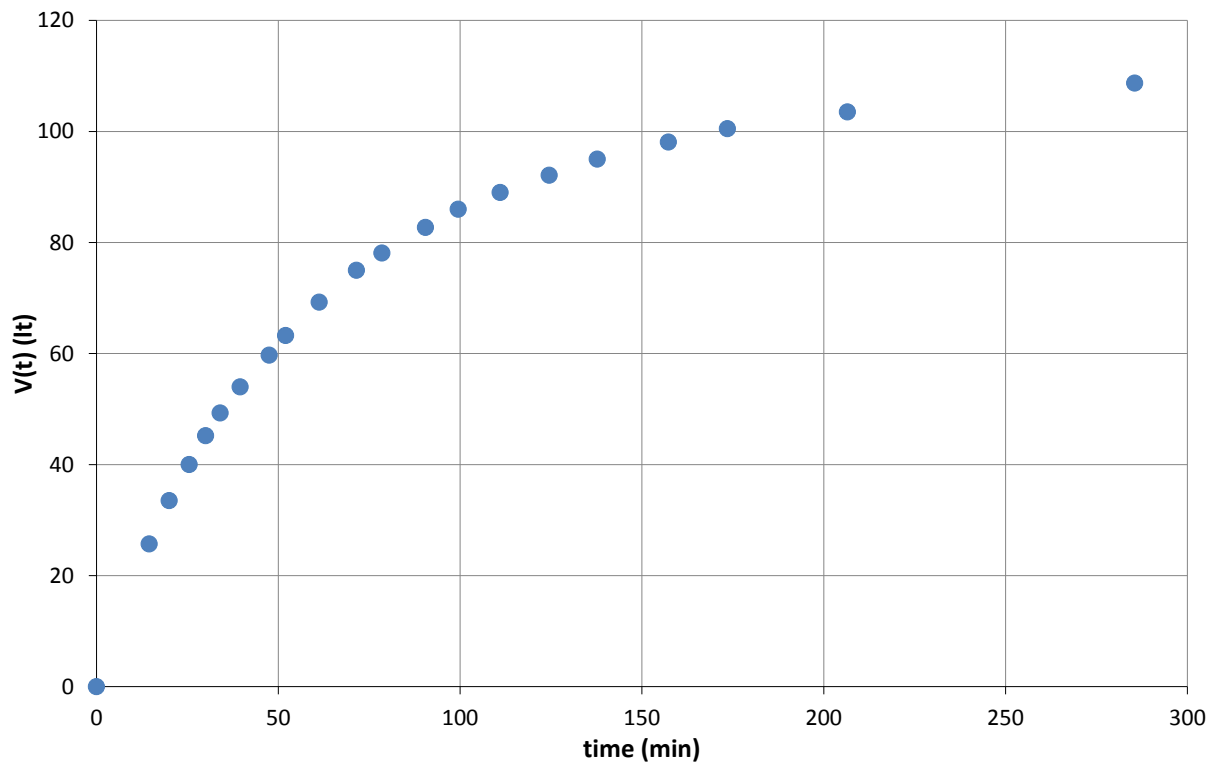
Σχήμα 10. Μετρήσεις συνολικής απορροής κατά το πείραμα των *Sanford et al.* (1993), για γωνία $\phi = 7.85^\circ$.

Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο πως με τη συγκεκριμένη πειραματική διάταξη διενεργήθηκαν δύο ξεχωριστά πειράματα, κατά τα οποία οι φυσικές μεταβλητές του υπόγειου υδροφορέα λάμβαναν διαφορετικές τιμές. Οι τιμές αυτές συνοψίζονται στον Πίνακα I, ενώ οι πειραματικές μετρήσεις δίνονται στα Σχήματα 9 -10.

4.2.3 Πειραματική διάταξη Mizumura

Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε από τον *Mizumura* (2002), σε πλήρη αντιστοιχία με αυτήν των *Sanford et al.* (1993) περιελάμβανε ένα υάλινο δοχείο, το οποίο πληρώθηκε με λεπτή άμμο συνολικού όγκου 0.576 m^3 (180x40x80 cm). Το δοχείο είχε αρχικά πληρωθεί με νερό έως ότου να επιτευχθεί κορεσμένο βάθος περίπου 70 cm, ενώ βρισκόταν σε οριζόντια θέση. Στη συνέχεια η πειραματική διάταξη ανυψώθηκε, ώστε να σχηματιστεί κλίση 5% και να προσομοιωθεί κατάλληλα ο υπόγειος υδροφορέας υπό κλίση. Η πρόσθεση νερού συνεχίστηκε για κατάλληλο χρονικό διάστημα, ώστε να διατηρηθεί η ομοιογένεια του κορεσμένου βάθους και να επιτευχθεί κατάσταση ισορροπίας στο σύστημα, διατηρώντας μία σταθερή και κατά το δυνατόν μόνιμη ροή. Στη συνέχεια υπολογίστηκε η

αθροιστική εκροή του συστήματος, μέσω της καταγραφής της εκροής που παρατηρήθηκε στο σύστημα όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.



Σχήμα 11. Μετρήσεις συνολικής απορροής κατά την αποφόρτιση στο πείραμα Mizumura (2002)

Η υδραυλική αγωγιμότητα της πειραματικής διάταξης καθορίστηκε από μετρήσεις των συγγραφέων σε 11.66 m/d, ενώ η τιμή του πορώδους καθορίστηκε σε $n = 0.23$. Ο υπολογισμός αυτός έγινε διαιρώντας τον συνολικό όγκο του νερού που συλλέχθηκε με τον όγκο του χωρίου που αποστραγγίστηκε σε χρόνο 100 min. Στον Πίνακα I που ακολουθεί παρατίθενται οι πειραματικές χαρακτηριστικές παράμετροι των πειραματικά προσομοιωμένων υδροφορέων, και για τις τέσσερις πειραματικές διατάξεις που παρουσιάστηκαν.

Πίνακας I. Πειραματικές τιμές αναφοράς για τα τέσσερα πειράματα αποστράγγισης που μελετήθηκαν.

