

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ



Μεταπτυχιακή Διατριβή
ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ
ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΥΔΡΟΦΟΡΕΑ ΚΑΤΑ
ΤΗΝ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

Θεοδουλίδης Κυριάκος

Λεμεσός 2015

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ
ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΥΔΡΟΦΟΡΕΑ ΚΑΤΑ
ΤΗΝ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

του

Θεοδουλίδη Κυριάκου

Λεμεσός 2015

ΕΝΤΥΠΟ ΕΓΚΡΙΣΗΣ

Μεταπτυχιακή διατριβή

**ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ
ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΥΔΡΟΦΟΡΕΑ ΚΑΤΑ
ΤΗΝ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΦΟΡΤΙΣΗ**

Παρουσιάστηκε από

Κυριάκο Θεοδουλίδη

Επιβλέπων καθηγητής _____

Μέλος επιτροπής _____

Μέλος επιτροπής _____

Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Κύπρου

Οκτώβριος, 2015

Πνευματικά δικαιώματα

Copyright © Κυριάκος Θεοδοουλίδης, 2015

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Η έγκριση της μεταπτυχιακής διατριβής από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Γεωπληροφορικής του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου Κύπρου δεν υποδηλώνει απαραίτητως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος.

Στον παππού μου Γιαννάκη Αντωνίου...

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει γίνει στα πλαίσια της μεταπτυχιακής μελέτης στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Γεωπληροφορικής του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου της Κύπρου. Αντικείμενο της μελέτης είναι η κατασκευή μοντέλου της εξέλιξης του προφίλ του νερού σε υπόγειο υδροφορέα και κατασκευή νέων προσεγγιστικών λύσεων της εξίσωσης *Boussinesq* για την περίπτωση του περιορισμένου οριζόντιου υδροφόρου ορίζοντα υπό συνθήκες ομοιόμορφης φόρτισης. Θα παρουσιαστούν δύο απλοποιημένες γραμμικοποιήσεις της εξίσωσης του *Boussinesq* για τον οριζόντιο υδροφορέα, οι οποίες οδηγούν εν μέρη σε επιλύσιμες μορφές και από τη σύγκριση τους με την αριθμητική επίλυση της *Boussinesq* γίνεται φανερή η αδυναμία της ακριβούς περιγραφής και η έλλειψη σαφούς μαθηματικής διατύπωσης για την ερμηνεία του φαινομένου. Εν τέλει προτείνεται λεπτομερώς μια πρωτότυπη καινοτόμα προσέγγιση η οποία διατηρεί τη μη γραμμικότητα της βασικής εξίσωσης και πιστεύω με την κατάλληλη διεύρυνση των δυνατοτήτων της σε μεταγενέστερο στάδιο σε λειτουργία υπό περισσότερων μεταβλητών παραμέτρων, θα αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμο στην κατανόηση της πραγματικής συμπεριφοράς κίνησης του νερού στους υπόγειους υδροφορείς.

Στην καίρια ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας, σπουδαίο ρόλο διαδραμάτισε η καθολική και συνεχής επίβλεψη από τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών και Μηχανικών Γεωπληροφορικής του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου Κύπρου Δρ. Ευάγγελο Ακύλα, που με την πολύτιμη βοήθεια και τις απέραντες γνώσεις που μου παρείχε, δεν θα είχε επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια, τους φίλους και γενικά τα άτομα που βρίσκονται κοντά μου για την πολύτιμη υποστήριξη και συμπαράσταση τους καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Κυριάκος Σ. Θεοδουλίδης

Οκτώβριος 2015

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή επικεντρωθήκαμε στη μελέτη και κατασκευή νέων προσεγγιστικών λύσεων της εξίσωσης *Boussinesq* για την περίπτωση του περιορισμένου οριζόντιου υδροφόρου ορίζοντα υπό συνθήκες ομοιόμορφης φόρτισης. Παρουσιάστηκαν δύο απλοποιημένες γραμμικοποιήσεις της εξίσωσης του *Boussinesq* για τον οριζόντιο υδροφορέα, οι οποίες οδηγούν εν μέρη σε επιλύσιμες μορφές και στη συνέχεια αναπτύχθηκε σε λεπτομέρεια μία καινούργια προσέγγιση η οποία διατηρεί τη μη γραμμικότητα της βασικής εξίσωσης σε μεγάλο βαθμό. Από τη σύγκριση των γραμμικών λύσεων με την αριθμητική επίλυση της *Boussinesq* γίνεται φανερή η αδυναμία της ακριβούς περιγραφής και η έλλειψη σαφούς μαθηματικής διατύπωσης για την ερμηνεία του φαινομένου. Σε κάθε περίπτωση όμως διαφαίνεται ένας σαφής διαχωρισμός της εξέλιξης του προφίλ σε μικρούς χρόνους, μικρότερους του 0.4, και μεγαλύτερους από το 0.4 χρόνους, συμπέρασμα το οποίο αποτελεί και την κεντρική ιδέα και έμπνευση για μία πιο αποτελεσματική και περιγραφική πρωτότυπη προσέγγιση του προβλήματος με μία νέα πρωτότυπη μέθοδο. Η νέα μέθοδος βασίζεται σε μια εξειδικευμένη εικασία «*ansatz*» του προφίλ του νερού στον υδροφορέα για κάθε φάση του, που αφήνει ορισμένες λειτουργίες του χρόνου ως βαθμούς ελευθερίας για να καθοριστεί έτσι δυναμικά μέσα από τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση η εξέλιξη τους. Οι προκύπτουσες συνθήκες μπορούν να λυθούν με ακρίβεια έτσι που να οδηγούν σε προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες είναι σαφείς και απλές. Οι λύσεις των δύο φάσεων σε σύγκριση με τις αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* δείχνουν μάλλον πως συμφωνούν εντυπωσιακά αποδίδοντας ποιοτικά και ποσοτικά τα χαρακτηριστικά της πλήρους εξίσωσης. Η μη γραμμικότητα στην εξέλιξη του προβλήματος έχει αποκατασταθεί και σε χρονικούς και σε χωρικούς όρους και σε κάθε στιγμιότυπο είναι πολύ ακριβέστερη από τις προσεγγιστικές γραμμικές λύσεις. Σε κάθε περίπτωση η ξεκάθαρη αναλυτική περιγραφή και η ακρίβεια της προσέγγισης θεωρούμε ότι αποδίδει ευκρινώς τη φυσική της εξέλιξης και αποτελεί ένα μικρό βήμα στην κατανόηση του φαινομένου.

ABSTRACT

In this project we focused on the study and construction of new approximate solutions of the Boussinesq equation for the case of the limited horizontal aquifer under uniform load conditions. There were two simplified linearization of Boussinesq equation for horizontal aquifer, leading partly to solvable forms and then developed in detail a new approach that maintains the non-linearity of the standard equation. A comparison of linear solutions to the numerical solution of Boussinesq equation becomes obvious weakness specified and the lack of a clear mathematical formulation for the interpretation of the phenomenon. In any case appears a clear separation of the evolution profile at less times, smaller than 0.4 and greater than 0.4 times, a conclusion which is also the central idea and inspiration for a more effective and descriptive novel approach to the problem with a new original method. The new method is based on a specialized guess «*ansatz*» profile of the water in the aquifer for each phase, leaving some functions of time as degrees of freedom to determine their so dynamically through the nonlinear differential equation of evolution. The resulting conditions can be solved with precision so as to lead to approximate solutions which are clear and simple. The solutions of the two phases compared to the corresponding numerical solutions of Boussinesq equation probably show that agree remarkably yielding qualitative and quantitative characteristics of the full equation. The nonlinearity in the evolution of the problem has been restored in temporal and spatial terms that in each case is much more accurate than the approximate linear solutions. In any case the clear detailed description and the precision of this approach, clearly attaches its natural evolution and is a small step to the complete understanding of the phenomenon.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	i
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	iii
ABSTRACT	iv
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	v
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	vii
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	viii
1. Εισαγωγή στην μελέτη υπόγειων υδάτινων πόρων.....	1
1.1 Γενικά στοιχεία	1
1.2 Υπόγειοι Υδροφορείς και η σημασία τους.....	2
1.3 Ο ρόλος των υπόγειων υδατικών πόρων στην διαχείριση υδατικών συστημάτων	3
1.4 Περιβαλλοντικές επιπτώσεις από την διαχείριση υδάτινων πόρων	4
1.5 Περιγραφή και ταξινόμηση υπόγειων υδροφορέων.....	7
1.6 Ιστορική αναδρομή στην υδραυλική περιγραφή υπόγειων υδάτων.....	8
1.7 Δομή εργασίας.....	10
2. Μαθηματική προσέγγιση υπόγειων υδροφορέων	11
2.1 Παράμετροι Υπόγειου Υδροφορέα – Εξίσωση <i>Boussinesq</i>	11
2.2 Νόμος του Darcy	15
2.3 Η εξίσωση της Συνέχειας	16
3. Καινοτόμες επιλύσεις της εξίσωσης <i>Boussinesq</i> κατά την ομοιόμορφη φόρτιση πεπερασμένου οριζόντιου υπόγειου υδροφορέα	23
3.1 Γραμμικές Προσεγγίσεις (<i>Linear approximation</i>) της εξίσωσης <i>Boussinesq</i>	25
3.1.1 Γραμμική προσέγγιση σύμφωνα με τον <i>Chapman</i> (1995).....	25
3.1.2 Γραμμικοποίηση με προφίλ σταθερού σχήματος.....	26
3.2 Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (3.5).....	27

3.3 Συγκρίσεις των γραμμικών λύσεων με την αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5).....	28
3.4 Μη γραμμική προσέγγιση της εξίσωσης <i>Boussinesq</i> με την χρήση προαποφασισμένων συναρτησιακών μορφών	31
4. Συμπεράσματα.....	37
5. Βιβλιογραφία.....	39

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 2.1 Σχηματική παράσταση περιορισμένου και φρεάτιου υπόγειου υδροφορέα.....	8
(Koutsogiannis και Xanthopoulos, 1999)	8
Σχήμα 2.3.1 Διαφορικός όγκος αναφοράς	16
Σχήμα 3.1. Σχηματική αναπαράσταση της ροής σε οριζόντιο υδροφορέα με φόρτιση.....	23
Σχήμα 3.2 Αδιάστατα προφίλ του νερού κατά το στάδιο της φόρτισης από αρχική μηδενική συνθήκη για αδιάστατους χρόνους $\tau = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Με μαύρη συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Με διακεκομμένες γραμμές οι γραμμικές προσεγγίσεις από τις εξίσωση (3.10) (με μπλε χρώμα επιλυόμενη αριθμητικά) και την αναλυτική (3.13) (με μπλε χρώμα).	29
Σχήμα 3.3 Αδιάστατα προφίλ του νερού κατά το στάδιο της φόρτισης από αρχική μηδενική συνθήκη για αδιάστατους χρόνους $\tau = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0, 1.2$. Με μαύρη συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Με διακεκομμένες γραμμές οι γραμμικές προσεγγίσεις από τις εξίσωση (3.10) (με μπλε χρώμα επιλυόμενη αριθμητικά) και την αναλυτική (3.13) (με μπλε χρώμα).	30
Σχήμα 3.4 Αδιάστατα προφίλ του νερού κατά το στάδιο της φόρτισης από αρχική μηδενική συνθήκη για αδιάστατους χρόνους $\tau = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Με μαύρη συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Με διακεκομμένες γραμμές οι γραμμικές προσεγγίσεις από τις εξίσωση (3.10) (με μπλε χρώμα επιλυόμενη αριθμητικά) και την αναλυτική (3.13) (με μπλε χρώμα). Με πράσινο χρώμα η καμπύλη της εξέλιξης της νέας μεθόδου όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.4.....	33
Σχήμα 3.5 Αδιάστατα προφίλ του νερού κατά το στάδιο της φόρτισης από αρχική μηδενική συνθήκη για αδιάστατους χρόνους $\tau = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0, 1.2$. Με μαύρη συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Με διακεκομμένες γραμμές οι γραμμικές προσεγγίσεις από τις εξίσωση (3.10) (με μπλε χρώμα επιλυόμενη αριθμητικά) και την αναλυτική (3.13) (με μπλε χρώμα). Με πράσινο χρώμα η καμπύλη της εξέλιξης της νέας μεθόδου όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.4.....	34
Σχήμα 3.6 Σχετική απόκλιση (%) εξέλιξης του προφίλ σε οριζόντιο υδροφορέα με επαναφόρτιση με βάση τη μεθοδολογία του κεφαλαίου 3.4 σε σχέση με την ακριβή αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5).....	35

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 2.1 Τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας (Kallergis et al., 1999).....	12
Πίνακας 2.2 Ενδεικτικές Τιμές ολικού πορώδους σε πετρώματα (Kallergis et al., 1999).....	15

1. Εισαγωγή στην μελέτη υπόγειων υδάτινων πόρων

1.1 Γενικά στοιχεία

Το υπόγειο νερό αποτελεί περίπου το 30% των αποθεμάτων του συνολικού γλυκού νερού, ή αλλιώς το 99% περίπου των αποθεμάτων γλυκού νερού ολόκληρης της Γης. Η επιφάνεια της Γης το 71% καλύπτεται από νερό, ωστόσο το σύνολο του γλυκού νερού που υπάρχει είναι μόλις το 2.6% του συνολικού νερού και αυτό αποθηκεύεται στους ταμιευτήρες όπως λίμνες, ποτάμια, χείμαρρους, στους πολικούς πάγους, υπόγεια γλυκά νερά, εδαφική και υπεδαφική υγρασία και ατμοσφαιρική υγρασία. Από το σύνολο του γλυκού νερού το 98% βρίσκεται στους πολικούς πάγους ή στους υπόγειους υδροφορείς ενώ το υπόλοιπο 2% καταλαμβάνει την επιφάνεια της Γης υπό μορφή λίμνων, ποταμών και φραγμάτων. Τα ποσοστά της επιφανειακής απορροής που συμμετέχουν στο ετήσιο υδατικό ισοζύγιο μπορούν να θεωρηθούν ως φανταστικά, αφού μεγάλο ποσοστό των επιφανειακών νερών νωρίτερα έχει υπάρξει ως υπόγειο νερό που τροφοδότησε την επιφανειακή απορροή μέσω των εκφορτίσεων των πηγών και παρομοίως αντίθετα, ένα ποσοστό των υπόγειων υδάτων έχουν προηγουμένως υπάρξει ως επιφανειακή απορροή που διηθήθηκε διαμέσου του εδάφους στους υπόγειους υδροφορείς. Συνεπώς, παρατηρείται πως η πραγματική συμβολή των υπόγειων υδάτων στο ετήσιο παγκόσμιο υδρολογικό ισοζύγιο πρέπει να είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από τα πιο πάνω ποσοστά. Η επιφανειακή απορροή και η υπόγεια απορροή διαφέρουν σε μεγάλο βαθμό ως προς τη χρονική κλίμακα εξέλιξης του γεγονότος έτσι μπορεί να διαπιστωθεί πως ο μέσος χρόνος παραμονής του επιφανειακού νερού στους ποταμούς είναι της τάξης του μισού με ένα μήνα, ενώ αντίστοιχα ο μέσος χρόνος παραμονής του υπόγειου νερού στους υπόγειους ταμιευτήρες κυμαίνεται από μερικά χρόνια μέχρι μερικές χιλιετίες. Η πολύ αργή κίνηση των υδάτων στην φάση της υπόγειας απορροής φέρει κάποιες χαρακτηριστικές συνέπειες όπως (Soulis 1996):

Η κίνηση του νερού χαρακτηρίζεται από νόμους που σχετίζονται από ήπιες γραμμικές ή σχεδόν γραμμικές σχέσεις παροχής ή ενεργειακών απωλειών. Η τροφοδοσία των επιφανειακών υδάτων από τους υπόγειους υδροφορείς γίνεται με ομαλούς, σχεδόν ομοιόμορφους ρυθμούς, σε αντίθεση με τους έντονα μεταβαλλόμενους ρυθμούς της επιφανειακής απορροής. Αρκετά σημαντικό είναι πως το φαινόμενο της ρύπανσης των υπόγειων νερών εξελίσσεται με ιδιαίτερα αργούς ρυθμούς, με αποτέλεσμα η μη ορθή διαχείριση τους να οδηγεί πολλές φορές σε μη αναστρέψιμα αποτελέσματα για το περιβάλλον. Ως φυσικοί ταμιευτήρες μπορούν να

θεωρηθούν τα υπόγεια υδάτινα σώματα από διαχειριστικής πλευράς, πλησιάζοντας ως προς την συμπεριφορά τους τις φυσικές και τεχνητές επιφανειακές λίμνες και ταμιευτήρες.

