ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΣΩΝ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗΣ

Μεταπτυχιακή Διατριβή

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ, ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΙΔΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ

Βιργινία Τριλλίδου

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δρ. Ελένη Κύζα

Λεμεσός, 2020

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΣΩΝ ΕΝΗΜΕΡΩΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟΥ

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ, ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΙΔΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ

της

Βιργινίας Τριλλίδου

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Δρ. Ελένη Κύζα

Λεμεσός, 2020

Πνευματικά δικαιώματα

Η έγκριση της μεταπτυχιακής διατριβής από το Τμήμα Επικοινωνίας και Σπουδών Διαδικτύου του Τεχνολογικού Πανεπιστημίου Κύπρου δεν υποδηλώνει απαραιτήτως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Τμήματος.

Η εκπόνηση της διατριβής αυτής πραγματοποιήθηκε με την υποστήριξη και βοήθεια κάποιων σημαντικών ανθρώπων.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσά μου Δρ. Ελένη Κύζα για το συνεχές ενδιαφέρον και την εποικοδομητική κριτική της, καθώς και για τη συμβολή της στην ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών, οι οποίες υπήρξαν για μένα πολύτιμη μαθησιακή εμπειρία.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω στο διευθυντή και στο προσωπικό της ισπανικής εταιρείας Smile and Learn (εκπαιδευτικούς, προγραμματιστές, εικονογράφους, ηχολήπτες, μεταφραστές). Η δημιουργία των δύο ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων στα οποία αναφέρεται η παρούσα διατριβή είναι το αποτέλεσμα ομαδικής δουλειάς και πολύμηνης συνεργασίας. Χωρίς την ουσιαστική βοήθεια τους δεν θα μπορούσα να την ολοκληρώσω.

Παράλληλα, ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω σε συναδέλφους – εκπαιδευτικούς, οι οποίοι συνέβαλαν σε μεγάλο βαθμό κατά τη διάρκεια της ερευνητικής μου προσπάθειας. Συγκεκριμένα ευχαριστώ τους εκπαιδευτικούς Μαρίνα Αυγουστή, Νικολέττα Ταλιαδώρου και Στέλιο Σάββα για την πολύτιμη συνεισφορά τους και την αμέριστη στήριξή τους.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ οφείλω στους πρωταγωνιστές της έρευνας, τους μικρούς μαθητές, οι οποίοι με τον ενθουσιασμό τους, την ενέργεια τους και τη δίψα τους για μάθηση, μου παρείχαν ουσιαστική και άμεση ανατροφοδότηση στην προσπάθεια μου αυτή.

Περίληψη

Η ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού θεωρείται αναγκαία για τη μελλοντική εξέλιξη των μαθητών. Ωστόσο, από έρευνες που έχουν γίνει φαίνεται ότι αρκετοί μαθητές συναντούν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων και καταστάσεων όπου χρειάζεται να εφαρμοστεί ο συγκεκριμένος συλλογισμός.

Επομένως, σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια δύο ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια για ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Στόχος της παρούσας έρευνας ήταν η εφαρμογή και η αξιολόγηση αυτών των δύο εφαρμογιδίων, τα οποία δοκιμάστηκαν σε μαθητές Δ' τάξης δημοτικού μέσω οθονών αφής (tablets), μία οθόνη αφής ανά μαθητή.

Το 1ο εφαρμογίδιο ονομάζεται *ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ* και συγκαταλέγεται στην κατηγορία της σύγκρισης προβλημάτων. Το 2ο εφαρμογίδιο ονομάζεται *ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ* και συγκαταλέγεται στην κατηγορία των προβλημάτων άγνωστης αξίας.

Διεξήχθη ημι-πειραματικός σχεδιασμός με συμμετέχοντες 42 μαθητές οργανωμένους σε δύο συνθήκες. Οι 22 μαθητές της Α' συνθήκης διδάχθηκαν το συγκεκριμένο θέμα μέσω των δύο εφαρμογιδίων, ενώ οι 20 μαθητές της Β' συνθήκης εκπαιδεύτηκαν μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με προ-διαγνωστικά και μετα-διαγνωστικά δοκίμια, καθώς και με την πραγματοποίηση συνεντεύξεων με όλους τους μαθητές της Α' συνθήκης, προ και μετά παρέμβασης.