Experiment	$\varphi(^{\circ})$	length (m)	Width (m)	Height (m)	Q_0 (lt/min)	k (m/day)	n
Mizumura	2.86	1.800	0.400	0.700	-	11.64	0.230
Sanford et al.	5.10	2.450	0.300	0.220	-	674	0.238
Sanford et al.	7.85	2.450	0.300	0.218	-	553	0.238
Coweeta	21.8	13.720	0.914	-	0.44	4.03	0.264

4.3 Ανεξάρτητη εφαρμογή του υβριδικού μοντέλου σε πειραματικά δεδομένα

Τα τέσσερα πειράματα που αναλύθηκαν αποτελούν μία σχετικά ολοκληρωμένη πειραματική βάση από πλευράς εύρους τιμών της παραμέτρου λ , και εκτείνονται από πολύ μικρές τιμές, $\lambda < 1$ (γραμμική περιοχή), για το πείραμα του Coweeta (λόγω της πολύ μεγάλης κλίσεως), σε ενδιάμεσες, $\lambda \sim 10$, για τα δύο πειράματα των Sanford et al. (1993), και έως και πολύ μεγάλες, $\lambda \sim 500$ (τετραγωνική περιοχή), στην περίπτωση του πειράματος του Mizumura (2002). Στην ενότητα αυτή γίνεται εφαρμογή του υβριδικού μοντέλου, που δημιουργήθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας, και στις τέσσερις πειραματικές μελέτες που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, προκειμένου να εξακριβωθεί η δυνατότητα και η ικανότητα του να περιγράψει επιτυχώς πραγματικές περιπτώσεις απορροής.

Η συλλογιστική που ακολουθήθηκε για την εφαρμογή του μοντέλου είναι απλή. Θεωρώντας γνωστές τις βασικές παραμέτρους των πειραματικών διατάξεων και συγκεκριμένα τις διαστάσεις και την κλίση παραμένει μία τριάδα αγνώστων που καθορίζει την απορροή στο εννοιολογικό πλαίσιο του μοντέλου. Η τριάδα αυτή αποτελείται από τις παραμέτρους του πορώδους, n , της υδραυλικής αγωγιμότητας, K , και από τον εμπειρικό συντελεστή, w , του υβριδικού μοντέλου. Η επιλογή μας ήταν να καθοριστεί η βέλτιστη τριάδα τιμών για την οποία ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ των εκτιμήσεων του μοντέλου και των πειραματικών μετρήσεων. Στη συνέχεια εξετάζεται κατά πόσον οι εκτιμημένες τιμές των φυσικών παραμέτρων n και K προσεγγίζουν τις τιμές αναφοράς των πειραμάτων.

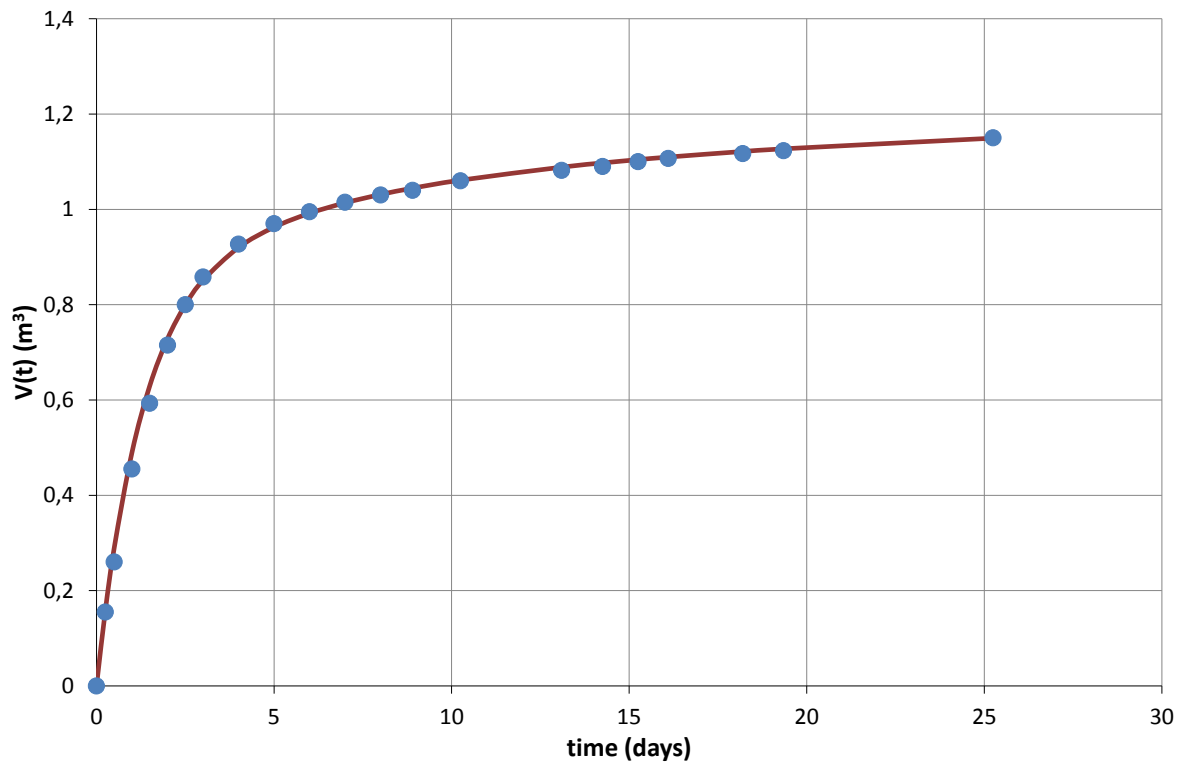
Η διαδικασία αυτή, αν και πολυπλοκότερη, προτιμήθηκε από το να γίνει εκτίμηση μόνον της παραμέτρου w θεωρώντας ως γνωστές, βάσει των πρωτότυπων εκτιμήσεων, τις φυσικές παραμέτρους του πορώδους και της υδραυλικής αγωγιμότητας. Στη δεύτερη περίπτωση το αποτέλεσμα δε θα μπορούσε να θεωρηθεί ξεκάθαρα αντικειμενικό. Δεδομένου ότι η εμπειρική τιμή του συντελεστή w , μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλη και εύκολη διαφοροποίηση των υδρογραφημάτων και να περιγράψει ετερογενή στοιχεία χωρίς απαραίτητα να περικλείει όποιο φυσικό περιεχόμενο, μία τέτοια προσέγγιση θα υποβίβαζε την εφαρμογή σε μία ακόμη διαδικασία «κουρδίσματος» του εύπλαστου μοντέλου μας πάνω σε «απρόσωπα» μαθηματικά σημεία. Δεν έχουμε την παραμικρή αμφιβολία ότι η σύμπτωση θα ήταν πολύ ικανοποιητική. Εντούτοις, η πρόκληση που θέτει η επιλεγείσα εφαρμογή είναι δυσκολότερη και σαφώς χρησιμότερη. Επιγραμματικά θα μπορούσε να τεθεί ως εξής: Μπορεί το υβριδικό μοντέλο να