Αξίζει να αναφερθεί πως παρά τους απλούς νόμους κίνησης του νερού στους υπόγειους υδροφορείς η μελέτη τους γενικά περιλαμβάνει κατ' εξοχή υπολογισμούς υψηλής δυσκολίας. Οι δυσκολίες προκαλούνται από την έντονη γεωγραφική μεταβλητότητα και ανισοτροπία των χαρακτηριστικών των υπόγειων υδροφορέων, από τη δυσχέρεια γνώσης τόσο της γεωμετρίας του εδάφους όσο και των χαρακτηριστικών των υδροφορέων. Ως αναφορά τα παραπάνω, γίνεται έντονα κατανοητό η ανάγκη για κατανόηση και σύνθεση μαθηματικών συναρτήσεων για τη μελέτη της ροής σε ένα υπόγειο υδροφορέα. Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία θα εξετάσει πως συμπεριφέρεται το υπόγειο νερό των υδροφορέων όταν αυτοί είναι υπό συνθήκη σταθερής ομοιόμορφης φόρτισης και θα γίνει μια μη γραμμική προσεγγιστική επίλυση της εξίσωσης του *Boussinesq* με την χρήση προαποφασισμένων συναρτησιακών μορφών.

1.2 Υπόγειοι Υδροφορείς και η σημασία τους

Η σημασία και η αναγκαιότητα του νερού στη ζωή του ανθρώπου είναι γνωστή και αυτονόητη. Το νερό σαν βασικό στοιχείο της φύσης παίζει ένα σημαντικό και καθοριστικό ρόλο στη διατήρηση των ισορροπιών μεταξύ των οικοσυστημάτων. Η παρέμβαση όμως του ανθρώπου καθώς και οι συνεχώς αυξανόμενες ανάγκες του σε νερό τείνουν να δημιουργήσουν ένα πολύ έντονο και σοβαρό πρόβλημα, την έλλειψη νερού.

Οι συνολικές ποσότητες νερού που υπάρχουν στη γη είναι πραγματικά τεράστιες σε σχέση με τις ανάγκες σε νερό. Το μεγαλύτερο μέρος όμως από τις ποσότητες αυτές είναι ακατάλληλο ή απρόσιτο. Εκτιμάται ότι υπάρχουν περίπου $1.4 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ νερού στη γη. Από αυτό το συνολικό όγκο νερού όμως περίπου το 97.3 % είναι αλμυρό που δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ούτε για αρδευτική ούτε για υδρευτική ή βιομηχανική χρήση. Το νερό που υπάρχει επίσης υπό μορφή πάγων (2.1 %) ή υπό μορφή υδρατμών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς αυτούς. Οπότε για χρήση απομένει το υπόλοιπο 0.6 % δηλαδή μια ποσότητα $8.5 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ πόσιμου νερού. Αν σκεφτεί όμως κανείς ότι το 98 % αυτού του νερού είναι υπόγειο νερό, δηλαδή βρίσκεται αποθηκευμένο ή κινείται στο έδαφος, και από αυτό το μισό βρίσκεται σε βάθος μεγαλύτερο από 800 m, όπου η περιεκτικότητα του σε άλατα είναι συχνά πολύ μεγάλη και η ανάκτηση του σχεδόν πάντα υπερβολικά δαπανηρή, εύκολα αντιλαμβάνεται ότι το διαθέσιμο για εκμετάλλευση νερό είναι πραγματικά ένα πολύτιμο αγαθό.

Το νερό σε αντίθεση με άλλα φυσικά αγαθά όπως τα ορυκτά π.χ., που η χρησιμοποίησή τους καταστρέφει και η δημιουργία νέων αποθεμάτων είναι εξαιρετικά αργή, διατηρεί τη μορφή του. Μέσα από τη χρήση του το νερό μπορεί να ρυπαίνεται ή να αλλάζει φάση (στερεά, υγρή ή αέρια) αλλά παραμένει πάντα νερό. Όλη αυτή η ανακύκλωση και επαναδιάθεση του νερού γίνεται μέσα από τη διαδικασία που ονομάζεται υδρολογικός κύκλος.

Θεωρώντας ως βασική πηγή ανακύκλωσης και ανανέωσης του πόσιμου νερού τις ατμοσφαιρικές κατακρημνίσεις πάνω από τη ξηρά, οι οποίες ετησίως φτάνουν τα $46 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$ νερό, υπολογίζεται ότι για να ανανεωθεί ολόκληρη η ποσότητα του πόσιμου νερού που προαναφέρθηκε ($8.5 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$) χρειάζονται κατά μέσο όρο περίπου 200 χρόνια. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι μόνο ένα μέρος των ατμοσφαιρικών κατακρημνίσεων καταλήγει στο υπέδαφος συμπεραίνεται ότι ο μέσος χρόνος ανανέωσης των υπόγειων νερών είναι πάνω από 300 χρόνια (Cech V., 2010).

1.3 Ο ρόλος των υπόγειων υδατικών πόρων στην διαχείριση υδατικών συστημάτων

Ο διαχωρισμός των υδατικών πόρων σε υπόγειους και επιφανειακούς είναι ένας διαχωρισμός τεχνητός και σε ορισμένες περιπτώσεις, τουλάχιστον από άποψη διαχείρισης, αποπροσανατολιστικός αφού υπάρχει μια δυναμική σχέση που τους συνδέει, όταν δηλαδή υπάρχει υδραυλική επικοινωνία μεταξύ τους. Έτσι η μεταβολή στις υδραυλικές συνθήκες, που ορίζουν τη λειτουργία επιφανειακών υδατικών πόρων, έχει άμεσες επιπτώσεις στις συνθήκες λειτουργίας υπόγειων υδατικών πόρων, όταν βέβαια υπάρχει μεταξύ τους υδραυλική επικοινωνία, και αντιστρόφως.

Όσο όμως έντονη φαίνεται η συσχέτιση επιφανειακών και υπόγειων υδατικών πόρων, από άποψη διαχείρισης του διαθέσιμου υδατικού δυναμικού, τόσο έντονες είναι και οι διαφορές στην υδραυλική λειτουργία τους. Το τελευταίο αυτό στοιχείο υποχρεώνει το μελετητή στο διαχωρισμό του τρόπου προσέγγισης και κατανόησης της λειτουργίας των υδατικών αυτών πόρων.

Παρόλο που η παράλληλη χρησιμοποίηση επιφανειακών και υπόγειων υδατικών πόρων φαίνεται προφανής, όπου βέβαια είναι και οι δύο διαθέσιμοι, σε πολλά προγράμματα διαχείρισης παρουσιάζεται μια διστακτικότητα στην εκμετάλλευση των υπόγειων υδατικών πόρων. Σύμφωνα με τους Bear (1979) και Wiener (1972) σαν αιτία για αυτήν την διστακτικότητα είναι οι παρακάτω λόγοι:

- Η εκμετάλλευση υπόγειων υδατικών πόρων είναι δαπανηρή από άποψη ενεργειακής ανάγκης για άντληση, και ειδικά αν η στάθμη του νερού είναι σε μεγάλο εστιακό βάθος.
- Ο σχεδιασμός της εκμετάλλευσης υπόγειων υδατικών πόρων απαιτεί συλλογή δεδομένων για μεγάλο χρονικό διάστημα, κάτι που συνήθως δεν είναι πάντα εφικτό.
- Ο σχεδιασμός και η εκτίμηση υπόγειων υδατικών πόρων απαιτεί εξειδικευμένο επιστημονικό προσωπικό που δεν είναι πάντα διαθέσιμο
- Είναι εξαιρετικά δύσκολο να προβλέψει κανείς την απόκριση ενός υπόγειου υδροφορέα σε προτεινόμενα σενάρια διαχείρισης.

Αντιθέτως, μπορεί το κόστος άντλησης από ένα υδροφορέα να είναι μεγάλο, αλλά είναι αμελητέο μπροστά στο αρχικό κεφάλαιο που απαιτείται για την εκμετάλλευση επιφανειακών πόρων όπως είναι οι υδραυλικές κατασκευές, αγωγοί μεταφοράς, φράγματα κ.λπ.

Λόγω της μεγάλης αποθηκευτικής ικανότητας αλλά και των πολύ μικρών ταχυτήτων ροής που υφίστανται, οι αντιδράσεις των υδροφορέων αντικατοπτρίζουν μακροχρόνια υδρολογικά φαινόμενα αφού οι μεταβολές τους είναι μικρές, σε αντίθεση με τους επιφανειακούς υδατικούς πόρους όπου οι αντιδράσεις είναι άμεσες. Αυτό σημαίνει ότι βραχυχρόνια δείγματα δεδομένων είναι δυνατό να δώσουν μια ικανοποιητική προσέγγιση της λειτουργίας ενός υδροφορέα, ενώ για τη λειτουργία επιφανειακών υδατικών πόρων απαιτούνται μακροχρόνια δείγματα δεδομένων για να αντιληφθεί κανείς την άμεση μεταβλητότητα τους σε σχέση με τα εκάστοτε αίτια που την προκαλούν.

Η αναγνώριση της ανάγκης εκμετάλλευσης υπόγειων υδατικών πόρων οδήγησε στην καλύτερη εκπαίδευση και εξειδίκευση επιστημόνων στο συγκεκριμένο αντικείμενο με αποτέλεσμα περισσότεροι μηχανικοί και υδρογεωλόγοι να μπορούν να επιλύσουν προβλήματα λειτουργίας υπόγειων υδροφορέων. Με τα κατάλληλα δεδομένα, την αναγκαία εμπειρία και τα απαραίτητα μαθηματικά μοντέλα Η/Υ είναι δυνατή σήμερα η πρόβλεψη της απόκρισης υπόγειων υδροφορέων σε διάφορες θεωρητικές καταστάσεις και σενάρια διαχείρισης.

1.4 Περιβαλλοντικές επιπτώσεις από την διαχείριση υδάτινων πόρων

Η ανθρώπινη επέμβαση σε ένα τόσο ευαίσθητο περιβαλλοντικό παράγοντα, όπως είναι οι υδατικοί πόροι είναι ένα γεγονός που πρέπει να αντιμετωπίζεται με σοβαρότητα και υπευθυνότητα. Η ορθολογική διαχείριση των υδατικών πόρων είναι μια μεθοδολογία που ορίζει το τελευταίο μέσο που έχει εναπομένει στον άνθρωπο για τη διατήρηση και τη βέλτιστη εκμετάλλευση τους. Ο χαρακτηρισμός "ορθολογική" διαχείριση βασίζεται σε κάποια κοινώς αποδεκτά, αλλά δυστυχώς σπάνια εφαρμοζόμενα στοιχεία που οριοθετούν την ανάγκη

διατήρησης της φυσικής ισορροπίας που πρέπει να χαρακτηρίζει τους υδατικούς πόρους. Τα στοιχεία αυτά αφορούν στον ενεργητικό ή και παθητικό ρόλο των υδατικών πόρων στα πλαίσια του πολυδιάστατου χώρου στον οποίο συμμετέχουν, και ο οποίος χαρακτηρίζεται από την πολύμορφη αλλά και πολλές φορές αντιφατική του φύση.

Το γεγονός ότι ο πολυδιάστατος αυτός χώρος είναι ένας χώρος ενιαίος, από άποψη υδατικού ισοζυγίου, που σημαίνει ότι οι λειτουργίες των υδατικών πόρων ανακυκλώνονται μέσα στα όρια του χώρου αυτού, καθιστά επιβεβλημένη την ανάγκη, μέσα στα πλαίσια της ορθολογικής διαχείρισης, να λαμβάνονται υπ' όψη όσο το δυνατό περισσότερα, και κατά περίπτωση σημαντικότερα, χαρακτηριστικά στοιχεία του χώρου αυτού. Αυτό βέβαια προϋποθέτει γνώση του χώρου που μπορεί να προέλθει μόνο από κατά πλάτος αλλά και κατά βάθος μελέτη και διερεύνηση των στοιχείων που τον ορίζουν.

Τα όρια του χώρου λειτουργίας και συμμετοχής των υδατικών πόρων βρίσκονται παράλληλα με τα όρια του υδρολογικού κύκλου, είναι όμως τόσο εκτεταμένα που καλύπτουν όλες σχεδόν τις περιβαλλοντικές λειτουργίες. Είναι πλέον αυτονόητο το γεγονός ότι σχεδόν όλες οι ανθρώπινες δραστηριότητες έχουν κάποιες άμεσες ή έμμεσες περιβαλλοντικές επιπτώσεις. Η έλλειψη περιβαλλοντικής συνείδησης είχε μέχρι σήμερα τραγικά για το περιβάλλον αποτελέσματα. Ακολουθώντας την πορεία του υδρολογικού κύκλου, τίθεται το πρόβλημα των περιβαλλοντικών επιπτώσεων των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Ξεκινώντας από τις βροχοπτώσεις, κανείς δεν μπορεί να παραβλέψει το γεγονός της υποβάθμισης της ποιότητας του νερού λόγω της ρύπανσης του περιβάλλοντος και της εμφάνισης φαινομένων όπως αυτό της όξινης βροχής. Ταυτόχρονα όμως η ανάπτυξη του φαινομένου του θερμοκηπίου σε συνδυασμό με τη συνεχιζόμενη καταστροφή των μεγάλων δασών έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των συνολικών βροχοπτώσεων και τη μεταβολή της χωρικής κατανομής τους. Επίσης η ερημοποίηση μεγάλων περιοχών του πλανήτη είναι ένα φαινόμενο άμεσα συνδεδεμένο με τα παραπάνω. Οι περισσότερες βέβαια, ανθρώπινες παρεμβάσεις γίνονται κατά τη φάση της επιφανειακής απορροής του νερού.

Μεγάλα έργα, όπως φράγματα, εκτροπές ποταμών και άλλα, μπορούν να αλλάξουν ριζικά τις περιβαλλοντικές συνθήκες και μάλιστα όχι μόνο στο στενό εύρος που ορίζεται από το χώρο που περιβάλλει το έργο. Στα φράγματα, παραδείγματος χάριν, η απαγόρευση της διαφυγής νερού προς τη θάλασσα έχει σοβαρές περιβαλλοντικές επιπτώσεις, τόσο στη χλωρίδα και πανίδα των παραποτάμιων περιοχών κατάντη του φράγματος, όσο και στην προστασία και τον εμπλουτισμό των υδροφορέων. Η αποκοπή της ροής των ποταμών έχει ως αποτέλεσμα, οι

φερτές ύλες, που αποτελούν μια σημαντική πηγή τροφοδοσίας της παράκτιας ζώνης, να μην έχουν τη θάλασσα ως τελικό φυσικό αποδέκτη και να παρουσιάζονται έντονα φαινόμενα διάβρωσης.

Όσον αφορά στους υπόγειους υδροφορείς, θέμα που ενδιαφέρει περισσότερο στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, οι ανθρώπινες παρεμβάσεις έχουν πολύ σοβαρά αποτελέσματα. Η αλόγιστη εκμετάλλευση των υδροφορέων εγκυμονεί πάρα πολλούς κινδύνους. Η υπεράντληση πέρα από τα όρια της φυσικής ανανέωσης, οδηγεί σε σταδιακή μείωση των υδατικών αποθεμάτων με κίνδυνο την οικονομικά απαγορευτική εκμετάλλευση τους, λόγω μεγάλης πτώσης της στάθμης, ή ακόμα και την πλήρη εξάντληση τους μέχρι και την καταστροφή τους. Αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν και από τη ρύπανση των υδροφορέων. Δυνητικοί παράγοντες ρύπανσης μπορεί να είναι πάρα πολλοί και να προέρχονται ή από το αστικό, αγροτικό, είτε από το βιομηχανικό περιβάλλον. Το πρόβλημα της ρύπανσης αυξάνεται από το γεγονός ότι οι υδροφορείς χαρακτηρίζονται από μικρές ταχύτητες ροής, με αποτέλεσμα ο τελικός χρόνος απορρύπανσης τους είναι εξαιρετικά τεράστιος. Άλλωστε η πλήρως λανθασμένη αντίληψη που δυστυχώς είναι αρκετά διαδεδομένη, και με βάση την οποία η σημασία αλλά και η δυνατότητα συμμετοχής των υπόγειων υδατικών πόρων στην κάλυψη των υδατικών αναγκών, υποτιμάται, εκθέτει τους υδροφορείς σε μεγαλύτερους κινδύνους αλόγιστης εκμετάλλευσης και ρύπανσης.

Η αυξανόμενη έλλειψη υδατικών πόρων έχει φέρει στο προσκήνιο μια μεγάλη σύγκρουση που αφορά στους δύο ρόλους του νερού: (α) ως εμπορεύσιμο αγαθό που υπηρετεί τους οικονομικούς στόχους της μεγαλύτερης αγροτικής παραγωγικότητας και (β) ως κρίσιμος παράγοντας ζωής για όλα τα είδη και τις φυσικές κοινότητες. Περισσότερο νερό για τις ανθρώπινες ανάγκες σημαίνει λιγότερο νερό για τη συντήρηση των οικοσυστημάτων και σε πολλές περιοχές, η φύση υποβαθμίζεται αισθητά. Για τους λόγους αυτούς η ανάγκη ανάπτυξης ορθολογιστικής αντίληψης στην διαχείριση των υδατικών πόρων, που να περιλαμβάνει τόσο τους άμεσους ανθρώπινους στόχους όσο και την προστασία και το σεβασμό του περιβάλλοντος, καθίσταται όλο και πιο επιτακτική.