Τα αποτελέσματα έδειξαν πως τα δύο εφαρμογίδια βοήθησαν τους μαθητές να αναπτύξουν συγκεκριμένες δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Το εφαρμογίδιο *ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ* είχε θετική επίδραση στη μαθησιακή επίδοση των μαθητών με στατιστικά σημαντική διαφορά σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Το εφαρμογίδιο *ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ* αν και βοήθησε στην ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, ωστόσο η διαφορά εκεί δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Χρειάζεται να γίνουν κάποιες τροποποιήσεις για βελτίωση αυτού του εφαρμογιδίου.

Η μελέτη αυτή αποτελεί μια αρχική προσπάθεια διδασκαλίας του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω ενός εναλλακτικού και πιο σύγχρονου τρόπου διδασκαλίας, όπως είναι τα ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια.

Λέξεις κλειδιά: ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια, μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός, προβλήματα σύγκρισης, προβλήματα άγνωστης αξίας

Abstract

The development of proportional reasoning is considered necessary for the future development of students. However, research shows that several students lack proportional reasoning skills and have difficulty in solving problems and situations where that reasoning needs to be applied.

For this reason, two digital educational applications (apps) were designed by the researcher for the development of proportional reasoning skills. The aim of the present study was the application and evaluation of these two apps, which were tested with 4th grade students via tablets, one tablet per student during mathematics lessons at school.

The first app is called *COMPARISON OF QUANTITIES* and it belongs to the category of comparison mathematical problems. The second app is called *PROPORTIONS* and it belongs to the category of missing value problems.

A semi-experimental design was conducted with 42 participating students organized in two research conditions. The 22 students of condition A' were taught proportional reasoning through the two apps, while the 20 students of condition B' were trained through traditional teaching. The data were collected through pre- and post-tests, but also through interviews with all the students of condition A' (apps), before and after the intervention.

The results showed that the two apps helped students develop specific skills of proportional reasoning. The app *COMPARISON OF QUANTITIES* had a positive effect on the learning performance of students with a statistically significant difference as compared to traditional teaching. The app *PROPORTIONS*, although it helped students develop proportional reasoning skills, did not lead to statistically significant differences between the two conditions. So, some modifications are needed for the improvement of that app.

This study constitutes an initial attempt to teach proportional reasoning through an alternative and more modern way of teaching such as the use of a technological mean, in this case digital educational apps.

Keywords: digital educational apps, proportional reasoning, comparison problems, missing value problems

Πίνακας περιεχομένων

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Διαγραμμάτων

1. Εισαγωγή

Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός περιγράφεται ως μια από τις πιο συχνά εφαρμοζόμενες μαθηματικές έννοιες στον πραγματικό κόσμο (Lanius & Williams, 2003). Ωστόσο, έρευνες δείχνουν ότι αρκετοί μαθητές εμφανίζουν χαμηλές δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Lamon, 2007; Clark, 2008; Rick et al., 2012). Η ανάπτυξή του αποτελεί μια από τις πιο δύσκολες πτυχές της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Θεωρείται ως θεμελιώδης ακρογωνιαίος λίθος των μαθηματικών (Lesh et al., 1988) και αφορά μια πλούσια εννοιολογική κατανόηση η οποία αποτελεί βάση για τις έννοιες λόγου – αναλογίας (Karplus et al., 1983). Η έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού αντιπροσωπεύει «ένα σημαντικό συνδετικό κρίκο που συνδέει πολλά μαθηματικά θέματα» (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM, 2000, σελ. 217), όπως είναι η αξία θέσης ψηφίου, οι δεκαδικοί αριθμοί, τα ισοδύναμα κλάσματα, τα ποσοστά, οι λόγοι, οι μετρήσεις, η άλγεβρα, η γεωμετρία, οι πιθανότητες (Norton, 2005). Είναι ένας σημαντικός μηχανισμός της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου.

Ο συγκεκριμένος συλλογισμός αποτελεί μια σύνθετη δεξιότητα η οποία περιλαμβάνει την ικανότητα κριτικής σκέψης σε καταστάσεις αναλογίας, την εξεύρεση ισότητας-ανισότητας, τη δημιουργία γραφημάτων και πινάκων καθώς και τη χρήση λόγων-αναλογιών ως προς τη σύγκριση ποσοτήτων (NCTM, 1989). Σε γενικές γραμμές είναι η ικανότητα κατανόησης καταστάσεων σύγκρισης. Συγκεκριμένα, οι μαθητές χρειάζεται να κατανοήσουν και να χρησιμοποιούν λόγους και αναλογίες για να μπορούν να αναπαριστούν και να επεξηγούν ποσοτικές σχέσεις (NCTM, 2000), αλλά και να αναλύουν αναλογικές σχέσεις για να επιλύσουν τόσο μαθηματικά όσο και πραγματικά προβλήματα (Common Core State Standards for Mathematics, 2010). Ο συλλογισμός αυτός αποτελεί βάση για τη μελλοντική ανάπτυξη αλγεβρικού συλλογισμού και οι μαθητές που αποτυγχάνουν να τον αναπτύξουν είναι πιθανόν να δυσκολευτούν μετέπειτα στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών υψηλού επιπέδου, ιδιαίτερα στην άλγεβρα (Langrall & Swafford, 2000).

Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός κατέχει σημαντικό ρόλο όχι μόνο στο μάθημα των μαθηματικών, αλλά και στην κατανόηση βασικών επιστημονικών εννοιών όπως η ερμηνεία της πυκνότητας, ο υπολογισμός της ταχύτητας, η αντίληψη της θερμοκρασίας (Dole, 2010; Van Dooren et al., 2005). Είναι απαραίτητος και σε άλλα γνωστικά αντικείμενα όπως η φυσική, η γεωγραφία, γενικά οι φυσικές επιστήμες αλλά και σε δραστηριότητες της καθημερινής ζωής (Lamon, 2005). Πρόκειται για μια διαδικασία η οποία έχει εφαρμογές σε πολλές εκφάνσεις της καθημερινής ζωής και συνδέεται με καθημερινές ανάγκες που αποτελούν πραγματικά προβλήματα και χρειάζονται άμεση επίλυση. Οι άνθρωποι χρησιμοποιούν ασυνείδητα μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό κατά τη διεξαγωγή καθημερινών συναλλαγών όπως η λήψη αποφάσεων σχετικά με την καλύτερη αγορά κάποιου προϊόντος, την εύρεση της πιο συμφέρουσας τιμής ανάμεσα σε δύο ή και περισσότερες προσφορές, την εκτέλεση μαγειρικών συνταγών και την ανάμειξη υλικών, την ερμηνεία κλίμακας και γεωγραφικού χάρτη, την μετατροπή νομισμάτων, την σμίκρυνση ή μεγέθυνση διάφορων μεγεθών, τον καθορισμό των πιθανοτήτων για διάφορα θέματα, κ.ά. (Tourniaire & Pulos, 1985; Dole, 2010).

Η σημασία της ανάπτυξης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού τονίζεται και σε διεθνείς έρευνες όπως είναι η έρευνα Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) του Διεθνούς Οργανισμού για την Αξιολόγηση των Εκπαιδευτικών Επιτευγμάτων (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement), καθώς και το διεθνές πρόγραμμα Programme for International Student Assessment (PISA) που υλοποιείται από διεθνή ερευνητικά ιδρύματα (PISA Consortium) υπό την οργάνωση της Διεύθυνσης Εκπαίδευσης του ΟΟΣΑ (Οργανισμός για την Οικονομική Συνεργασία και Ανάπτυξη) και τη συνεργασία των συμμετεχουσών χωρών στην έρευνα. Αυτές οι δύο μεγάλης κλίμακας έρευνες θεωρούν την κατανόηση λόγων, αναλογιών και την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ως ορόσημο στην καλλιέργεια μαθηματικής επάρκειας στους μαθητές. Στις έρευνες αυτές οι μαθητές χρειάζεται να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους και να αναστοχαστούν πάνω σε ποικίλα θέματα που αφορούν αισθητοποίηση αριθμών, κλάσματα, δεκαδικούς αριθμούς, εξισώσεις και μαθηματικές σχέσεις, έννοιες που διασυνδέονται με τον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό. Επομένως, η ανάπτυξη του συγκεκριμένου συλλογισμού διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών και είναι μια σημαντική έννοια στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Lesh et al., 1988).

Για όλους τους πιο πάνω λόγους υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον από την ερευνητική κοινότητα ως προς τη διερεύνηση της κατανόησης της έννοιας της αναλογίας και την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού στους μαθητές. Αποτελεί σημαντική πτυχή των μαθηματικών, ωστόσο αρκετοί μαθητές δεν κατορθώνουν να αναπτύξουν και να καλλιεργήσουν τον συγκεκριμένο συλλογισμό (Clark, 2008; Rick et al., 2012). Παρά τη μεγάλη σημασία που δίνεται τα τελευταία χρόνια για τη διδασκαλία λόγων – αναλογιών και του σημαντικού διδακτικού χρόνου που αφιερώνεται στις έννοιες αυτές, αρκετές έρευνες αναφέρουν δυσκολίες των μαθητών σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης και χαμηλή επίδοση στην κατανόηση αναλογικών σχέσεων (Modestou & Gagatsis, 2007; Clark, 2008). Πιο πρόσφατος προσανατολισμός στην έρευνα του συγκεκριμένου θέματος αποτελεί η προσθήκη κάποιας τεχνολογικής υποστήριξης και η μελέτη του τρόπου συνεισφοράς της ως προς τη βαθύτερη ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Rick, 2012; Rick et al., 2015; Schmitt & Weinberger, 2019).