διατηρήσει τη σωστή φυσική των παραμέτρων ενός υδροφορέα εντός των ελαστικών πλαισίων της εμπειρικότητας του; Με άλλα λόγια, διερευνάται κατά πόσον μπορεί το υβριδικό μοντέλο να οδηγήσει μέσω μίας αντικειμενικής διαδικασίας σε ένα ακριβές εμπειρικό υδρογράφημα, το οποίο να είναι χαρακτηριστικό ενός συγκεκριμένου υδροφορέα, χωρίς να αλλοιώνει τις φυσικές του παραμέτρους.

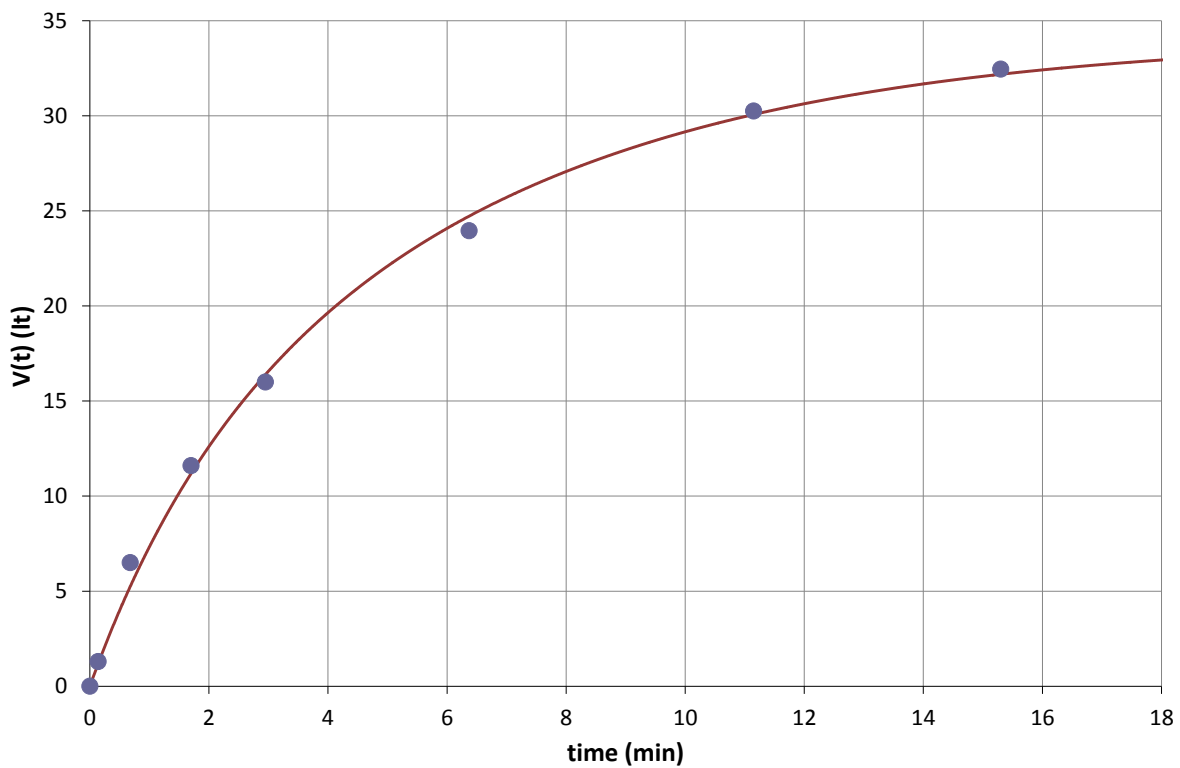
Η επίλυση των εξισώσεων για την εύρεση της συγκεκριμένης σε κάθε περίπτωση τριάδας των χαρακτηριστικών τιμών έγινε με την εφαρμογή μη γραμμικής μεθόδου βελτιστοποίησης, με χρήση του solver του λογισμικού Excel. Στις περιπτώσεις του πειράματος του Coweeta χρησιμοποιήθηκε και η γνωστή τιμή της αρχικής απορροής με βάση το σχετικό δεδομένο για τον τρόπο με τον οποίο εκτελέστηκε (από κατάσταση όσο το δυνατόν πιο κοντά σε συνθήκες μόνιμη ροής) προκειμένου να εκτιμηθούν οι αρχικές συνθήκες στο υβριδικό μοντέλο. Αντιθέτως στα τρία άλλα πειράματα δεν ήταν διαθέσιμη αυτή η πληροφορία και έτσι δεν έγινε αρχικοποίηση βάση όγκου απορροής αλλά βάση αποθηκευμένου όγκου νερού. Πιο αναλυτικά απαιτήθηκε η συνολική απορρέουσα ποσότητα να είναι ίση με το γνωστό όγκο που αρχικώς είχε πληρωθεί με νερό στις πειραματικές διατάξεις επί το εκτιμώμενο πορώδες. Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι σε αντίθεση με το πείραμα του Coweeta, όπου η αρχική κατάσταση του συστήματος αποτελεί καλή προσέγγιση κατάστασης μόνιμης ροής στα τρία άλλα πειράματα αυτό δεν ισχύει σε καμία περίπτωση. Ακόμη περισσότερο στα τελευταία, το αρχικό προφίλ του νερού δεν πληροί ούτε τις οριακές συνθήκες που έχουν θεωρηθεί στη γενικότερη μαθηματική θεμελίωση που επιχειρήσαμε. Για παράδειγμα το ύψος του προφίλ του νερού κατάντη είναι μη μηδενικό. Τέτοιες όμως γενικές ασυνέπειες και αβεβαιότητες αποσκοπεί να θεραπεύσει το μοντέλο που δημιουργήθηκε, και θεωρούμε ότι τα συγκεκριμένα πειραματικά δεδομένα αποτελούν σημαντικό πεδίο ελέγχου. Στον Πίνακα II, παραθέτονται οι τιμές της τριάδας των παραμέτρων των υδροφορέων n , k και η παράμετρος w , όπως εκτιμήθηκαν κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης που προαναφέραμε και μπορούν να συγκριθούν με τις πρωτότυπες δημοσιευμένες τιμές των πειραμάτων.