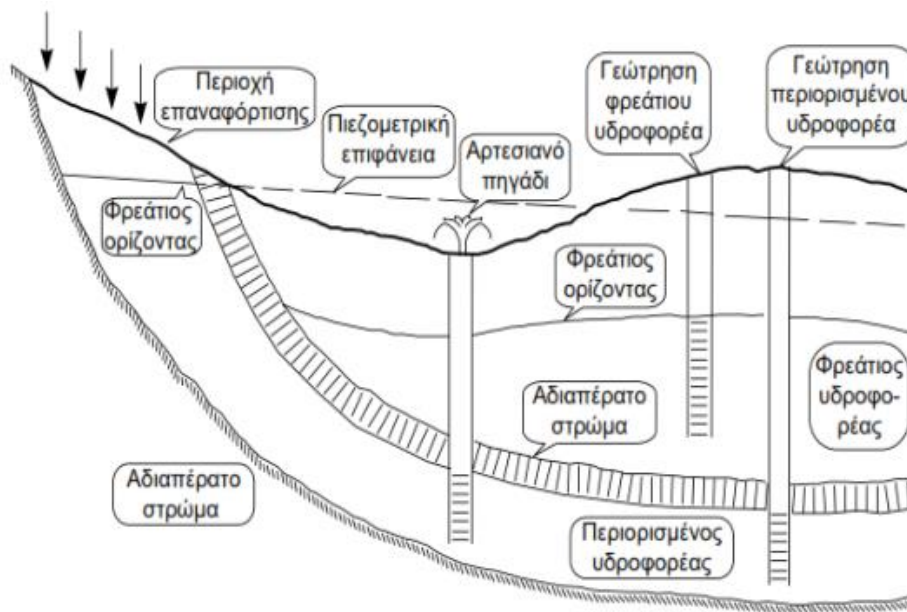
1.5 Περιγραφή και ταξινόμηση υπόγειων υδροφορέων

Τα υπόγεια νερά αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του υδρολογικού κύκλου και βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια της γης όπου μπορούν να συλλεχθούν μέσω φρεάτων, σπηράγγων ή αποστραγγιστικών αγωγών ή δύναται να ρέουν φυσικά προς την επιφάνεια μέσω πηγών (Nanou-Giannarou, 2006). Ο υπόγειος υδροφορέας ή απλώς υδροφορέας ορίζεται μια γεωλογική μονάδα η οποία μπορεί να αποθηκεύσει μια αξιόλογη ποσότητα νερού και να μεταφέρει με ρυθμό υδρολογικά σημαντικό (Dingman, 1994). Οι υπόγειοι υδροφορείς περιέχουν αρκετό κορεσμένο με νερό υλικό, ώστε να τροφοδοτήσουν με σημαντικές ποσότητες νερού γεωτρήσεις ή επιφανειακές πηγές. Οι υδροφορείς έχουν αυξημένη ικανότητα να αποθηκεύουν και να διανέμουν ή μεταφέρουν το νερό.

Οι γεωλογικοί αυτοί σχηματισμοί ταξινομούνται ανάλογα με την δυνατότητα που παρέχουν στο νερό να διεισδύσει και να κινηθεί μέσα στη μάζα τους με την επίδραση της βαρύτητας σε δύο μεγάλες κατηγορίες τους υδροπερατούς και τους αδιαπέρατους σχηματισμούς. Υδροπερατοί σχηματισμοί είναι οι σχηματισμοί που επιτρέπουν στην κυκλοφορία και διείσδυση του νερού διαμέσου της μάζας του ενώ οι αδιαπέρατοι σχηματισμοί είναι αυτοί που δεν επιτρέπουν γενικά την κίνηση του νερού διαμέσου της μάζας του υπό την επίδραση της βαρύτητας ή της υδροστατικής πίεσης. Η κατηγοριοποίηση ενός υδροφορέα σε υδροπερατό ή αδιαπέρατο καθορίζεται από την υδρογεωλογική συμπεριφορά του και συγκεκριμένα από το πορώδες. Γενικά το πορώδες όπως θα αναλυθεί και εκτενέστερα ορίζεται ως ένα μέτρο των διάκενων όπως οι πόροι, οι ρωγμές και τα κενά που υπάρχουν σε ένα πέτρωμα ή έδαφος και εκφράζεται με το λόγο του συνολικού όγκου των διάκενων προς τον συνολικό όγκο του εδάφους ή του πετρώματος. Οι υπόγειοι υδροφορείς ταξινομούνται βάσει τη φύση του άνω ορίου τους σε δύο κύριες κατηγορίες οι **ελεύθεροι υπόγειοι υδροφορείς** και οι **υπό πίεση υδροφορείς** ή περιορισμένοι ή αλλιώς εγκλωβισμένοι. Ελεύθεροι υπόγειοι υδροφορείς καλούνται οι υδροφορείς που έχουν ως δάπεδο στεγανό στρώμα έδαφος και στην οροφή τους δεν παρεμβάλλεται κάποιο αδιαπέρατο γεωλογικό στρώμα, έχουν δηλαδή στο άνω όριο τους τον φρεάτιο ορίζοντα. Το άνω όριο αυτό είναι μεταβλητό στον χρόνο και η τροφοδοσία των ελεύθερων αυτών υπόγειων υδροφορέων γίνεται από το νερό που διηθείται άμεσα από το υπερκείμενο έδαφος ή από γειτνιαζούσα επιφανειακά υδάτινα σώματα, με κίνηση κατακόρυφη υπό την επίδραση της βαρύτητας. Υπό πίεση υπόγειοι υδροφορείς ή περιορισμένοι ορίζονται οι υδροφορείς οι οποίοι στα στρώματα τους το νερό υφίσταται εγκλωβισμένο ανάμεσα στα αδιαπέρατα στρώματα του δαπέδου και της οροφής. Τα όρια των υπό πίεση υπόγειων υδροφορέων είναι σταθερά στο χρόνο και η τροφοδοσία τους με νερό γίνεται συνήθως από μια

περιοχή τους που έρχεται σε επαφή με το έδαφος χωρίς να μεσολαβεί κάποιο αδιαπέρατο στρώμα ή έδαφος. Οι υδροφορείς αυτοί είναι κορεσμένοι σε όλο το πάχος τους και η πίεση του νερού είναι μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής πίεσης.

Ένας υδροφορέας μπορεί να εμφανίζει χαρακτηριστικά και των δύο κατηγοριών κατά περιοχές του. Μπορεί τα όρια της κάθε κατηγορίας υδροφορέων να μην είναι αδιαπέρατα είτε επειδή το γεωλογικό στρώμα που έρχεται σε επαφή έχει μηδενική διαπερατότητα, είτε λόγω τοπικών διαρροών σε ρήγματα κ.α. οπότε παρουσιάζονται υδροφορείς ελεύθεροι με διαρροή και περιορισμένοι ή υπό πίεση υδροφορείς με διαρροή. Αρκετές περιπτώσεις έχουμε όπου η διάταξη των πετρωμάτων μπορεί να οδηγήσει δημιουργία φρεάτιων οριζόντων μικρού μεγέθους τοπικού χαρακτήρα, που βρίσκονται πάνω από το γενικό φρεάτιο ορίζοντα της περιοχής, σε αυτές τις περιπτώσεις εμφανίζονται οι επικρεμάμενοι υδροφορείς. Στην παρούσα πτυχιακή εργασία ασχοληθήκαμε με φρεάτιο υπόγειο υδροφορέα ο οποίος σχηματικά φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.1:



Σχήμα 2.1 Σχηματική παράσταση περιορισμένου και φρεάτιου υπόγειου υδροφορέα
(Koutsogiannis και Xanthopoulos, 1999)

1.6 Ιστορική αναδρομή στην υδραυλική περιγραφή υπόγειων υδάτων

Συγκεκριμένα, όπως προαναφέρθηκε, η ανατροφοδότηση των υπόγειων υδροφορέων πραγματοποιείται μέσω της διείσδυσης του νερού όπως με συλλογή στραγγισμάτων σε χώρους υγειονομικής ταφής ή τροφοδοσία από την κατείσδυση του επιφανειακού νερού που διηθείται στο έδαφος. Στην περίπτωση της ανατροφοδότησης, η διείσδυση του νερού κινείται

κατακόρυφα ως ακόρεστη ροή έως ότου να συναντήσει τα κορεσμένα υπόγεια ύδατα, όπου η ροή του νερού είναι σχεδόν παράλληλη ως προς τη βάση του υδροφόρου ορίζοντα. Σε κάθε περίπτωση η πραγματική περιγραφή των συνθηκών επαναφόρτισης του υδροφορέα είναι πολύπλοκη, ωστόσο το πρόβλημα συνήθως απλοποιείται κατά τη μοντελοποίηση του στην κλίμακα του χωροχρόνου αγνοώντας την ακόρεστη ροή καθώς επίσης και θεωρώντας γνωστό το ρυθμό επαναφόρτισης του ενώ επιπλέον η κατανομή της πίεσης θεωρείται υδροστατική.

Εστιάζοντας στην ευρύτερη θεωρία του θέματος, στην πράξη χρησιμοποιείται η ευρέως διαδεδομένη προσέγγιση των *Dupuit-Forchheimer*, όπως εφαρμόστηκε το 1877 από τον *Boussinesq* και όπως επεκτάθηκε για κεκλιμένους υδροφορείς στη δεκαετία του 1960 από τους *Henderson* και *Wooding* (1964). Οι μνημειώδεις αυτές εργασίες αποτελούν σταθμό στην υδραυλική περιγραφή της ροής σε υπόγειους υδροφορείς και στην ουσία είναι η βασική θεωρητική πηγή στη φυσική προσέγγιση και μοντελοποίηση του προβλήματος μέχρι και σήμερα. Γενικότερα η υπόθεση της μη αποκλίνουσας οριζόντιας ροής ισχύει όταν το πάχος του υδροφορέα είναι σημαντικό μικρότερο, συγκρινόμενο με τις οριζόντιες διαστάσεις αυτού. Η υπόθεση αυτή, εφαρμόζεται κυρίως στους φρεάτιους υδροφορείς και είναι γνωστή ως υδραυλική θεωρία *Dupuit-Forchheimer* για τη ροή υπόγειων υδάτων. Σύμφωνα με τη παραδοχή αυτή, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις ως προς το βάθος καταργείται η εξάρτηση από την κάθετη συντεταγμένη. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι σε καλή προσέγγιση το υδραυλικό ύψος καθ ύψος μιας ορθής διατομής είναι σταθερό και ίσο προς το ύψος της φρεατικής επιφάνειας. Το γεγονός αυτό απλοποιεί σημαντικά τη μαθηματική ανάλυση της ροής και πρακτικά ισοδυναμεί με την θεώρηση κατακόρυφων ισοδυναμικών γραμμών και πιεζομετρικού φορτίου ανεξάρτητου από την κατακόρυφη συνιστώσα της κίνησης. Συμπερασματικά, γίνεται η παραδοχή ότι η ροή είναι βασικά οριζόντια (παράλληλη στη βάση του υδροφορέα) και αγνοούνται οι κατακόρυφες συνιστώσες της ταχύτητας οι οποίες συνδέονται με ακόρεστη ροή. Η μη γραμμικότητα όμως της συγκεκριμένης εξίσωσης του *Boussinesq* αποτελεί τον κύριο ανασταλτικό παράγοντα για τη μη δυνατή αναλυτική λύση της εξέλιξης του προφίλ του βάθους νερού, το οποίο ρέει σε ένα υπόγειο υδροφορέα (*Varvaris et al*, 2013).

Στην περίπτωση έντονα κεκλιμένου υδροφορέα η μη γραμμικότητα μπορεί να παραλειφθεί οπότε προκύπτουν ξεκάθαρες γραμμικές σχέσεις για την εξέλιξη του προφίλ (*kinematic wave approximation*) όπως αναφέρεται στους *Beven* (1983) και *Henderson* και *Wooding* (1964). Η μη γραμμικότητα όμως παραμένει στην εν γένει πολύ απλούστερη περίπτωση ενός οριζόντιου υδροφορέα και σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχουν στη βιβλιογραφία ικανοποιητικές προσεγγιστικές λύσεις για την περιγραφή και κατανόηση του προβλήματος της εξέλιξης του

προφίλ του νερού σε περιπτώσεις γεμίσματος ή αδειάσματος. Στην εργασία αυτή επιχειρείται μία μερική αναπλήρωση αυτού του βιβλιογραφικού «κενού» κατασκευάζοντας νέες προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* για την περίπτωση του περιορισμένου οριζόντιου υδροφόρου ορίζοντα για τη φάση της συσσώρευσης νερού κατά τη διάρκεια ομοιόμορφης φόρτισης. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε μερικές απλοποιημένες γραμμικοποιήσεις της εξίσωσης του *Boussinesq* για τον οριζόντιο υδροφορέα, οι οποίες οδηγούν σε επιλύσιμες μορφές και στη συνέχεια θα αναπτύξουμε σε λεπτομέρεια μία καινούργια προσέγγιση η οποία διατηρεί τη μη γραμμικότητα σε μεγάλο βαθμό. Η νέα μέθοδος βασίζεται σε μια εξειδικευμένη εικασία «*ansatz*» του προφίλ του νερού στον υδροφορέα για κάθε φάση του, που αφήνει ορισμένες λειτουργίες του χρόνου ως βαθμούς ελευθερίας για να καθοριστεί έτσι δυναμικά. Οι τελευταίοι, στη συνέχεια, με την επιβολή σταθερών ότι αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση θα πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση *Boussinesq* στα ακραία σημεία του υδροφορέα. Οι προκύπτουσες συνθήκες μπορούν να λυθούν με ακρίβεια έτσι που να οδηγεί σε προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες είναι σαφείς και απλές. Οι λύσεις των δύο φάσεων σε σύγκριση με τις αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* δείχνουν μάλλον πως συμφωνούν εντυπωσιακά.

1.7 Δομή εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο της γίνεται εισαγωγή στην μελέτη υπόγειων υδάτινων πόρων όπου παρουσιάζονται κάποια γενικά στοιχεία σχετικά για τους υπόγειους υδροφορείς καθώς και για την σημασία και τον ρόλο που διαδραματίζουν στην διαχείριση των υδατικών συστημάτων. Στην συνέχεια γίνεται περιγραφή και ταξινόμηση των υδροφορέων καθώς επίσης και μια σύντομη ιστορική αναδρομή στην υδραυλική περιγραφή τους. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη μαθηματική προσέγγιση των υπόγειων υδροφορέων στο οποίο αναλύονται οι διάφοροι παράμετροι καθώς και εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του νερού σε ένα υδροφορέα όπως εξίσωση *Boussinesq*, νόμος του *Darcy*, και η εξίσωση της συνέχειας. Στο τρίτο και πιο σημαντικό κεφάλαιο της παρούσας διατριβής γίνεται η σύγκριση των γραμμικών λύσεων του Charman (1995) και της γραμμικής λύσης με προφίλ σταθερού σχήματος με την αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης. Στην συνέχεια του κεφαλαίου γίνεται προσπάθεια μιας πρωτότυπης μη γραμμικής προσέγγισης με την θεώρηση ενός ??????. Τέλος παρουσιάζονται τα τελικά συμπεράσματα της σύγκρισης των όλων των εξαγόμενων εξισώσεων που παρουσιάζονται στο τρίτο κεφάλαιο με την πρωτότυπη μη γραμμική προσέγγιση.

2. Μαθηματική προσέγγιση υπόγειων υδροφορέων

Στην ενότητα αυτή αναλύεται εκτενώς το μαθηματικό μοντέλο, εξετάζοντας τις αρχικές οριακές συνθήκες και τις μαθηματικές εξισώσεις που συνθέτουν το πρόβλημα των υπόγειων νερών στους υπόγειους υδροφορείς.