Πίνακας II. Πειραματικές τιμές αναφοράς και υπολογισμένες (με έντονα γράμματα) από την εφαρμογή του υβριδικού μοντέλου για τα τέσσερα πειράματα αποστράγγισης που μελετήθηκαν.

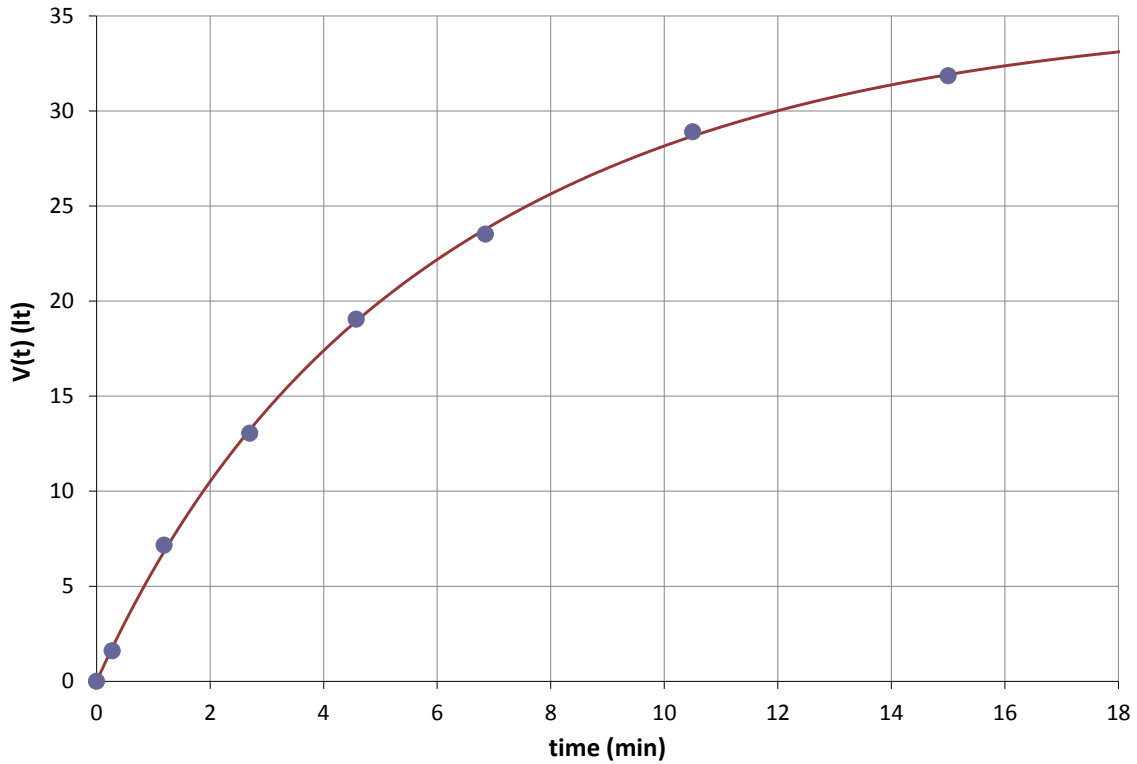
Experiment	$\phi(^{\circ})$	length (m)	Width (m)	Height (m)	Q_0 (lt/min)	K (m/day)	K (m/day)	n	n	w
Mizumura	2.86	1.800	0.400	0.700	2.32	11.64	11.89	0.230	0.245	-0.026
Sanford et al.	5.10	2.450	0.300	0.220	8.75	674	727	0.238	0.242	0.23
Sanford et al.	7.85	2.450	0.300	0.218	6.60	553	472	0.238	0.232	0.42
Coweeta	21.8	13.720	0.914	-	0.44	4.03	4.02	0.264	0.268	0.92



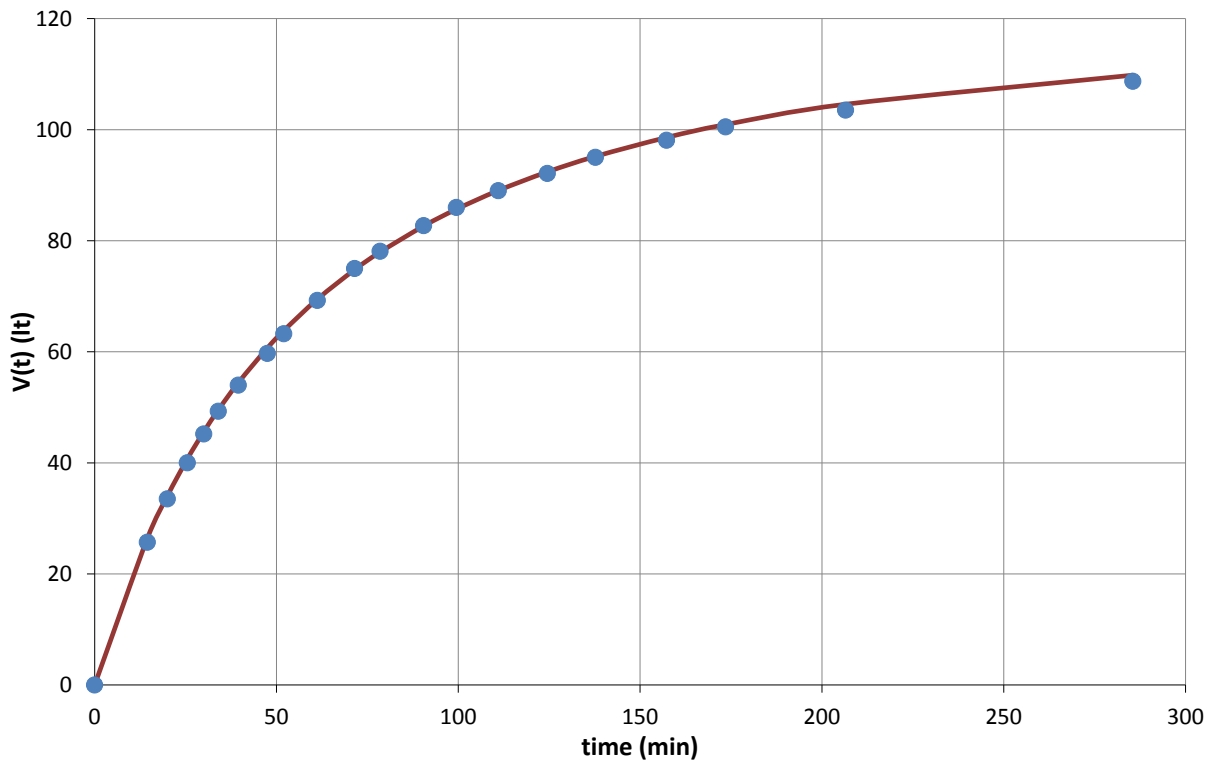
Σχήμα 12. Μετρήσεις συνολικής απορροής (σημεία) κατά την αποφόρτιση στο πείραμα *Coweeta* (*Hewlett and Hibbert, 1963*) και εφαρμογή του υβριδικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στη συγκεκριμένη εργασία (γραμμή).



Σχήμα 13. Μετρήσεις συνολικής απορροής (σημεία) κατά την αποφόρτιση στο πείραμα των *Sanford et al.* (1993) για γωνία $\phi = 5.1^\circ$, και εφαρμογή του υβριδικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στη συγκεκριμένη εργασία (γραμμή).



Σχήμα 14. Μετρήσεις συνολικής απορροής (σημεία) κατά την αποφόρτιση στο πείραμα των *Sanford et al.* (1993) για γωνία $\varphi = 7.85^\circ$, και εφαρμογή του υβριδικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στη συγκεκριμένη εργασία (γραμμή).



Σχήμα 15. Μετρήσεις συνολικής απορροής (σημεία) κατά την αποφόρτιση στο πείραμα *Mizumura* (2002) και εφαρμογή του υβριδικού υδρολογικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στη συγκεκριμένη εργασία (γραμμή).

Επιπλέον στα Σχήματα 12 – 15, παρουσιάζεται η εφαρμογή του μοντέλου μας στις πειραματικές μετρήσεις. Σε κάθε περίπτωση η προσαρμογή είναι πλήρης. Επιπλέον η εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων (η οποία να υπενθυμίσουμε ότι έγινε με αντικειμενική ανεξάρτητη διαδικασία) μπορεί να θεωρηθεί πολύ ακριβής στα πλαίσια της συνήθους αβεβαιότητας (περίπου 10% σφάλμα) στην προσέγγιση τους. Οι τιμές της εμπειρικής τιμής w ακολουθούν τη σαφή λογική της ιδέας του υβριδικού μοντέλου οδηγώντας σε τιμές κοντά στο 0 (τετραγωνική περιοχή), στην περίπτωση του πειράματος του *Mizumura*, και σε τιμές που πλησιάζουν προς το 1 (γραμμική περιοχή), στην περίπτωση του πειράματος *Coweeta*. Ακολουθούν δηλαδή τη λογική των πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αντίστοιχα αρχικών τιμών της παραμέτρου λ που αντιστοιχούν στα δύο πειράματα. Η μικρή απόκλιση από τις ακριβείς τιμές 1 (στην περίπτωση του *Coweeta*) και 0 (στην περίπτωση *Mizumura*) αποτελεί το επιστέγασμα της εμπειρικής εφαρμογής που περικλείει και συγχωνεύει τις όποιες θεωρητικές και πειραματικές ασάφειες, προσεγγίσεις και αβεβαιότητες έχουν υπεισέλθει. Η μικρή απόκλιση από τις θεωρητικές τιμές (0 και 1) σε συνδυασμό με την έξοχη συνολική συμφωνία, μόνον ως επιτυχία του υβριδικού μοντέλου μπορεί να ερμηνευθεί.