2.1 Παράμετροι Υπόγειου Υδροφορέα – Εξίσωση *Boussinesq*

Εστιάζοντας στο πρόβλημα της ροής σε υπόγειο και θεωρητικά οριζόντιο υδροφορέα, αρχικά γίνεται επεξήγηση όλων των παραμέτρων που χαρακτηρίζουν ολόκληρο το υδρολογικό σύστημα του. Επιπρόσθετα γίνεται ανάλυση των παραγόντων που συμμετέχουν στην ανατροφοδότηση αυτού και πώς αυτοί οι παράγοντες επηρεάζουν τη συμπεριφορά ροής στον υπόγειο υδροφορέα. Ειδικότερα, η μόνιμη κίνηση του νερού στα ελεύθερα υδροφόρα στρώματα περιγράφεται από την εξίσωση του *Boussinesq* (1904), μία μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση. Σύμφωνα από τον *Vasilakopoulos* (2010) μία γενική μορφή της εξίσωσης που περιγράφει τη ροή σε ένα ελεύθερο υδροφόρο στρώμα σε δύο διαστάσεις και τηρώντας την θεμελιώδη αρχή διατήρησης της μάζας είναι:

$$\frac{\partial}{\partial x} (h K_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (h K_z \frac{\partial h}{\partial z}) = n \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.1)$$

Πιο κάτω περιγράφονται αναλυτικά οι παράμετροι που εμφανίζονται στην πιο πάνω εξίσωση και περαιτέρω παράμετροι οι οποίοι συμβάλουν σε ένα υπόγειο υδροφορέα που θα συναντήσουμε στα επόμενα κεφάλαια:

Πιεζομετρικό φορτίο ή αλλιώς πιεζομετρικό ύψος (*h*): Το πιεζομετρικό ύψος θεωρείται η ενέργεια που ισούται με το άθροισμα του φορτίου πίεσης P/γ και του φορτίου ύψους (ή θέσης) της απόστασης δηλαδή από το επίπεδο αναφοράς z . Συγκεκριμένα $h = (P/\gamma) + z$, όπου P είναι η υδροστατική πίεση και γ το ειδικό βάρος του νερού που είναι ίσο με το γινόμενο της πυκνότητά του και της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Επιπρόσθετα μετρείται κάθετα από την επιφάνεια του αδιαπέρατου στρώματος του υπεδάφους του υδροφόρου ορίζοντα με φορά προς τα πάνω και έχει διαστάσεις L σε μέτρα. Το φορτίο h αναφέρεται και ως πιεζομετρικό φορτίο ή πιεζομετρικό δυναμικό και ταυτίζεται με το απόλυτο υψόμετρο της στάθμης του υπόγειου νερού σε μια γεώτρηση ανορυγμένη σε ελεύθερο υδροφορέα. Στους υπό πίεση υδροφορείς το φορτίο είναι το απόλυτο υψόμετρο που θα έφτανε το νερό, αν ο σωλήνας της γεώτρησης επεκτεινόταν πάνω από την επιφάνεια του εδάφους. Έτσι η κίνηση του υπόγειου νερού σε ένα πορώδες μέσο οφείλεται στην υδροστατική πίεση και στη θέση του ως προς το επίπεδο

αναφοράς. Η μεταβολή του υδραυλικού φορτίου ανά μονάδα μήκους κατά τη διεύθυνση της υπόγειας ροής ονομάζεται υδραυλική κλίση και δίνεται από τη σχέση: $i=dH/dL$. Το υδραυλικό φορτίο H σε ένα σημείο του πορώδους μέσου πολλαπλασιασμένο με την επιτάχυνση της βαρύτητας g , δίνει το δυναμικό ροής Φ στο σημείο αυτό $\Phi = H g$. Με άλλα λόγια το Φ είναι η ενέργεια ανά μονάδα μάζας και το H η ενέργεια ανά μονάδα βάρους. Το υδραυλικό φορτίο δεν μένει σταθερό, αλλά μειώνεται κατά την κίνηση του υπόγειου νερού, λόγω απωλειών όπως οι τριβές.

Διαπερατότητα (T) και Υδροπερατότητα (k): Η διαπερατότητα είναι μια σταθερά εξαρτώμενη μόνο από τα χαρακτηριστικά του πορώδους μέσου δηλαδή το σχήμα, το μέγεθος και τη διάταξη των κόκκων του στρώματος με διαστάσεις L^2 . Η υδροπερατότητα ή υδραυλική αγωγιμότητα (k) χρησιμοποιείται στην Υδρογεωλογία γιατί το ρευστό είναι το νερό. Συγκεκριμένα ένα μέσο έχει υδραυλική αγωγιμότητα ίση με τη μονάδα, όταν μεταβιβάζει στη μονάδα του χρόνου κάθετα στη διεύθυνση της υπόγειας ροής, τη μονάδα του όγκου νερού από μοναδιαία διατομή με υδραυλική κλίση ίση με τη μονάδα και την επικράτηση του κινηματικού ιξώδους. Το κινηματικό ιξώδες σχετίζεται με την εσωτερική τριβή και την αντίσταση δηλαδή του υγρού στη υπόγεια ροή. Η υδραυλική αγωγιμότητα έχει διαστάσεις ταχύτητας LT^{-1} .

Γενικά οι γεωλογικοί σχηματισμοί χαρακτηρίζονται ως (Πίν. 2.1):

- Πολύ υδροπερατοί όταν $k \geq 10^{-1}$ m/s
- Υδροπερατοί όταν $10^{-6} < k < 10^{-1}$ m/s
- Λίγο Υδροπερατοί όταν $10^{-9} < k < 10^{-6}$ m/s
- Πρακτικά στεγανοί όταν $k \leq 10^{-9}$ m/s

Υλικό	Υδραυλική αγωγιμότητα k (m/s)
Άργιλος	$2,3 \cdot 10^{-9}$
Ίλος	$9,2 \cdot 10^{-7}$
Λεπτόκοκκη Άμμος	$2,9 \cdot 10^{-5}$
Μεσόκοκκη Άμμος	$1,4 \cdot 10^{-4}$
Χονδρόκοκκη Άμμος	$5,2 \cdot 10^{-4}$
Χαλίκια μικρού μεγέθους	$5,2 \cdot 10^{-3}$
Χαλίκια μεσαίου μεγέθους	$3,1 \cdot 10^{-3}$
Μεγάλα χαλίκια	$1,7 \cdot 10^{-3}$

Πίνακας 2.1 Τιμές της υδραυλικής αγωγιμότητας (Kallergis et al., 1999)

Η διαπερατότητα (K_s) συνδέεται με την υδραυλική αγωγιμότητα (k) με τη σχέση: $K_s = k\mu/\gamma$ όπου μ είναι το δυναμικό ιξώδες (μονάδες $ML^{-1}T^{-1}$), γ είναι το ειδικό βάρος του ρευστού (N/m^3). Η υδραυλική αγωγιμότητα υπολογίζεται από πειραματικές μετρήσεις επιτόπου, δοκιμαστικές αντλήσεις, την κοκκομετρία με τη βοήθεια εμπειρικών τύπων, με εργαστηριακές μεθόδους και με ιχνηθετήσεις. Η ακόρεστη υδραυλική αγωγιμότητα, ως μέτρο κίνησης του νερού σε ακόρεστο μέσο, είναι μικρότερη από την τιμή της υδραυλικής αγωγιμότητας σε κορεσμένο μέσο. Με βάση την περιεκτικότητα του νερού, η υδραυλική αγωγιμότητα ενός ακόρεστου μέσου (k_{unsat}) σε σχέση με την κορεσμένη τιμή (k) δίνεται από τη σχέση: $k_{unsat} = k [(S_s - S_o) / (1 - S_o)]^3$ Όπου: S_s είναι ο βαθμός κορεσμού και S_o είναι ο υπολλειματικός κορεσμός που αντιπροσωπεύει το νερό των πόρων που είναι ακίνητο και δεσμεύεται από τις τριχοειδείς δράσεις.

Απορροή (q): Δύναται ο όγκος ρέοντος στο υδροφόρο στρώμα νερού ανά μονάδα χρόνου, ο οποίος λαμβάνεται θετικός στην περίπτωση επαναφόρτισης και αρνητικός στην περίπτωση εκφόρτισης και έχει διαστάσεις ταχύτητας L^2T^{-1} . Στην περίπτωση μελέτης του συγκεκριμένου μεγέθους στο σημείο εξόδου του υδροφορέα αναφερόμαστε στη συνολική απορροή ανά μονάδα χρόνου.

Ρυθμός επαναφόρτισης (r): Είναι ο ρυθμός φόρτισης των νερών του υπόγειου υδροφορέα λόγω κατείσδυσης και έχει διαστάσεις ταχύτητας LT^{-1} .

Μήκος (L): Είναι το μήκος του υδροφόρου ορίζοντα και έχει διαστάσεις L .

Μεταβιβαστικότητα (T): Είναι το γινόμενο της υδραυλικής αγωγιμότητας (k) επί το πάχος του υδροφόρου στρώματος (D): $T = kD$. Η μεταβιβαστικότητα εκφράζει τον όγκο νερού που περνά από μια μοναδιαία διατομή του υδροφόρου στρώματος με υδραυλική κλίση ίση με τη μονάδα και την επικράτηση του κινηματικού ιξώδους.

Αποθηκευτικότητα (S): Ο συντελεστής αποθηκευτικότητας ή υδροχωρητικότητας (S) είναι ο όγκος νερού που δύναται να ληφθεί ή να αποθηκευτεί από ένα κατακόρυφο πρίσμα ενός υδροφόρου στρώματος με μοναδιαία επιφάνεια ανά μονάδα μεταβολής του φορτίου. Η αποθηκευτικότητα ορίζεται από τη σχέση: $S = dV/(Adh)$. Όπου dV είναι ο όγκος νερού που απελευθερώνεται ή προστίθεται από τη μονάδα οριζόντιας επιφάνειας A , εξαιτίας μοναδιαίας μείωσης ή αύξησης του φορτίου dh . Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι ο ρυθμός ταπείνωσης

της στάθμης ($dh/\Delta t$) σε έναν υπόγειο υδροφορέα επιφάνειας A και συντελεστή αποθηκευτικότητας S , για άντληση με παροχή q , χωρίς να συμβαίνει εμπλουτισμός, δίνεται από τη σχέση: $dh/\Delta t = q/(SA)$. Στους ελεύθερους υπόγειους υδροφορείς ο συντελεστής αποθηκευτικότητας είναι καθαρός αριθμός και παίρνει τιμές που κυμαίνονται από 1% - 30%, ενώ στους υπό πίεση υδροφορείς κυμαίνεται από 0,0001% - 0,5%. Η μεγάλη διαφορά αυτή οφείλεται στον διαφορετικό μηχανισμό απελευθέρωσης νερού από τα δύο είδη υδροφορέων. Στους υπό πίεση υδροφορείς η αφαίρεση ή η προσθήκη νερού οφείλεται σε διόγκωση του νερού και συμπίεση του υδροφορέα και επομένως η αποθηκευτικότητα είναι συνάρτηση της ελαστικότητας του υδροφορέα και της συμπιεστότητας του περιεχομένου σ' αυτόν υπόγειου νερού. Πρακτικά συνεπάγεται ότι για να εξάγουμε αξιόλογες ποσότητες από τα υπό πίεση υδροφόρα στρώματα απαιτούνται μεγάλες μειώσεις της πιεζομετρικής στάθμης και σε μεγάλη έκταση υπόγειο υδροφορέα. Ο συντελεστής αποθηκευτικότητας S στους ελεύθερους υδροφορείς συμπίπτει με το ενεργό πορώδες, ενώ στους υπό πίεση υπόγειους υδροφορείς ισχύει: $S = \gamma D (\alpha + \beta S_y)$ όπου γ το ειδικό βάρος του νερού, D το πάχος του υδροφορέα, S_y το ενεργό πορώδες, α ο συντελεστής συμπιεστότητας του υδροφορέα και β ο συντελεστής συμπιεστότητας του νερού.

Κλίση (ϕ): είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του επιπέδου του υδροφόρου ορίζοντα και του οριζώντιου επιπέδου.

Πορώδες (n): Το πορώδες (n) ή ολικό πορώδες είναι ένα μέτρο των διακένων δηλαδή των πόρων, των κενών και των ρωγμών που υπάρχουν σε ένα πέτρωμα ή έδαφος και εκφράζεται με το λόγο του συνολικού όγκου των διακένων (V_k) προς τον συνολικό όγκο του πετρώματος ή εδάφους ($V_{ολ.}$) έτσι η σχέση είναι: $n = V_k/V_{ολ.}$ Μερικοί εδαφικοί και γενικότερα γεωλογικοί σχηματισμοί επιτρέπουν τη διείσδυση και κυκλοφορία του νερού δια μέσω αυτών. Από την υδραυλική σκοπιά εντάσσονται στη γενική κατηγορία του πορώδους μέσου. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν ιζηματογενή, μη πλήρως στερεοποιημένα εδάφη, ή και στερεοποιημένα πετρώματα που έχουν όμως πρώτα αποκτήσει ρωγμές, είτε από χημική διάβρωση όπως οι ασβεστόλιθοι είτε από ρηγμάτωση όπως είναι τα εκρηξιγενή και μεταμορφωσιγενή εδάφη. Τα πορώδη αυτά μέσα χαρακτηρίζονται από τις στατικές και τις δυναμικές υδραυλικές ιδιότητες τους. Χαρακτηρίζοντας τα ως δεξαμενές νερού έχουν κύριο χαρακτηριστικό τη χωρητικότητα τους, ενώ ως γνωστοί αγωγοί διέλευσης νερού χαρακτηρίζονται από τις αντιστάσεις που προβάλλουν στην κίνηση του νερού. Όπως διαφαίνεται βάση των παραπάνω δεν υφίσταται απόλυτα συμπαγές πέτρωμα, δηλαδή συμπαγής στερεά φάση προκειμένου για δείγμα με

διαστάσεις της τάξης των μερικών m³ ή μερικών δεκάδων m³. Αντιθέτως, οι σχηματισμοί παρουσιάζουν περισσότερες ή λιγότερες ασυνέχειες, πόρους και γενικά κενά διαφόρων τύπων. Γενικά ο βαθμός και η ένταση με τα οποία παρουσιάζονται αυτά τα κενά εκφράζεται με μία υδρογεωλογική παράμετρο, ονομαζόμενη το πορώδες. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται ενδεικτικές τιμές του ολικού πορώδες από 0 μέχρι 60%.

Προσχώσεις	Πορώδες (%)	Ιζηματογενή πετρώματα	Πορώδες (%)	Κρυσταλλικά πετρώματα	Πορώδες (%)
Μικρά Χαλίκια	24-36	Ψαμμίτες	5-30	Ρωγματομένα	0-10
Μεγάλα Χαλίκια	25-38	Ιλυόλιθοι	21-40	Μη ρωγματομένα	0-5
Χονδρόκοκκη Άμμος	31-48	Ασβεστόλιθοι	0-40	Βασάλτες	3-35
Λεπτόκοκκη Άμμος	26-53	Καρστοποιημένοι Ασβεστόλιθοι	0-40	Αποσαθρωμένοι Γρανίτες	34-57
Ίλος	34-61	Σχιστόλιθοι	0-10		
Άργιλος	34-60				

Πίνακας 2.2 Ενδεικτικές Τιμές ολικού πορώδους σε πετρώματα (Kallergis et al., 1999)

Στην ενότητα αυτή αναλύεται εκτενώς το μαθηματικό μοντέλο, εξετάζοντας τις αρχικές οριακές συνθήκες και τις μαθηματικές εξισώσεις που συνθέτουν το πρόβλημα των υπόγειων νερών στους υπόγειους υδροφορείς.

2.2 Νόμος του Darcy

Αναφορικά με τον νόμο του Darcy, οι κινήσεις των υπόγειων νερών πραγματοποιούνται από θέσεις υψηλότερων ενεργειακών σταθμών σε θέσεις χαμηλότερων ενεργειακών σταθμών. Η θέση και η πίεση είναι δύο σημαντικοί παράγοντες που συμβάλουν στην ενεργειακή στάθμη στα υπόγεια ύδατα, γιατί η κινητική ενέργεια είναι πρακτικά ασήμαντη λόγω των μικρών ταχυτήτων των υπόγειων νερών. Η κίνηση του νερού χάνει ενέργεια λόγω των τριβών στα τοιχώματα του στερεού εδαφικού σκελετού, ενώ η απώλειά της ανά μονάδα μήκους έχει βρεθεί πειραματικά ότι είναι ανάλογη της ταχύτητας του υπόγειου νερού για στρωτή ροή (Nanou-Giannarou, 2006).

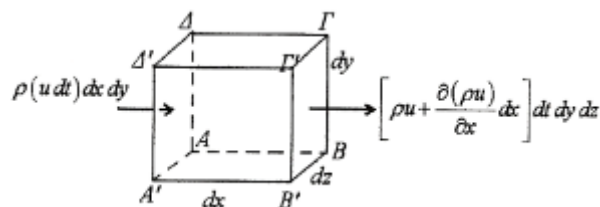
Ο νόμος του *Darcy* (1856) διατυπώνεται με την εξής μορφή: $q = \frac{Q}{A} = KJ$ όπου q είναι η ειδική παροχή ή ταχύτητα *Darcy*. Ειδική παροχή θεωρείται ο όγκος του νερού που περνά ανά μονάδα χρόνου από μια μοναδιαίου εμβαδού διατομή, κάθετη στην διεύθυνση της ροής. Το K είναι η υδραυλική αγωγιμότητα ή συντελεστής διαπερατότητας και το J είναι η υδραυλική κλίση που εκφράζεται ως $J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{L} = \frac{\Delta\varphi}{L}$ όπου φ το πιεζομετρικό φορτίο και L το μήκος του υδροφόρου ορίζοντα. Για τρισδιάστατη ροή ομογενούς ισότροπου πορώδους μέσου n , ο νόμος του *Darcy* διατυπώνεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} q_x &= KJ_x = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x} = nV_x \\ q_y &= KJ_y = -K \frac{\partial \varphi}{\partial y} = nV_y \\ q_z &= KJ_z = -K \frac{\partial \varphi}{\partial z} = nV_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

όπου n είναι το πορώδες του υφιστάμενου εδάφους, V είναι η ταχύτητα του νερού και το φ είναι το πιεζομετρικό φορτίο.