5. Συμπεράσματα

Η εργασία που παρουσιάστηκε έχει ως αντικείμενο τη μοντελοποίηση της ροής του νερού σε υπόγειο υδροφορέα με κλίση. Για την επίτευξη του παραπάνω στόχου, η μελέτη βασίστηκε στην εφαρμογή της γενικευμένης υδραυλικής θεωρίας του *Boussinesq* και των *Dupuit – Forchheimer*, ενώ έγινε παραδοχή δημιουργίας συνθηκών ημι-μόνιμης (*quasi-steady*) ροής. Υποθέτοντας μία σχέση μεταξύ των χαρακτηριστικών παραμέτρων *S-Q* υπαγορεύεται ένα είδος καταστατικής εξίσωσης που περιγράφει τη ροή σε ένα υπόγειο υδροφορέα, η οποία βασίζεται στη σύζευξη εμπειρικών ιδεών και αμιγούς υδραυλικής θεωρίας. Η θεώρηση της οιονεί κατάστασης ισορροπίας ορίζει μία τέτοια σχέση μεταξύ των παραμέτρων *S-Q*, ώστε να διατηρείται το σύστημα σε υποθετική συνεχή κατάσταση ισορροπίας. Η παραδοχή που γίνεται είναι, πως οι μεταβατικές – ενδιάμεσες καταστάσεις δύναται να περιγραφθούν από μία σειρά διαδοχικών καταστάσεων ισορροπίας και η οποία έχει μία μακρά ιστορία στην υδρολογία και την επιστήμη γενικότερα, καθώς επίσης τα τελευταία χρόνια έχει τύχει ιδιαίτερης χρήσης στην υδρολογία. Σε αντίθεση με παλαιότερες μελέτες, στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν οι ακριβείς λύσεις για την αποθηκευτικότητα του υδροφορέα σε συνθήκες μόνιμης ροής διατηρώντας τη μη γραμμικότητα χωρίς οποιαδήποτε γραμμική ή άλλη εμπειρική προσέγγιση, προκειμένου να αναπτυχθούν οι ακριβείς μαθηματικές σχέσεις *S-Q*. Αποδείχθηκε ότι οι μαθηματικές μορφές που εξάγονται οδηγούν αβίαστα στη θεωρητική στοιχειοθέτηση παραδοσιακά χρησιμοποιούμενων εμπειρικών σχέσεων, χωρίς την ανάγκη της εισαγωγής εμπειρικών παραμέτρων. Επιπλέον υποδεικνύουν με σαφήνεια τα όρια ισχύος των παλαιότερων προσεγγίσεων. Συγκεκριμένα, τόσο το γραμμικό όσο και το τετραγωνικό μοντέλο που έχουν προταθεί στα πλαίσια ημι-εμπειρικών ιστορικών προσεγγίσεων επανεμφανίστηκαν προερχόμενα από μία νέα και πρωτότυπη θεωρητική διαδρομή. Τα μόνα συστατικά στο σχηματισμό των παραπάνω είναι η ακριβής μη-γραμμική εξίσωση του *Boussinesq* και η υπόθεση της οιονεί μόνιμης (ημι-μόνιμης) κατάστασης ισορροπίας. Σύμφωνα με τη μαθηματική ανάλυση που παρουσιάστηκε, διαφαίνεται η δυνατότητα να ακολουθηθεί η συγκεκριμένη θεωρητική προσέγγιση στο σύνολο της, χωρίς άλλες υποθέσεις ή εννοιολογικές προσεγγίσεις. Αυτό κατέστη δυνατόν, αφού η ενιαία θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί ακριβώς στις λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης του *Boussinesq*, όπως αυτές δομούνται για την περίπτωση της κατάστασης ισορροπίας σε μόνιμη ροή. Η ίδια η φύση της ενιαίας λύσεως επιβάλλει σε περιπτώσεις μεγάλων κλίσεων ή χαμηλού ρυθμού επαναφόρτισης, μια γραμμική σχέση μεταξύ των παραμέτρων *S-Q*, ενώ σε

περιπτώσεις μικρών κλίσεων ή μεγάλων ρυθμών επαναφόρτισης, η σχέση των προαναφερθέντων παραμέτρων αντικαθίσταται από μία ασυμπτωτική μορφή του τύπου $Q-S^2$. Σαφέστατα, εφόσον οι δύο παραπάνω σχέσεις απορρέουν απευθείας από την εξίσωση του *Boussinesq*, δεν υφίστανται επιπλέον παράμετροι, παρά μόνον οι φυσικές του προβλήματος. Σε αντίθεση δηλαδή με την ημι-εμπειρική προσέγγιση παρελθοντικών εργασιών πάνω στο γραμμικό και τετραγωνικό μοντέλο, σε αυτήν την εργασία προκύπτουν θεωρητικά στοιχειοθετημένες ολοκληρωμένες υδραυλικές σχέσεις χωρίς την ύπαρξη εμπειρικότητας. Αυτά τα μοντέλα μπορούν να εφαρμοστούν ενιαία εντός των ορίων ισχύος τους. Φυσικά, όπως είναι φυσικό αναμένεται να έχουν καλύτερες επιδόσεις (μικρότερη αβεβαιότητα) στα συστήματα με συνδυασμούς παραμέτρων που συνδέονται με αυτά.

Από τη στιγμή που μορφοποιούνται τα δύο συγκεκριμένα υδραυλικά μοντέλα, ένα υδρολογικό υβριδικό εμπειρικό μοντέλο που ακολουθεί την αρχή διατήρησης της μάζας μπορεί εύκολα να σχεδιασθεί ως γραμμική παρεμβολή των δύο παραπάνω κλάδων που αναλύθηκαν, όπως προτάθηκε και αναπτύχθηκε. Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμεύσει ως ένα ευέλικτο εργαλείο που μπορεί να αμβλύνει τις αβεβαιότητες που υφίστανται στις βασικές θεωρητικές προσεγγίσεις μας, δηλαδή της οιονεί κατάστασης ισορροπίας αλλά και τις παραδοχές που εμπλέκονται στην ίδια την εξίσωση του *Boussinesq*, καθώς και τις αβεβαιότητες των πραγματικών δεδομένων. Το υβριδικό μοντέλο, ή *w*-μοντέλο, όπως το αποκαλούμε, διαθέτει μια ελεύθερη παράμετρο, το βάρος *w* που καθορίζει τη γραμμική παρεμβολή, και παρέχει μία ομάδα υδρογραφημάτων, τα οποία σε πολύ υψηλό βαθμό επιτυγχάνουν την παραμετροποίηση πραγματικών υδρογραφημάτων. Το βάρος *w* καθορίζεται από χαρακτηριστικές ιδιότητες του υδρογραφήματος, όπως τον συνολικό όγκο του νερού που αποβάλλεται ή απορροφάται από το έδαφος. Κατά σύμπτωση, ένα παρόμοιου τύπου μοντέλο χρησιμοποιήθηκε και από τους *Ishihara and Takagi* (1965), με τελείως όμως εμπειρική εφαρμογή και κατασκευή, θεωρώντας ότι η συνάρτηση απορροής είναι ένα εντελώς εμπειρικό άθροισμα του γραμμικού και του τετραγωνικού ταμιευτήρα σε περιπτώσεις αποφόρτισης. Στη δική μας περίπτωση το προτεινόμενο υδρολογικό μοντέλο πέραν του ότι είναι πλήρως τεκμηριωμένο από φυσική άποψη, έχει την ελάχιστη δυνατή εμπειρικότητα, και μπορεί να περιγράψει με ιδιαίτερη ακρίβεια γνωστά πειραματικά δεδομένα. Σε διεξοδική εφαρμογή και έλεγχο του υβριδικού μοντέλου πάνω σε τέσσερα ιστορικά πειράματα απορροής η προσαρμογή σε κάθε περίπτωση ήταν πλήρης και ιδιαίτερα ικανοποιητική. Επιπλέον η εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων φυσικών παραμέτρων των υδροφορέων (η οποία να υπενθυμίσουμε ότι έγινε με αντικειμενική ανεξάρτητη διαδικασία) ήταν πολύ ακριβής στα πλαίσια της συνήθους αβεβαιότητας (περίπου 10% σφάλμα) στην προσέγγιση

τους. Οι τιμές της εμπειρικής τιμής w ακολουθούν τη σαφή λογική της ιδέας του υβριδικού μοντέλου οδηγώντας σε τιμές κοντά στο 0 (τετραγωνική περιοχή), στην περίπτωση του πειράματος του *Mizumura*, και σε τιμές που πλησιάζουν προς το 1 (γραμμική περιοχή), στην περίπτωση του πειράματος *Coweeta*. Ακολουθούν δηλαδή τη λογική των πολύ μεγάλων και πολύ μικρών αντίστοιχα αρχικών τιμών της παραμέτρου λ που αντιστοιχούν στα δύο πειράματα. Η μικρή απόκλιση από τις ακριβείς τιμές 1 (στην περίπτωση του *Coweeta*) και 0 (στην περίπτωση *Mizumura*) αποτελεί το επιστέγασμα της εμπειρικής εφαρμογής που περικλείει και συγχωνεύει τις όποιες θεωρητικές και πειραματικές ασάφειες, προσεγγίσεις και αβεβαιότητες έχουν υπεισέλθει. Η μικρή απόκλιση από τις θεωρητικές τιμές (0 και 1) σε συνδυασμό με την έξοχη συνολική συμφωνία, μόνον ως επιτυχία του υβριδικού μοντέλου μπορεί να ερμηνευθεί.

6. Βιβλιογραφία

- [1] Akylas E, Koussis AD (2007), *Response of sloping unconfined aquifer to stage changes in adjacent stream I. Theoretical analysis and derivation of system response functions. J Hydrol* 338, 85–95.
- [2] Akylas E, Koussis AD, Yannacopoulos AN (2006), *Analytical solution of transient flow in a sloping soil layer with recharge. J Hydrol Sci* 51(4):626–641.
- [3] Ambroise, B. (1988), *Interactions eaux – eaux de surface dans le bassin du Ringelback a Sultzeren (hautes Vosges, France): Role hydrologique des surfaces saturces (English abstract). In Q P. Dahlblom and G. Lindh (Editors), Interaction between Groundwater and Surface Water, Proc. Ystad Symp. Dept. Water Resour. Eng., Lund University, Lund, pp. 231-238.*
- [4] Basha HA, Maalouf SF (2005), *Theoretical and conceptual models of subsurface hillslope flows. Water Resour Res* 41:W07018.
- [5] Beven K (1981), *Kinematic subsurface stormflow. Water Resour Res* 17(5):1419–1424.
- [6] Beven, K.J., and M.J. Kirkby. (1979), *A physically based, variable contributing area model of basin hydrology. Hydrol. Sci. Bull.*, 24, 43-69.
- [7] Boussinesq, J. (1877), *Essai sur la theorie des eaux courantes du mouvement nonpermanent des eaux souterraines. Acad. Sci. Inst. Fr.* 23, 252–260.
- [8] Boussinesq, J. (1903), *Sur un mode simple d'ecoulement des nappes d'eau d'infiltration a lit horizontal, avec rebord vertical tout au tour lorsqu'une partie de ce rebord est enlevee depuis la surface jusqu'au fond. C.R. Acad. Sci.* 137, 5-11.
- [9] Boussinesq, J. (1904), *Recherches theoriques sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltre'es dans le sol et sur le de'bit des sources. J. Math. Pure Appl.* 10, 5–78.
- [10] Brutsaert, W. (1994), *The unit response of groundwater outflow from a hillslope, Water Resour. Res.*, 30(10), 2759-2763.
- [11] Brutsaert, W., and J. L. Nieber. (1977), *Regionalized drought flow hydrographs from a mature glaciated plateau, Water Resour. Res.*, 13(3), 637-643.
- [12] Brutsaert, W., and J.L. Nieber. (1977), *Regionalized drought flow hydrographs from a mature glaciated plateau. Water Resources Research* 13, no.3: 637-643.
- [13] Chapman TG (1980), *Modeling groundwater flow over sloping beds. Water Resour Res* 16(6):1114–1118.