2.3 Η εξίσωση της Συνέχειας

Η ροή σε πορώδη μέσα περιγράφεται από την εξίσωση της συνέχειας ή εξίσωση διατήρησης της μάζας. Η εξίσωση αυτή νοεί ότι η μάζα του νερού σε διαφορικό όγκο διατηρείται, δηλαδή η μάζα που εισέρχεται όταν αφαιρεθεί από την μάζα που εξέρχεται ανά μονάδα χρόνου ισούται με την μεταβολή της μάζας στον διαφορικό αυτό όγκο που φαίνεται και στην πιο κάτω αναπαράσταση (Sotiropoulou 2010).



Σχήμα 2.3.1 Διαφορικός όγκος αναφοράς

Η εξίσωση της συνέχειας από μαθηματικής πλευράς διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} \quad (2.3)$$

όπου q_x, q_y, q_z αντιπροσωπεύει την ειδική παροχή στους τρεις άξονες x, y, z αντίστοιχα, ρ είναι πυκνότητα του ρευστού (στην περίπτωση μας νερού) και n το πορώδες εδάφους. Με χρήση του συντελεστή αποθηκευτικότητας S_o για τον περιορισμένο υδροφορέα έχουμε την εξής εξίσωση:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} = -\rho S_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.4)$$

Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα ρ δεν μεταβάλλεται στον χώρο άρα το ρ ισούται με 1. Επομένως η προηγούμενη εξίσωση (2.4) γίνεται:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -S_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.5)$$

Προσθέτοντας τον όρο φόρτισης W (L^{-1}) στην προηγούμενη εξίσωση (2.5) έχουμε την εξής παραγόμενη εξίσωση:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -S_o \frac{\partial \phi}{\partial t} + W \quad (2.6)$$

Σύμφωνα με τις δύο καταστάσεις της ροής του νερού στον υπόγειο υδροφορέα και συγκεκριμένα της μόνιμης και μη μόνιμης ροής σε συνδυασμό με τις διάφορες περιπτώσεις υδροφόρου ορίζοντα εξάγονται οι επόμενες συναρτήσεις:

Για Μη Μόνιμη Ροή:

Μη ομογενής ανισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi_y}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial \phi_z}{\partial z}) = -S_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.7)$$

Μη ομογενής και ισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial \phi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K \frac{\partial \phi_y}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K \frac{\partial \phi_z}{\partial z}) = -S_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.8)$$

Ομογενής και ανισότροπος υδροφορέας

$$K_x \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} = -S_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.9)$$

Ομογενής και ισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} = -\frac{S_o}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.10)$$

Για **Μόνιμη Ροή:**

Σε αυτή την περίπτωση της μόνιμης ροής ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις τις μη μόνιμης ροής μόνο που το δεξί σκέλος των εξισώσεων αυτών είναι ίσο με 0 και φαίνονται πιο κάτω για κάθε περίπτωση υπόγειου υδροφορέα.

Μη ομογενής ανισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}) = 0 \quad (2.11)$$

Μη ομογενής και ισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial}{\partial x} (K \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}) = 0 \quad (2.12)$$

Ομογενής και ανισότροπος υδροφορέας

$$K_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} = 0 \quad (2.13)$$

Ομογενής και ισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial z^2} = 0 \quad (2.14)$$

Για κατάσταση μόνιμης ροής σε ομογενή και ισότροπο υδροφορέα η εξίσωση συνέχειας ονομάζεται εξίσωση **Laplace** δηλαδή είναι η ίση με την εξίσωση (2.14).

Η παρούσα μεταπτυχιακή μελέτη θα ασχοληθεί μόνο με τις δύο διαστάσεις του υπόγειου υδροφορέα και συγκεκριμένα τις διαστάσεις x και y. Επομένως οι παραπάνω εξισώσεις τρισδιάστατης μορφής τροποποιούνται σε δισδιάστατη μορφή. Οι εξισώσεις αναφέρονται πιο κάτω ανάλογα με την κατάσταση της ροής των νερών και των διαφόρων περιπτώσεων του υδροφορέα:

(1α) Περιορισμένος Υδροφορέας και Μη Μόνιμη Ροή

Μη ομογενής και ανισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial}{\partial x} (T_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (T_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}) = -S_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} + Q \quad (2.15)$$

Όπου S η αποθηκευτικότητα του υδροφορέα, T_x, T_y αντιπροσωπεύουν την μεταφορικότητα του νερού κατά την διεύθυνση x και y αντίστοιχα με μονάδες (L^3T^{-1}) και Q η συνολική παροχή άντλησης ή τροφοδοσίας σε (L^3T^{-1}). Σημειώνεται πως στο συντελεστή Q της συνολικής παροχής περιλαμβάνονται σημειακές ή κατανεμημένες πηγές και παίρνει θετικό πρόσημο όταν πρόκειται για πηγάδια άντλησης και αρνητικό για πηγάδια φόρτισης.

Μη ομογενές και ισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial}{\partial x} (T \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (T \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}) = -S \frac{\partial \varphi}{\partial t} + Q \quad (2.16)$$

Ομογενής και ανισότροπος υδροφορέας

$$T_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = -S_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.17)$$

Ομογενής και ισότροπος υδροφορέας

$$T \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + T \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = -S_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.18)$$

(1β) Περιορισμένος Υδροφορέας και Μόνιμη Ροή

Μη ομογενής και ανισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial}{\partial x} (T_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (T_y \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}) = 0 \quad (2.19)$$

Μη ομογενές και ισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial}{\partial x} (T \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (T \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}) = 0 \quad (2.20)$$

Ομογενής και ανισότροπος υδροφορέας

$$T_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = 0 \quad (2.21)$$

Ομογενής και ισότροπος υδροφορέας

$$T \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + T \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = 0 \quad (2.22)$$

Αντίστοιχα όπως προηγουμένως στην τρισδιάστατη μορφή έτσι και στην δισδιάστατη στην περίπτωση ομογενούς και ισότροπου υδροφορέα η εξίσωση της συνέχειας ονομάζεται εξίσωση *Laplace* και συγκεκριμένα:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.23)$$

(2) Φρεάτιος Υδροφορέας

Στην περίπτωση του φρεάτιου υπόγειου υδροφορέα αντικαθιστούμε το πιεζομετρικό φορτίο φ με το βάθος ροής h και ισχύει ότι η μεταφορικότητα T ισούται με το γινόμενο της υδραυλικής αγωγιμότητας K και του βάθους ροής h . Επομένως οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι οι ακόλουθες:

Μη ομογενής και ανισότροπος υδροφορέας

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x h \frac{\partial h_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y h \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (2.24)$$

Ομογενής και ισότροπος υδροφορέας

$$K \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h_x}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + Q \quad (2.25)$$

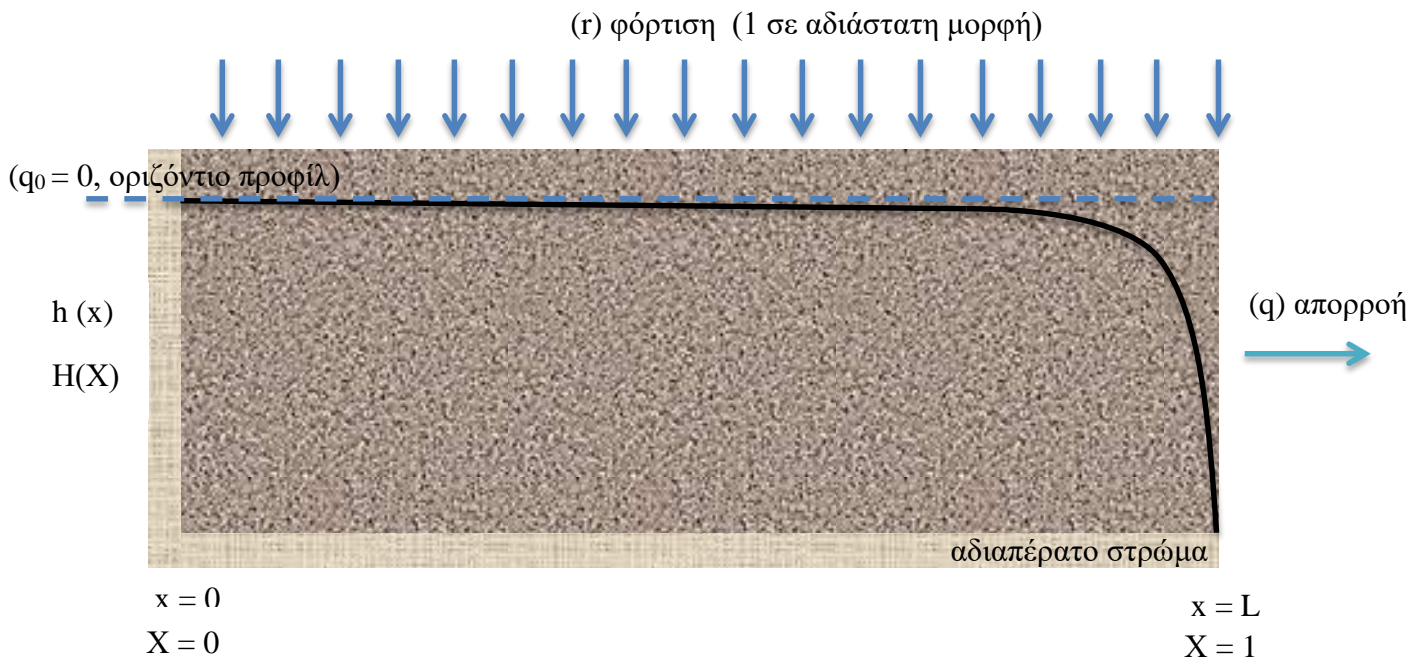
Οι εξισώσεις (2.24) και (2.25) που προαναφέρθηκαν δεν είναι γραμμικές έτσι υπόκεινται σε γραμμικοποίηση. Μετά από γραμμικοποίηση των δύο εξισώσεων η (2.25) γίνεται:

$$Kh \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \right) = -S_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} + Q \quad (2.26)$$

Η σχέση (2.26) χρησιμοποιείται μόνο αν οι μεταβολές στην στάθμη της θάλασσας είναι πολύ μικρές συγκριτικά με το συνολικό πάχος του υδροφορέα, σε διαφορετική περίπτωση χρησιμοποιείται η εξίσωση (2.25).

3. Καινοτόμες επιλύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* κατά την ομοιόμορφη φόρτιση πεπερασμένου οριζόντιου υπόγειου υδροφορέα

Στο κεφάλαιο αυτό κατασκευάζονται νέες προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* για την περίπτωση του περιορισμένου οριζόντιου υδροφόρου ορίζοντα τόσο για τη συσσώρευση όσο και για την φάση αποστράγγισης. Θα παρουσιάσουμε μερικές απλοποιημένες γραμμικοποιήσεις της εξίσωσης του *Boussinesq* για τον οριζόντιο υδροφορέα, οι οποίες οδηγούν σε επιλύσιμες μορφές και στη συνέχεια θα αναπτύξουμε σε λεπτομέρεια μία καινούργια προσέγγιση η οποία διατηρεί τη μη γραμμικότητα σε μεγάλο βαθμό. Η νέα μέθοδος βασίζεται σε μια εξειδικευμένη εικασία «*ansatz*» του προφίλ του νερού στον υδροφορέα για κάθε φάση του, που αφήνει ορισμένες λειτουργίες του χρόνου ως βαθμούς ελευθερίας για να καθοριστεί έτσι δυναμικά. Οι τελευταίοι, στη συνέχεια, με την επιβολή σταθερών ότι αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση θα πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση *Boussinesq* στα ακραία σημεία του υδροφορέα. Οι προκύπτουσες συνθήκες μπορούν να λυθούν με ακρίβεια έτσι που να οδηγεί σε προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες είναι σαφείς και απλές. Οι λύσεις των δύο φάσεων σε σύγκριση με τις αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* δείχνουν μάλλον πως συμφωνούν εντυπωσιακά.



Σχήμα 3.1. Σχηματική αναπαράσταση της ροής σε οριζόντιο υδροφορέα με φόρτιση.

Η εξίσωση *Boussinesq* για οριζόντιο υδροφορέα (σχήμα 3.1) είναι:

$$n \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2} k \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = r \quad (3.1)$$

Ο υδροφορέας περιορίζεται στα όρια $x = 0$ (ανάντη όριο) και $x = L$ (κατάντη όριο), έτσι θεωρείται πως ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,t) = 0, \quad h(L,t) = 0 \quad (3.2)$$

όπου η πρώτη προϋπόθεση συνεπάγει μηδενικές εισροές καθώς ανέρχεται σε τάση φυγής της ροής *Darcy*

$$q = -kh \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.3)$$

που κωδικοποιείται έτσι η παρουσία ενός κάθετου αδιαπέραστου ορίου. Η δεύτερη προϋπόθεση στις οριακές συνθήκες (3.2), υποδηλώνουν ότι ο υδροφόρος ορίζοντας είναι κατακόρυφος, δηλαδή, με άπειρη κλίση στο κάτω όριο του, διότι η διατήρηση μάζας απαιτεί να υπάρχει μια μη μηδενική εκροή στο σημείο αυτό, ενώ το βάθος του νερού είναι μηδέν. Στο σημείο αυτό επικεντρωνόμαστε στη φάση της σταδιακής συσσώρευσης. Θα υποθέσουμε ότι το ποσοστό αναπλήρωσης r είναι σταθερό και έπειτα εισάγουμε αδιάστατες ποσότητες των παραμέτρων των εξισώσεων που θα ακολουθήσουν στην συνέχεια

$$\tau = \frac{rt}{nL}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad H = \frac{h}{L} \quad (3.4)$$

Έτσι, η εξίσωση *Boussinesq* και οι οριακές συνθήκες με τις αδιάστατες παραμέτρους διαβάζονται όπως πιο κάτω:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} = 1, \quad H(1,\tau) = 0, \quad H'(0,\tau) = 0 \quad (3.5)$$

όπου υποδηλώνεται μερική διαφοροποίηση σε σχέση με την αδιάστατη απόσταση X . Η λύση της μόνιμης κατάστασης ισορροπίας αυτού του προβλήματος, που είναι η ασυμπτωτική λύση σε μεγάλες τιμές, προκύπτει εύκολα αν μηδενιστεί η χρονική παράγωγος και οδηγεί στη μορφή:

$$H^2 = 1 - X^2 \quad (3.6)$$

Σε κάθε περίπτωση η εξίσωση (3.5) είναι μη γραμμική και δεν υπάρχουν γνωστές αναλυτικές λύσεις της. Θα παρουσιάσουμε μερικές απλοποιημένες γραμμικοποιήσεις της εξίσωσης (3.5) οι οποίες οδηγούν σε επιλύσιμες μορφές και στη συνέχεια θα αναπτύξουμε σε λεπτομέρεια μία καινούργια προσέγγιση η οποία διατηρεί τη μη γραμμικότητα σε μεγάλο βαθμό.

3.1 Γραμμικές Προσεγγίσεις (*Linear approximation*) της εξίσωσης

Boussinesq

Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε αναλυτικές προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης (3.5) αφού απλουστευτεί σε γραμμική μορφή. Οι λύσεις παράγονται για χρονικά μεταβλητό συντελεστή γραμμικοποίηση επαναφέροντας σε κάποιο βαθμό τη μη γραμμικότητα σε επίπεδο χρόνου.

3.1.1 Γραμμική προσέγγιση σύμφωνα με τον *Chapman* (1995)

Η εξίσωση *Boussinesq* στην περίπτωση μας είδαμε ότι είναι $\frac{\partial H(X, \tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2(X, \tau)}{\partial X^2} = 1$ που

ισοδύναμα γράφεται $\frac{1}{H(X, \tau)} \frac{\partial H^2(X, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 H^2(X, \tau)}{\partial X^2} = 2$. Προσεγγίζουμε τον πρώτο όρο ως

$$\frac{1}{H} \frac{\partial H^2}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} \approx \frac{1}{H_0} \frac{\partial H^2}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} = 2 \quad (3.7)$$

και ορίζουμε την γενική επίλυση στην μορφή χωριζόμενων μεταβλητών $H^2(X, \tau) = f(X)g(\tau) + w(X)$, με $w(X) = 1 - X^2$, τη λύση μόνιμης κατάστασης (*steady state solution*). Έπειτα, εισάγοντας το τελευταίο στην διαφορική εξίσωση παρατηρούμε πως πρέπει

να ισχύει $\frac{f\dot{g}}{H_0} - f''g = 0 \Rightarrow \frac{1}{H_0} \frac{\dot{g}}{g} = \frac{f''}{f} = -a^2$ και βρίσκουμε την γενική λύση στην μορφή

$g(\tau) = e^{-a^2 H_0 \tau}$, $f(X) = a_1 \sin(aX) + a_2 \cos(aX)$. Ακολουθώντας, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες (3.2), καταλήγουμε στις γενικές λύσεις για τις χωριζόμενες μεταβλητές

$$g(\tau) = e^{-(m\pi + \pi/2)^2 H_0 \tau} \quad \text{και} \quad f(X) = c_m \cos((m\pi + \pi/2)X) \quad (3.8)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν επίσης πως οι σειρές Fourier της μόνιμης κατάστασης είναι

$1 - X^2 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(m\pi X + \pi X/2) = 1 - X^2$, $X \in [0, 1]$, με τους συντελεστές c_m να δίνονται

από την $c_m = \frac{32 \cos(m\pi) + 16(1 + 2m)\pi \sin(m\pi)}{(\pi + 2m\pi)^3}$, μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι η τελική

λύση μπορεί να γραφτεί σε μορφή σειράς όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$\begin{aligned}
H^2(X, \tau) &= 1 - X^2 - \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos(m\pi X + \pi X / 2) e^{-(m\pi + \pi/2)^2 H_0 \tau} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(m\pi X + \pi X / 2) \left(1 - e^{-(m\pi + \pi/2)^2 H_0 \tau}\right), \tag{3.9}
\end{aligned}$$

$$\text{με συντελεστή } c_m = \frac{32 \cos(m\pi) + 16(1 + 2m)\pi \sin(m\pi)}{(\pi + 2m\pi)^3}.$$

Σίγουρα το H_0 είναι παράμετρος για διερεύνηση αφού είναι ο παράγοντας γραμμικοποίησης και αποτελεί υπό μία έννοια μία ένδειξη του μέσου βάθους του προβλήματος (χωρικά και χρονικά) στη συνολική διάρκεια της εξέλιξης, διακρίβωση. Μπορούμε να προχωρήσουμε τώρα λίγο διαισθητικά γνωρίζοντας ότι ο συντελεστής γραμμικοποίησης είναι στην πραγματικότητα μία συνάρτηση του χρόνου έτσι είναι αρκετά σαφές ότι μία πολύ ακριβέστερη προσέγγιση (που διατηρεί τη μη γραμμικότητα στο χρόνο) είναι η ακόλουθη

$$\frac{1}{H} \frac{\partial H^2}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} \approx \frac{1}{\bar{H}(\tau)} \frac{\partial H^2}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} = 2 \tag{3.10}$$

Αυτή η επίλυση γίνεται αριθμητικά και είναι αρκετά ακριβής όπως θα δείξουμε αργότερα.

3.1.2 Γραμμικοποίηση με προφίλ σταθερού σχήματος

Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση, $\frac{\partial H}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{H} \frac{\partial H^2}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} = 2$, και

επιλέγουμε να κάνουμε την αντίστροφη γραμμικοποίηση

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} = 1 \approx \frac{\bar{H}}{H^2} \frac{\partial H^2}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} = 2 \Rightarrow \bar{H} \frac{f(X)\dot{g}(\tau)}{f(X)g(\tau)} - g(\tau)f''(x) = 2 \tag{3.11}$$

Η οποία οδηγεί σε χωριζόμενες μεταβλητές που ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$f(X) = 1 - X^2, \quad \bar{H} \frac{\dot{g}(\tau)}{g(\tau)} + 2g(\tau) = 2 \tag{3.12}$$

Από τη στιγμή που το προφίλ δεν αλλάζει σχήμα σε αυτή τη γραμμικοποίηση, εύκολα το \bar{H} μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση του χρόνου και συγκεκριμένα ως σταθερά επί την τετραγωνική ρίζα της χρονικής συνάρτησης $\bar{H} = H_0 \sqrt{g(\tau)}$, και επομένως για τη χρονική

συνάρτηση ισχύει $H_0 \frac{\dot{g}(\tau)}{g^{1/2}(\tau)} + 2g(\tau) = 2$, η οποία λύνεται εύκολα στη μορφή

$g(\tau) = \tanh^2(\tau / H_0)$. Συμπερασματικά η λύση γράφεται ως:

$$H^2(X, \tau) = (1 - X^2) \tanh^2(\tau / H_0) \quad (3.13)$$

Η λύση αυτή είναι το ανάλογο της (3.12) της προηγούμενης παραγράφου και όπως είδαμε είναι απολύτως επιλύσιμη σε αντίθεση με την (3.10). Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι η λύση αυτή ταυτίζεται με την προσέγγιση της οιονεί κατάστασης ισορροπίας (*quasi-steady approximation*) στο πρόβλημα της φόρτισης οριζόντιου υδροφορέα και στην πραγματικότητα είναι η πρώτη φορά που διαφαίνεται ξεκάθαρα η σύνδεση του εννοιολογικού μοντέλου *quasi-steady* ως προς τις ολοκληρώσιμες ποσότητες της αποθηκευτικότητας και της απορροής με την εξίσωση του *Boussinesq*.

3.2 Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης (3.5)

Χρησιμοποιούμε κεντρικές διαφορές στο χώρο και *forward* σχήμα στο χρόνο και η εξίσωση (3.5) θέτοντας $H^2(X, T) \equiv F(X, T) \approx F(i\Delta X, n\Delta T) \equiv F_i^n$, γράφεται ως

$$\frac{\sqrt{F_{i+1}^{n+1}} - \sqrt{F_i^n}}{\Delta T} = \frac{1}{2} \frac{F_{i+1}^n - 2F_i^n + F_{i-1}^n}{\Delta X^2} + 1, \quad (3.14)$$

οπότε κάθε νέο χρονικό βήμα υπολογίζεται άμεσα συναρτήσει των προηγούμενων ως

$$H(i\Delta X, (n+1)\Delta \tau) = \sqrt{F_i^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{F_{i+1}^n - 2F_i^n + V}{\Delta X^2} \Delta T + \Delta T + \sqrt{F_i^n} \quad (3.15)$$

Προκειμένου να ελέγξουμε την ακρίβεια του αριθμητικού σχήματος, επιλύουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο την αντίστοιχη προσέγγιση της από την εξίσωση (3.11)

$$\frac{\langle \sqrt{F^n} \rangle}{F_i^n} \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta T} = \frac{F_{i+1}^n - 2F_i^n + F_{i-1}^n}{\Delta X^2}, \quad (3.16)$$

και συγκρίνουμε με την αναλυτική επίλυση που δίνεται από την εξίσωση (3.13). Σε αυτήν την περίπτωση το μέσο βάθος σε κάθε χρονικό βήμα $\langle \sqrt{F^n} \rangle$ υπολογίζεται από αριθμητική ολοκλήρωση με τον κανόνα του *Simson*, δηλαδή

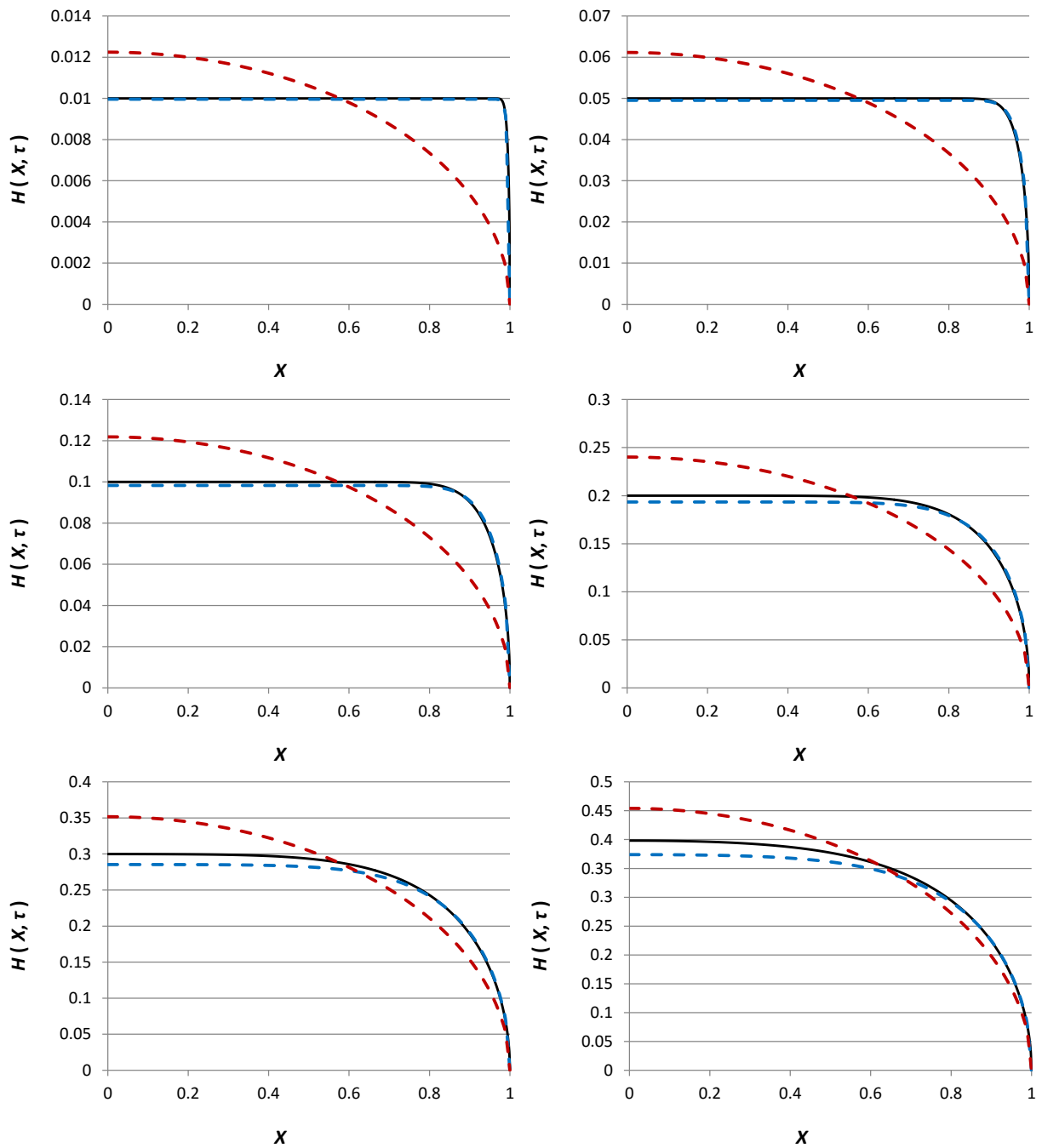
$$\left\langle \sqrt{F^n} \right\rangle = \Delta X \frac{F_0^n + 4F_1^n + 2F_2^n + 4F_3^n + 2F_4^n + \dots + 4F_{i_{\max}-2}^n + 2F_{i_{\max}-1}^n + F_{i_{\max}}^n}{3} \quad (3.17)$$

Η σύγκριση με την αναλυτική λύση (3.13) σε χρονικά βήματα $\Delta\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ και χωρικά βήματα $\Delta X = 10^{-2}$ οδηγεί σε εξαιρετική συμφωνία με σφάλματα μικρότερα του 0.1%.

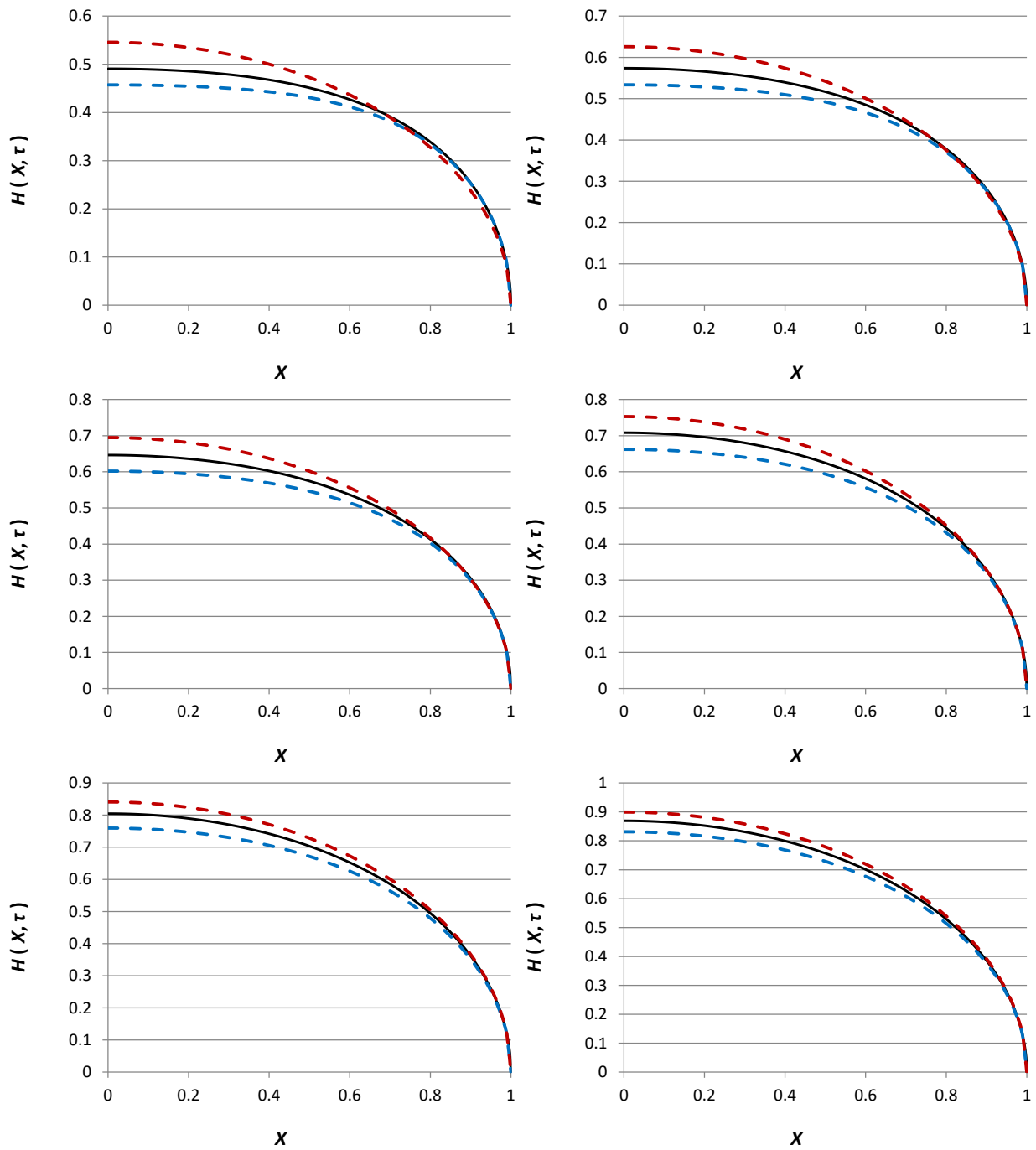
3.3 Συγκρίσεις των γραμμικών λύσεων με την αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5)

Στο τμήμα αυτό παρουσιάζεται η σύγκριση των γραμμικών εξισώσεων (3.10) και (3.13) με την αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης του *Boussinesq* (3.5). εκτός από τη δοκιμή της αποτελεσματικότητας των γραμμικών προσεγγίσεων θα έχουμε τη δυνατότητα να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μη γραμμικής αριθμητικής επίλυσης. Να σημειωθεί ότι η πρώτη γραμμικοποίηση που δίνεται από την (3.10), επίσης λύνεται αριθμητικά ενώ η δεύτερη (3.13) είναι πλήρως αναλυτική.

Στα ακόλουθα σχήματα 3.2 και 3.3 παρουσιάζονται η προβλεπόμενη εξέλιξη του προφίλ του νερού για μικρούς και μεγαλύτερους χρόνους. Είναι προφανές ότι η γραμμικοποίηση βάσει της (3.10) είναι πολύ ακριβής στην ποσοτική και ποιοτική περιγραφή του φαινομένου σε μικρούς χρόνους ($\tau < 0.4$) οπότε επικρατεί μία τάση γρήγορης αλλαγής του προφίλ, το οποίο εξελίσσεται με μορφή κατά προσέγγιση μεταβλητού τραπεζίου του οποίου το ύψος αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Αντίθετα η δεύτερη γραμμικοποίηση είναι πολύ λιγότερο ακριβής, ως αποτέλεσμα της εγγενούς ιδιότητας ενός προφίλ αμετάβλητου σχήματος. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι και οι δύο γραμμικοποιήσεις προέρχονται από παραδοχή γραμμικότητας στο χώρο όχι όμως και στο χρόνο. Πάντως η πρώτη δεν προσφέρει επί της ουσίας σημαντική αναγνώσιμη πληροφορία για την εξέλιξη του προβλήματος από τη στιγμή που δεν λύνεται αναλυτικά. Σε μεταγενέστερους χρόνους ($\tau > 0.4$) όπως προκύπτει από το σχήμα 3.3, το προφίλ παίρνει ένα σχετικά σταθερό παραβολικό σχήμα (πλησιάζει σε steady-state) και σε αυτήν την περίπτωση και οι δύο γραμμικές λύσεις αποδίδουν περίπου ισοδύναμες μικρές διαφοροποιήσεις από τη μη γραμμική, η οποία εξελίσσεται οριοθετημένη (όπως μάλλον θα ήταν και αναμενόμενο) από τις δύο γραμμικές προσεγγίσεις. Σε αυτό το στάδιο οποιαδήποτε έννοια γραμμικότητας στην εξέλιξη με το χρόνο έχει χαθεί. Σε κάθε περίπτωση διαφαίνεται ένας σαφής διαχωρισμός της εξέλιξης του προφίλ σε μικρούς χρόνους, μικρότερους του 0.4, και μεγαλύτερους από το 0.4 χρόνους, συμπέρασμα το οποίο αποτελεί και την κεντρική ιδέα και έμπνευση για μία πιο αποτελεσματική και περιγραφική πρωτότυπη προσέγγιση του προβλήματος που θα ακολουθήσει.