- [14] Chapman, T. (1995), *Comment on: the unit response of groundwater outflow from a hillslope*. *Water Resour Res* 31(9):2376–2777.
- [15] Chapman, T. G. (2003), *Steady recharge-induced groundwater flow over a plane bed: Nonlinear and linear solutions, paper presented at MODSIM 2003 International Congress on Modelling and Simulation, Modell. And Simul. Soc. of Aust. and N. Z., Townsville, Queensl., Australia*.
- [16] Chapman, T.G. (1963), *Effects of ground-water storage and flow on the water balance in Water Resources, Use and Management*, pp. 290-301, *Melbourne University Press, Canberra*.
- [17] Chapman, T.G. (2005), *Recharge-induced groundwater flow over a plane sloping bed: solutions for steady and transient flow using physical and numerical models*. *Water Resour Res* 41:W07027.
- [18] Chapuis RP (2011), *Steady state groundwater seepage in sloping unconfined aquifers*. *Bull Eng Geol Environ* 70:89–99.
- [19] Childs E.C. (1971), *Drainage of groundwater resting on a sloping bed*. *Water Resour Res* 7(5):1256–1263.
- [20] Henderson, F. M. & Wooding, R. A. (1964), *Overland flow and groundwater flow from a steady rainfall of finite duration*. *J. Geophys. Res.* 69(8), 1531–1540.
- [21] Hewlett, J. D., and A. R. Hibbert (1963), *Moisture and energy conditions within a sloping mass during drainage*, *J. Geophys. Res.*, 68, 1081–1087.
- [22] Ishihara, T. and Takagi, F. (1965), *A study of the variation of low flow*, *Disaster Prev. Res. Inst. Kyoto University Bull., Res.*, 6(4): 1062-1069.
- [23] Koussis A. and E. Akylas, (2012), *Steady state groundwater seepage in sloping unconfined aquifers RP Chapuis*, *Bull Eng Geol Environ* 70, 89–99.
- [24] Koussis A. and E. Akylas, (2012), *Slug Test in Confined Aquifers, the Over-Damped Case: Quasi-Steady Flow Analysis*, *Ground Water*.
- [25] Koussis A.D, Smith ME, Akylas E, Tombrou M (1998), *Groundwater drainage flow in a soil layer resting on an inclined leaky bed*. *Water Resour Res* 34(11):2879–2887.
- [26] Koussis A.D. (1992), *A linear conceptual subsurface storm flow model*. *Water Resour Res* 28(4):1047–1052.
- [27] Koussis A.D. Lien L-T. (1982), *Linear theory of subsurface stormflow*. *Water Resour Res* 18(6):1738–1740.
- [28] Koussis AD, Akylas E, Mazi K (2007), *Response of sloping unconfined aquifer to stage changes in adjacent stream II. Applications*. *J Hydrol* 338:73–84.

- [29] Maillet, E. (1905) *Essais d'hydraulique souterraine et fluviale*. Librairie Sci., A. Hermann, Paris, 218.
- [30] Mizumura, K. (2002), *Drought flow from hillslope*, *J. Hydrol. Eng.*, 7(2), 109– 115.
- [31] Pauwels VRN, Verhoest NEC and De Troch FP (2002), *A metahillslope model based on an analytical solution to a linearized Boussinesq equation for temporally variable recharge rates*. *Water Resour Res* 38(12):33.
- [32] Polubarinova-Kochina, P. Ya. (1962), *Theory of Ground Water Movement*, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [33] Sanford, W. E., J.-Y. Parlange, and T. S. Steenhuis (1993), *Hillslope drainage with sudden drawdown: Closed form solution and laboratory experiments*, *Water Resour. Res.*, 29, 2313– 2322.
- [34] Singh, K.P. (1969), *Theoretical baseflow curves*. *J. Hydraul. Div.*, HY 6: 2029-2048.
- [35] Tallaksen, L.M. (1995), *A review of baseflow recession analysis*. *Journal of Hydrology* 165: 349-370.
- [36] Varvaris, I., Gravanis, E., Koussis, A., and Akylas, E. (2013), *Nonlinear storage models of unconfined flow through a shallow aquifer on an inclined base and their quasi-steady flow application*, *European Geosciences Union, General Assembly 2013, Vienna, Austria, April 2013*.
- [37] Verhoest NEC, Troch PA (2000), *Some analytical solutions of the linearized Boussinesq equation with recharge for a sloping aquifer*. *Water Resour Res* 36(3):793–800.
- [38] Werner, P.W. and Sundquist, K.J. (1951), *On the groundwater recession curve for large watersheds*. *IAHS Publ.*, 33: 202-212.
- [39] Wittenberg, H. (1994), *Nonlinear Analysis of Flow Recession Curves*. In *FRIEND: Flow Regimes from International Experimental and Network Data*, ed. By P. Seuna, A. Gustard, N.W. Arnell and G.A. Cole, *IAHS Publication*, 221, 61-67.
- [40] Wittenberg, H. (1999), *Baseflow Recession and Recharge as Nonlinear Storage Processes*, *Hydrological Processes*, 13, 715-726.
- [41] Wooding, R. A., and T. G. Chapman (1966), *Groundwater flow over a sloping impermeable layer: I. Application of the Dupuit-Forchheimer assumption*, *J. Geophys. Res.*, 71(12), 2895–2902.
- [42] Βασιλακόπουλος, Γ. (2010), *Μαθηματική προσομοίωση και αριθμητική επίλυση της ροής του υπόγειου νερού σε ελεύθερο υδροφόρα που υπόκειται σε σύγχρονη επίδραση αντλήσεων και επαναφόρτισης*, *Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Αξιοποίησης Φυσικών Πόρων και Γεωργικής Μηχανικής, Τομέας Διαχείρισης Υδάτινων Πόρων, Εργαστήριο Γεωργικής*

Υδραυλικής, σελ. 19-25.

[43] Κουτσογιάννης, Δ. και Ξανθόπουλος Θ. (1999), «Τεχνική Υδρολογία», Έκδοση 3^η, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τομέας Υδατικών Πόρων, Αθήνα, σελ. 353-355.

[44] Μουτσόπουλος, Κ. (2008), «Σημειώσεις Υπόγειας Υδραυλικής», Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος Δ.Π.Θ., Ξάνθη, σελ 1-10.

[45] Σούλιος, Γ. (1996), «Γενική Υδρολογία Α' Τόμος», Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, σελ. 1-100.