Σχήμα 3.2 Αδιάστατα προφίλ του νερού κατά το στάδιο της φόρτισης από αρχική μηδενική συνθήκη για αδιάστατους χρόνους $\tau = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Με μαύρη συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Με διακεκομμένες γραμμές οι γραμμικές προσεγγίσεις από τις εξίσωση (3.10) (με μπλε χρώμα επιλυόμενα αριθμητικά) και την αναλυτική (3.13) (με μπλε χρώμα).



Σχήμα 3.3 Αδιάστατα προφίλ του νερού κατά το στάδιο της φόρτισης από αρχική μηδενική συνθήκη για αδιάστατους χρόνους $\tau = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0, 1.2$. Με μαύρη συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Με διακεκομμένες γραμμές οι γραμμικές προσεγγίσεις από τις εξίσωση (3.10) (με μπλε χρώμα επιλύομενη αριθμητικά) και την αναλυτική (3.13) (με μπλε χρώμα).

3.4 Μη γραμμική προσέγγιση της εξίσωσης *Boussinesq* με την χρήση προαποφασισμένων συναρτησιακών μορφών

Στην συνέχεια γίνεται η παραδοχή στο πρόβλημα ότι ο υπόγειος υδροφορέας αρχικά είναι άδειος, δηλαδή $H(X, 0^+) = 0$. Παρατηρώντας την αριθμητική λύση του προβλήματος (3.5) με τις αρχικές συνθήκες (3.2) βρίσκει κανείς ότι υπάρχει μια πρώτη περίοδος ανάπτυξης κατά την οποία ο πίνακας νερού ανεβαίνει με μορφή ορθογώνιου σχήματος, και είναι ελαφρώς ταυτοποιημένος με το κατάντη άκρο του υδροφορέα. Αυτή η συμπεριφορά αναπαράγεται αρκετά πειστικά στην πιο κάτω υποθετική μορφή:

$$H^2(X, \tau) = H^2(0, \tau)(1 - X^{w(\tau)}) \quad (3.18)$$

Όπου ο εξαρτώμενος στον χρόνο εκθέτης είναι $w(0^+) = +\infty$. Υπάρχουν δύο άγνωστες μεταβλητές: ο εκθέτης $w(\tau)$ και το βάθος στο άνω άκρο $H(0, \tau)$. Μπορούμε να τους ορίσουμε με την εφαρμογή των εξισώσεων *Boussinesq* και των οριακών συνθηκών (3.5) στο υποθετικό προφίλ (3.18) στα οριακά σημεία όπου $X = 0$ και $X = 1$. Στην συνέχεια της μελέτης θα δηλώνεται από μια διαφοροποίηση dot σε σχέση του τ και από μερική διαφοροποίηση σε σχέση με το X . Στο οριακό σημείο όπου $X = 0$ θα έχουμε:

$$\dot{H}(0, \tau) - \frac{1}{2}(H^2)''(0, \tau) = 1 \rightarrow \dot{H}(0, \tau) = 1 \rightarrow H(0, \tau) = \tau \quad (3.19)$$

Εδώ επίσης χρησιμοποιείται η αρχική συνθήκη $H(X, 0^+) = 0$, έτσι βρίσκουμε την άγνωστη μεταβλητή $H(0, \tau)$. Στο οριακό σημείο όπου $X = 1$ (ή, ακριβέστερα, $X \rightarrow 1^-$) έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{H}(1, \tau) - \frac{1}{2}(H^2)''(1, \tau) = 1 &\rightarrow -\frac{1}{2}(H^2)''(1, \tau) = 1 \rightarrow \\ H^2(0, \tau)w(\tau)(w(\tau) - 1) = 2 &\rightarrow \tau^2 w(\tau)(w(\tau) - 1) = 2 \rightarrow w(\tau) = \frac{1 + \sqrt{1 + 8/\tau^2}}{2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Με τον τρόπο αυτό υπολογίστηκε έτσι η εξίσωση του εκθέτη $w(\tau)$. Κατά την παράγωγο χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα της εξίσωσης (3.19) και εξάγαμε δύο παρατηρήσεις:

(α) το αποτέλεσμα της εξίσωσης (3.20) δείχνει πως η κατάσταση $w(0^+) = +\infty$ προέρχεται από την εφαρμογή της εξίσωσης (3.5) στο «ansatz» (3.7) στο κατάντη άκρο, και

(β) σε μεγάλες τιμές του $w(\tau)$ αυτό προσεγγίζει την τιμή 1 και όχι το 2 όπως απαιτεί η λύση (3.6) της οιονεί κατάστασης ισορροπίας. Το γεγονός αυτό δεν είναι απροσδόκητο.

Η «ansatz» (3.7) εισάχθηκε για να περιγράψει την πρώτη περίοδο χρόνου όπου ο πίνακας νερού ανεβαίνει υπό μορφή ορθογωνική. Από ένα χρονικό διάστημα και μετά, το σχήμα του πίνακα νερού του υδροφορέα θα αρχίζει να αλλάζει στην μορφή (3.6). Για αυτή την περίοδο εισάγουμε το «ansatz»:

$$H^2(X, \tau) = H^2(0, \tau)(1 - a(\tau)X^2 - (1 - a(\tau))X^4) \quad (3.21)$$

όπου η εξίσωση του ανάντη βάθους $H(0, \tau)$ και ο συντελεστής $a(\tau)$ πρέπει να οριστούν. Η έξυπνη ιδέα πίσω από το «ansatz» (3.21) είναι η ακόλουθη:

Σε όψιμους χρόνους, το H^2 πρέπει να διαφέρει από την $H^2 = 1 - X^2$ (3.6) μόνο στην σειρά δυνάμεων του X με μικρούς συντελεστές. Η ελάχιστη φυσική επιλογή που έχουμε είναι να προσθέσουμε σε σχέση με X^4 , έτσι παρατηρούμε πως το πρόβλημα (3.5) μας επιτρέπει να θέσουμε το $H(X, \tau)$ σαν μια άρτια εξίσωση του X . Ο συντελεστής του X^4 είναι σταθερός από τις οριακές συνθήκες $H(1, \tau) = 0$.

Τώρα, γυρίζοντας πίσω στην πρώτη περίοδο «*ansatz*» (3.7), όσο ο εκθέτης $w(\tau)$ μειώνεται από το $+\infty$, θα υπάρξει μια χρονική στιγμή τ_0 όπου το $w(\tau_0) = 4$. Στην στιγμή αυτή, τελειώνει και η πρώτη περίοδος. Έτσι από την εξίσωση (3.20) βρίσκουμε πως:

$$\tau_0 = 1/\sqrt{6} \approx 0.408 \quad (3.22)$$

Αφού γνωρίζουμε από την εξίσωση (8) πως $H(0, \tau) = \tau$ τότε $H(0, \tau_0) = \tau_0 = 1/\sqrt{6}$, τότε *ταιριάζουμε* την δεύτερη «*ansatz*» (10) με την πρώτη περίοδο, θέτοντας $a(\tau_0) = 0$ ως την αρχική κατάσταση για $a(\tau)$, και φυσικά την $H(0, \tau_0) = 1/\sqrt{6}$ ως την αρχική κατάσταση για $H(0, \tau)$. Έτσι, στο πλαίσιο των προσεγγίσεων μας, η δεύτερη περίοδος αρχίζει με τον υδροφόρο ορίζοντα να έχει σχήμα της μορφής $1 - X^4$. Ακολούθως, καθώς ο χρόνος περνά, ο όρος X^4 σταδιακά αλλάζει θέσεις με τον όρο X^2 , κινώντας όμως ασυμπτωτικά. Πράγματι, μας αφήνει τώρα να εφαρμόσουμε την εξίσωση (3.5) στο «*ansatz*» (3.21) στα οριακά σημεία όπου $X = 0$ και $X = 1$. Για $X=0$ οριακό σημείο έχουμε:

$$\dot{H}(0, \tau) - \frac{1}{2}(H^2)''(0, \tau) = 1 \rightarrow \dot{H}(0, \tau) + a(\tau)H^2(0, \tau) = 1 \quad (3.23)$$

Ενώ για το $X=1$ οριακό σημείο (ή, πιο ακριβέστερα, $X \rightarrow 1^-$) έχουμε:

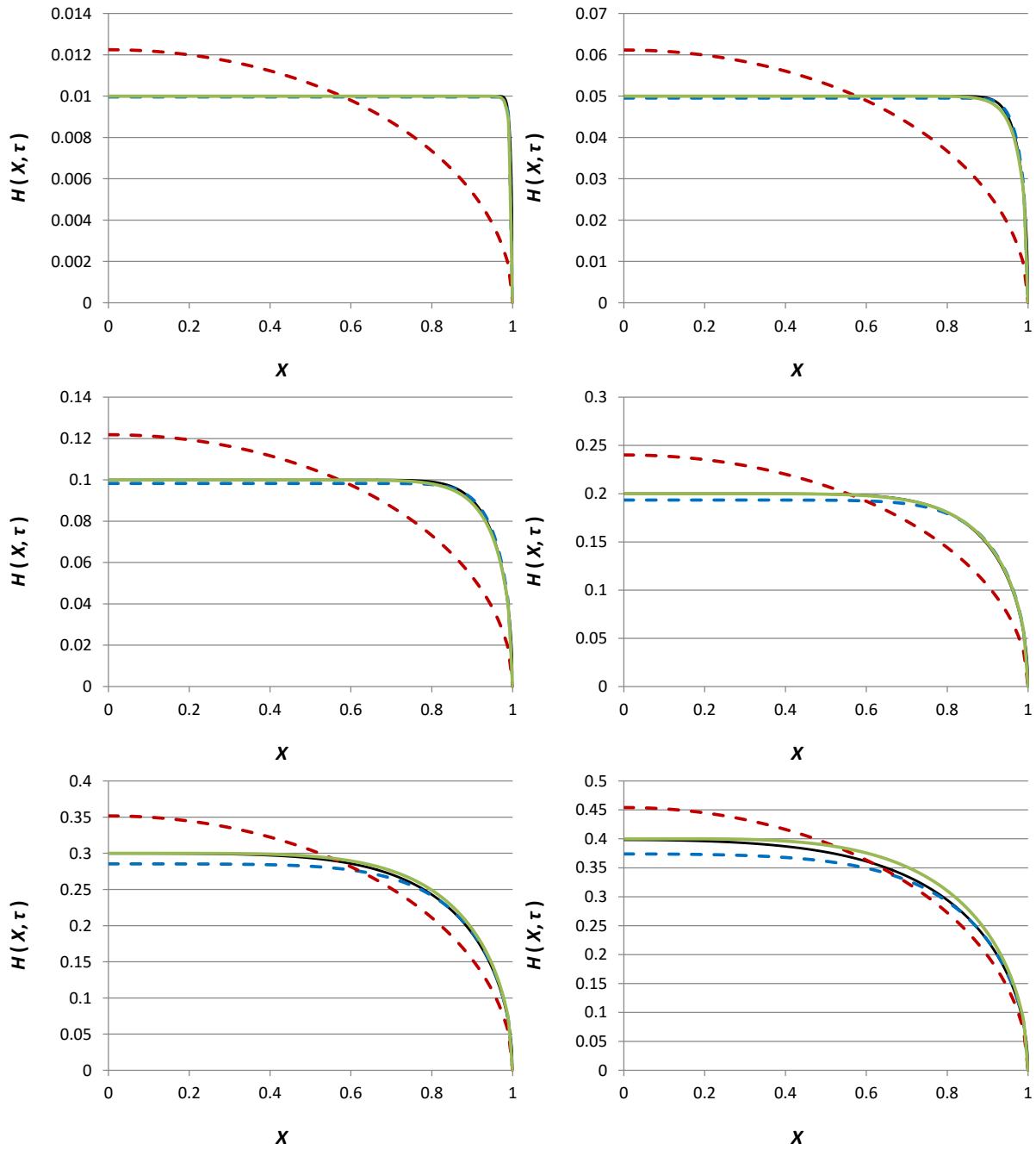
$$\dot{H}(1, \tau) - \frac{1}{2}(H^2)''(1, \tau) = 1 \rightarrow -\frac{1}{2}(H^2)''(1, \tau) = 1 \rightarrow a(\tau) = \frac{6}{5} - \frac{1}{5H^2(0, \tau)} \quad (3.24)$$

Η εξίσωση (3.24) είναι απόλυτα συνεπής με τις αρχικές συνθήκες $a(\tau_0) = 0$ και $H(0, \tau_0) = 1/\sqrt{6}$ που υπαγορεύσαμε στην δεύτερη περίοδο «*ansatz*» (3.21). Οι εξισώσεις (3.23) και (3.24) τότε δίνουν μια απλή διαφορική εξίσωση για $H(0, \tau)$ όπου ευθέως μπορεί να λυθεί σε:

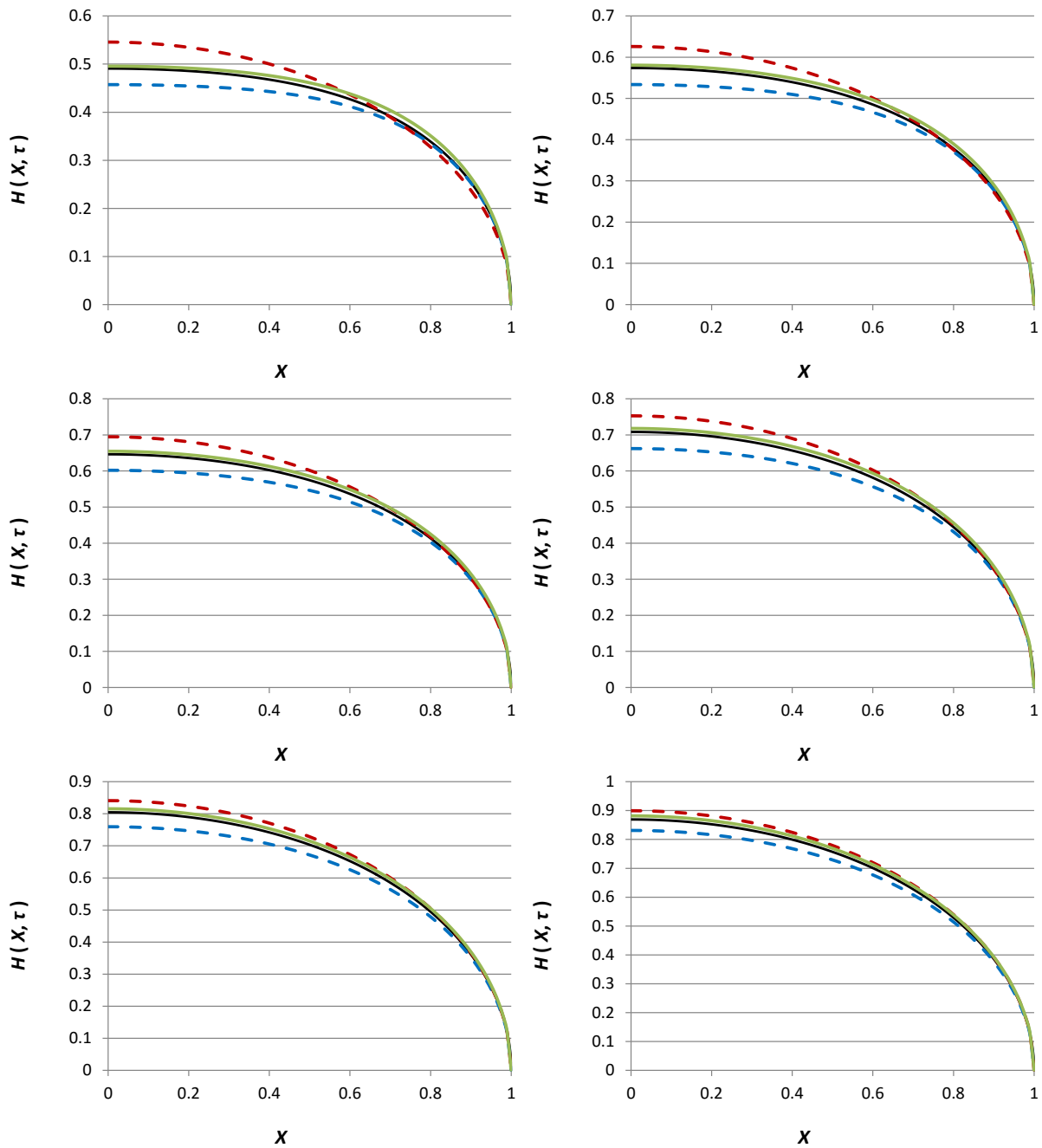
$$H(0, \tau) = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}} + \tanh[(6/5)(\tau - \frac{1}{\sqrt{6}})]}{1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \tanh[(6/5)(\tau - \frac{1}{\sqrt{6}})]} \quad (3.25)$$

Έτσι το $a(\tau)$ είναι επίσης σαφέστατα γνωστό μέσω της εξίσωσης (3.24), οδηγώντας έτσι στην κατασκευή της δεύτερης περιόδου «*ansatz*» (3.21). Παρατηρούμε ότι σε μεγάλους χρόνους η $H(0, \tau)$ και συνεπώς η $a(\tau)$ προσεγγίζει την τιμή 1, όπως έπρεπε δηλαδή, έτσι ώστε η «*ansatz*» (3.21) να συγκλίνει προς την λύση της μόνιμης κατάστασης (3.6). Συνοπτικά, η κατασκευή της προσεγγιστικής λύσης μας για τη φάση της φόρτισης και της ανόδου της στάθμης σε οριζόντιο υδροφορέα περιλαμβάνει δύο περιόδους

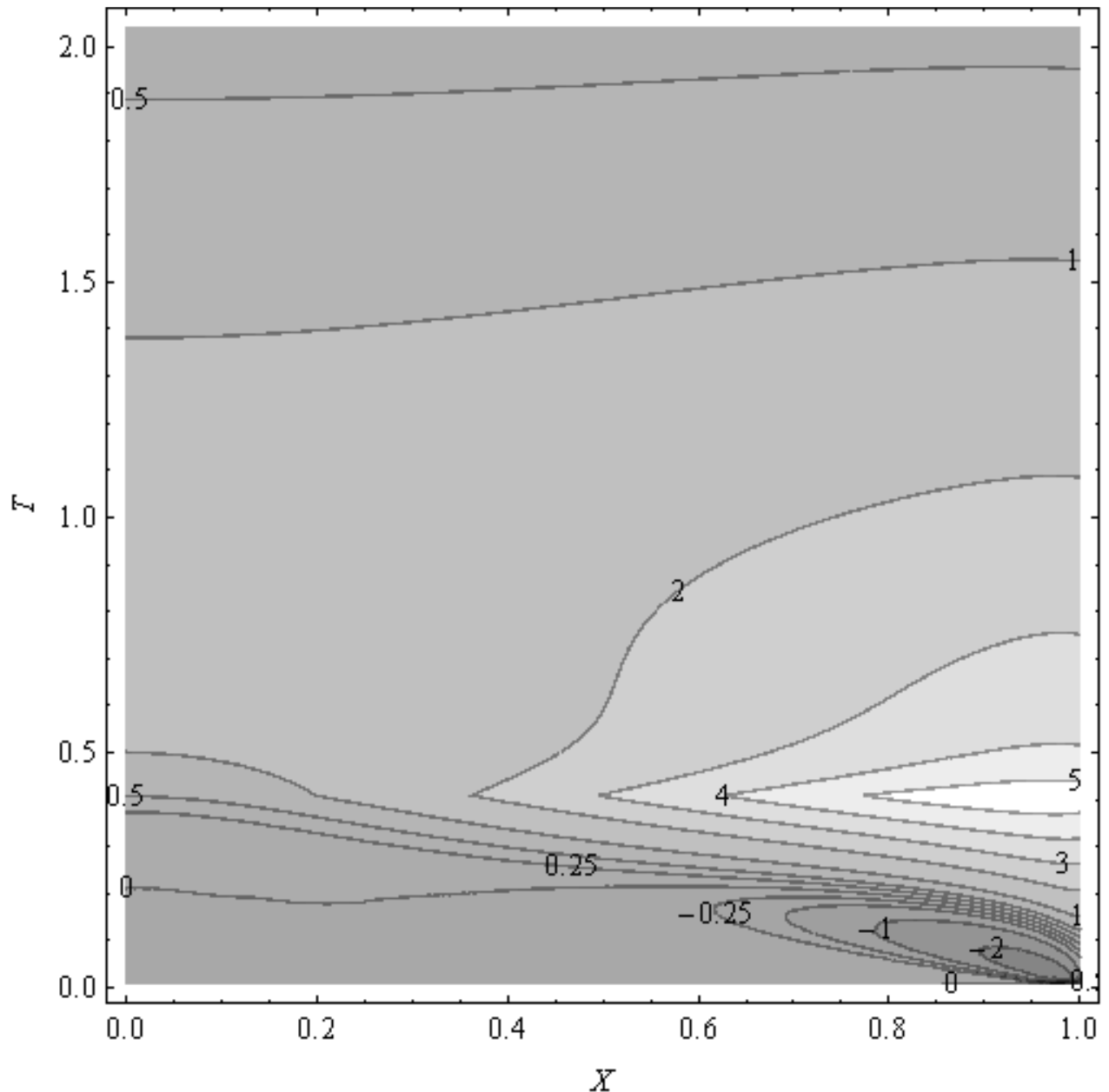
(α) η πρώτη περίοδος ορίστηκε από το $\tau \leq 1/\sqrt{6}$, η προσεγγιστική λύση δίνεται από την σχέση (3.7) με το $w(\tau)$ να δίνεται από την εξίσωση 3.20), ενώ (β) η δεύτερη περίοδος ορίστηκε από το $\tau \geq 1/\sqrt{6}$, η προσεγγιστική λύση δίνεται από την σχέση (3.21) όπου $H(0, \tau)$ και $a(\tau)$ δίνονται από την (3.24) και (3.25) αντίστοιχα.



Σχήμα 3.4 Αδιάστατα προφίλ του νερού κατά το στάδιο της φόρτισης από αρχική μηδενική συνθήκη για αδιάστατους χρόνους $\tau = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Με μύρη συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Με διακεκομμένες γραμμές οι γραμμικές προσεγγίσεις από τις εξίσωση (3.10) (με μπλε χρώμα επιλυόμενη αριθμητικά) και την αναλυτική (3.13) (με μπλε χρώμα). Με πράσινο χρώμα η καμπύλη της εξέλιξης της νέας μεθόδου όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.4.



Σχήμα 3.5 Αδιάστατα προφίλ του νερού κατά το στάδιο της φόρτισης από αρχική μηδενική συνθήκη για αδιάστατους χρόνους $\tau = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0, 1.2$. Με μαύρη συνεχή γραμμή αναπαρίσταται η αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Με διακεκομμένες γραμμές οι γραμμικές προσεγγίσεις από τις εξίσωση (3.10) (με μπλε χρώμα επιλύομενη αριθμητικά) και την αναλυτική (3.13) (με μπλε χρώμα). Με πράσινο χρώμα η καμπύλη της εξέλιξης της νέας μεθόδου όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.4.



Σχήμα 3.6 Σχετική απόκλιση (%) εξέλιξης του προφίλ σε οριζόντιο υδροφόρα με επαναφόρτιση με βάση τη μεθοδολογία του κεφαλαίου 3.4 σε σχέση με την ακριβή αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5)

Στα προηγούμενα σχήματα 3.4 και 3.5 παρουσιάζεται η προβλεπόμενη εξέλιξη του προφίλ του νερού για μικρούς και μεγαλύτερους χρόνους, τόσο από τις γραμμικοποιήσεις (3.10- 3.13) όσο και από τη νέα μεθοδολογία του κεφαλαίου 3.4, σε αντιπαράθεση με τη μη γραμμική συμπεριφορά της 3.5. Είναι προφανές ότι η καινούργια προσέγγιση αποτελεί πολύ μεγάλη βελτίωση στην ακρίβεια της προσεγγιστικής περιγραφής της συμπεριφοράς της μη γραμμικής (3.5) αποδίδοντας ποιοτικά και ποσοτικά τα χαρακτηριστικά της πλήρους εξίσωσης. Η μη γραμμικότητα στην εξέλιξη του προβλήματος έχει και σε χρονικούς και σε χωρικούς όρους και σε κάθε στιγμιότυπο είναι πολύ ακριβέστερη από τις προσεγγιστικές γραμμικές λύσεις.

Υπάρχει μία στενή περιοχή μικρής απόκλισης σε χρόνους κοντά στο 0.4, οπότε η λύση αποκλίνει κατά 5% περίπου από τη μη γραμμική αλλά αυτή η απόκλιση ελαχιστοποιείται αργότερα όπως προκύπτει και από το σχήμα 3.6, όπου παρουσιάζεται η σχετική απόκλιση (%) της εξέλιξης του προφίλ σε οριζόντιο υδροφορέα με επαναφόρτιση με βάση τη μεθοδολογία του κεφαλαίου 3.4 σε σχέση με την ακριβή αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Σε κάθε περίπτωση η ξεκάθαρη αναλυτική περιγραφή και η ακρίβεια της προσέγγισης θεωρούμε ότι αποδίδει ευκρινώς τη φυσική της εξέλιξης και αποτελεί ένα μικρό βήμα στην κατανόηση του φαινομένου.

4. Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή επικεντρωθήκαμε στη μελέτη και κατασκευή νέων προσεγγιστικών λύσεων της εξίσωσης *Boussinesq* για την περίπτωση του περιορισμένου οριζόντιου υδροφόρου ορίζοντα υπό συνθήκες ομοιόμορφης φόρτισης. Παρουσιάστηκαν δύο απλοποιημένες γραμμικοποιήσεις της εξίσωσης του *Boussinesq* για τον οριζόντιο υδροφορέα, οι οποίες οδηγούν εν μέρη σε επιλύσιμες μορφές και στη συνέχεια αναπτύχθηκε σε λεπτομέρεια μία καινούργια προσέγγιση η οποία διατηρεί τη μη γραμμικότητα της βασικής εξίσωσης σε μεγάλο βαθμό. Από τη σύγκριση των γραμμικών λύσεων με την αριθμητική επίλυση της *Boussinesq* (3.5) γίνεται σαφές ότι η γραμμικοποίηση κατά *Chapman* της (3.10) είναι πολύ ακριβής στην ποσοτική και ποιοτική περιγραφή του φαινομένου σε μικρούς χρόνους ($\tau < 0.4$) οπότε επικρατεί μία τάση γρήγορης αλλαγής του προφίλ, το οποίο εξελίσσεται με μορφή κατά προσέγγιση μεταβλητού τραπεζίου του οποίου το ύψος αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Αντίθετα η δεύτερη γραμμικοποίηση που ταυτίζεται με το quasi-steady approximation είναι πολύ λιγότερο ακριβής, ως αποτέλεσμα της εγγενούς ιδιότητας της ενός προφίλ αμετάβλητου σχήματος. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι και οι δύο γραμμικοποιήσεις προέρχονται από παραδοχή γραμμικότητας στο χώρο όχι όμως και στο χρόνο. Πάντως η πρώτη γραμμικοποίηση δεν προσφέρει επί της ουσίας σημαντική αναγνώσιμη πληροφορία για την εξέλιξη του προβλήματος από τη στιγμή που δεν λύνεται αναλυτικά. Σε μεταγενέστερους χρόνους ($\tau > 0.4$), το προφίλ του νερού στον οριζόντιο υδροφορέα παίρνει ένα σχετικά σταθερό παραβολικό σχήμα (πλησιάζει σε *steady-state*) και σε αυτήν την περίπτωση και οι δύο γραμμικές λύσεις αποδίδουν περίπου ισοδύναμες μικρές διαφοροποιήσεις από τη μη γραμμική, η οποία εξελίσσεται οριοθετημένη (όπως μάλλον θα ήταν και αναμενόμενο) από τις δύο γραμμικές προσεγγίσεις. Σε αυτό το στάδιο οποιαδήποτε έννοια γραμμικότητας στην εξέλιξη με το χρόνο έχει χαθεί. Σε κάθε περίπτωση όμως διαφαίνεται ένας σαφής διαχωρισμός της εξέλιξης του προφίλ σε μικρούς χρόνους, μικρότερους του 0.4, και μεγαλύτερους από το 0.4 χρόνους, συμπέρασμα το οποίο αποτελεί και την κεντρική ιδέα και έμπνευση για μία πιο αποτελεσματική και περιγραφική πρωτότυπη προσέγγιση του προβλήματος με μία νέα πρωτότυπη μέθοδο. Η νέα μέθοδος βασίζεται σε μια εξειδικευμένη εικασία «*ansatz*» του προφίλ του νερού στον υδροφορέα για κάθε φάση του, που αφήνει ορισμένες λειτουργίες του χρόνου ως βαθμούς ελευθερίας για να καθοριστεί έτσι δυναμικά μέσα από τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση η εξέλιξη τους. Οι προκύπτουσες συνθήκες μπορούν να λυθούν με ακρίβεια έτσι που να οδηγούν σε προσεγγιστικές λύσεις οι οποίες είναι σαφείς και απλές. Οι λύσεις των δύο φάσεων σε σύγκριση με τις αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης *Boussinesq* δείχνουν μάλλον πως

συμφωνούν εντυπωσιακά αποδίδοντας ποιοτικά και ποσοτικά τα χαρακτηριστικά της πλήρους εξίσωσης. Η μη γραμμικότητα στην εξέλιξη του προβλήματος έχει και σε χρονικούς και σε χωρικούς όρους και σε κάθε στιγμιότυπο είναι πολύ ακριβέστερη από τις προσεγγιστικές γραμμικές λύσεις. Υπάρχει μία στενή περιοχή μικρής απόκλισης σε χρόνους κοντά στο 0.4, οπότε η λύση αποκλίνει κατά 5% περίπου από τη μη γραμμική αλλά αυτή η απόκλιση ελαχιστοποιείται αργότερα όπως προκύπτει και από το σχήμα 3.6, όπου παρουσιάζεται η σχετική απόκλιση (%) της εξέλιξης του προφίλ σε οριζόντιο υδροφορέα με επαναφόρτιση με βάση τη μεθοδολογία του κεφαλαίου 3.4 σε σχέση με την ακριβή αριθμητική επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης (3.5). Σε κάθε περίπτωση η ξεκάθαρη αναλυτική περιγραφή και η ακρίβεια της προσέγγισης θεωρούμε ότι αποδίδει ευκρινώς τη φυσική της εξέλιξης και αποτελεί ένα μικρό βήμα στην κατανόηση του φαινομένου.

5. Βιβλιογραφία

1. Bear, J. (1979). “Hydraulics of Groundwater”, McGraw – Hill Series, Water Res. and Environmental Engineering, Νέα Υόρκη.
2. Beven, K. (1981). “Kinematic subsurface stormflow”, Water Resour., 17(5), 1419-1424.
3. Boussinesq J. (1877). “Essai sur la theorie des eaux courantes du mouvement nonpermanent des eaux souterraines” Acad. Sci. Inst. Fr. 23, 252–260.
4. Boussinesq, J. (1904). “Recherches Theoriques sur l’ ecoulement des nappes d’ eau infiltrées’ dans le sol et sur le debit des sources”, Journal of Applied Mathematics, Έκδοση 10, 5-58.
5. Cech, V. T. (2010). “Principles of Water Resources. History, Development, Management and Policy”, Third Edition, Lehigh Phoenix, Aquifers, 119-134.
6. Chapman, T. (1995). Σχόλιο στο “The unit response of groundwater out-flow form a hillslope” από Wilfried Brutsaert, Water Resources, 31(9), 2377-2378
7. Darcy, H. (1856). “Les fontaines publiques de la ville de Dijon”, Dunod Publications, Paris.
8. Dingman, S. (1994). “Physical Hydrology”, Macmillan Publishing Company, New York.
9. Dupuit, J. (1863). “Etudes Theoriques et Pratiques sur le Mouvement de Eaux”, Έκδοση 2, Dunod Publications, Paris.
10. Forchheimer, P. (1886). “Über die Ergiebigkeit von Brunnenanlagen und Sickerschlitten”, Journal Architects and Engineers, Έκδοση 2, 7, 539-564.
11. Henderson FM., Wooding RA. (1964). “Overland flow and groundwater flow from a steady rainfall of finite duration”, Journal Geophysics Res., 69(8), 1531-1540.
12. Koutsogiannis, D., Xanthopoulos, T. (1999). “Τεχνική Υδρολογία”, Έκδοση 3η, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 353-355
13. Lambrakis, N., Petalas, C., Diamantis, G., Kallergis, G. (1999). “Υδρογεωλογικές συνθήκες και ποιότητα των νερών των ηφαιστειακών πετρωμάτων της ευρύτερης περιοχής Σαππών, Θράκης”. Πρακτικά 5ου Υδρογεωλογικού Συνεδρίου, 205-216.
14. Nanou-Giannarou, A. (2006) “Εισαγωγή στα Υπόγεια Νερά”, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
15. Soulios, G., (1996). “Γενική Υδρογεωλογία Α’ Τόμος”, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 5-98.

16. Varvaris, I., Gravanis, E., Koussis, A., Akylas, E. (2013). “Nonlinear storage models of unconfined flow through a shallow aquifer on an inclined base and their quasi-steady flow application”, European Geosciences Union, General Assembly 2013, Austria.
17. Vasilakopoulos, G. (2010). “Μαθηματική προσομοίωση και αριθμητική επίλυση της ροής του υπόγειου νερού σε ελεύθερο υδροφορέα που υπόκειται σε σύγχρονη επίδραση αντλήσεων και επαναφόρτισης”, MSc Thesis, Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Αξιοποίησης Φυσικών Πόρων και Γεωργικής Μηχανικής, 19-20
18. Wiener, A. (1972). “The role of water in development”, Mc Graw – Hill, Νέα Υόρκη.