Επομένως, σκοπός της παρούσας ερευνητικής μελέτης ήταν η διερεύνηση της επίδρασης της τεχνολογίας στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα σχεδιάστηκαν από την ερευνήτρια δύο ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια (apps) σε σχέση με το υπό διερεύνηση θέμα, τα οποία στη συνέχεια αναπτύχθηκαν από προγραμματιστές της εταιρείας Smile and Learn (https://smileandlearn.com).

Στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό υπάρχουν δύο τύποι αναλογικών σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων: αναλογίες με ευθέως ανάλογα ποσά (directs proportions) και αναλογίες με αντιστρόφως ανάλογα ποσά (inverse proportions). Η παρούσα μελέτη ασχολήθηκε μόνο με την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε αναλογίες με ευθέως ανάλογα ποσά.

Στην έρευνα για την εφαρμογή και αξιολόγηση των εφαρμογιδίων συμμετείχαν μαθητές της Δ’ τάξης, καθώς η ανάπτυξη και καλλιέργεια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού με βάση το κυπριακό αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών ξεκινά στοχευμένα στην Δ’ τάξη δημοτικού (ΥΠΠΑΝ, 2016).

Στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας παρουσιάζεται αρχικά το θεωρητικό πλαίσιο του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και τα βασικά στοιχεία που περιλαμβάνονται στην έννοια αυτή. Στη συνέχεια αναφέρονται διάφορες έρευνες που εντοπίστηκαν κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση να διερευνούν το συγκεκριμένο θέμα, με και χωρίς τεχνολογία. Ακολούθως, γίνεται περιγραφή των δύο εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων που σχεδιάστηκαν και δοκιμάστηκαν. Μετέπειτα παρουσιάζεται η έρευνα και η μεθοδολογία που εφαρμόστηκε. Στο τέλος καταγράφονται τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα που βγήκαν από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε.

2. Θεωρητικό πλαίσιο

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται πιο αναλυτικά ο ορισμός του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και διάφορα στοιχεία που εμπίπτουν στην έννοιά του (αναπτυξιακά επίπεδα, συστατικά στοιχεία που βοηθούν στην ανάπτυξη του συγκεκριμένου συλλογισμού, κατηγορίες προβλημάτων και στρατηγικές επίλυσης). Παράλληλα, περιγράφεται ο τρόπος ανάπτυξής του στο δημοτικό σχολείο κατά το αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών και αναφέρονται δυσκολίες που σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Οι δυσκολίες αυτές οδήγησαν στη δημιουργία δύο εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων για ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Συνεπώς το κεφάλαιο κλείνει με τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας ερευνητικής εργασίας και την αναγκαιότητα της έρευνας.

2.1 Ορισμός μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού

Υπάρχουν διάφοροι τύποι μαθηματικών συλλογισμών κι ένας από αυτούς είναι ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός. Πολλοί ερευνητές έχουν επιχειρήσει να τον ορίσουν, οπότε στη βιβλιογραφία εντοπίζονται αρκετοί ορισμοί του. Δεν υπάρχει όμως ένας καθολικός ορισμός ή κάποιο πλαίσιο που να καθορίζει τις θεμελιώδεις έννοιες που αποτελούν τον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό.

Αρχικά χρειάζεται να γίνει μια διάκριση ανάμεσα στους όρους αναλογικός συλλογισμός και μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός. Ο όρος αναλογικός συλλογισμός χρησιμοποιείται στη θέση του αγγλικού όρου ‘‘analogical reasoning’’ που έχει ψυχολογικές διαστάσεις και περιλαμβάνει τη μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο σύστημα (στόχος). Τα δύο αυτά συστήματα μπορεί να είναι έννοιες, θεωρίες ή και προβληματικές καταστάσεις και η μεταφορά πληροφοριών πραγματοποιείται με την εύρεση κάποιας αντιστοιχίας ανάμεσά τους (Vosniadou, 1989).

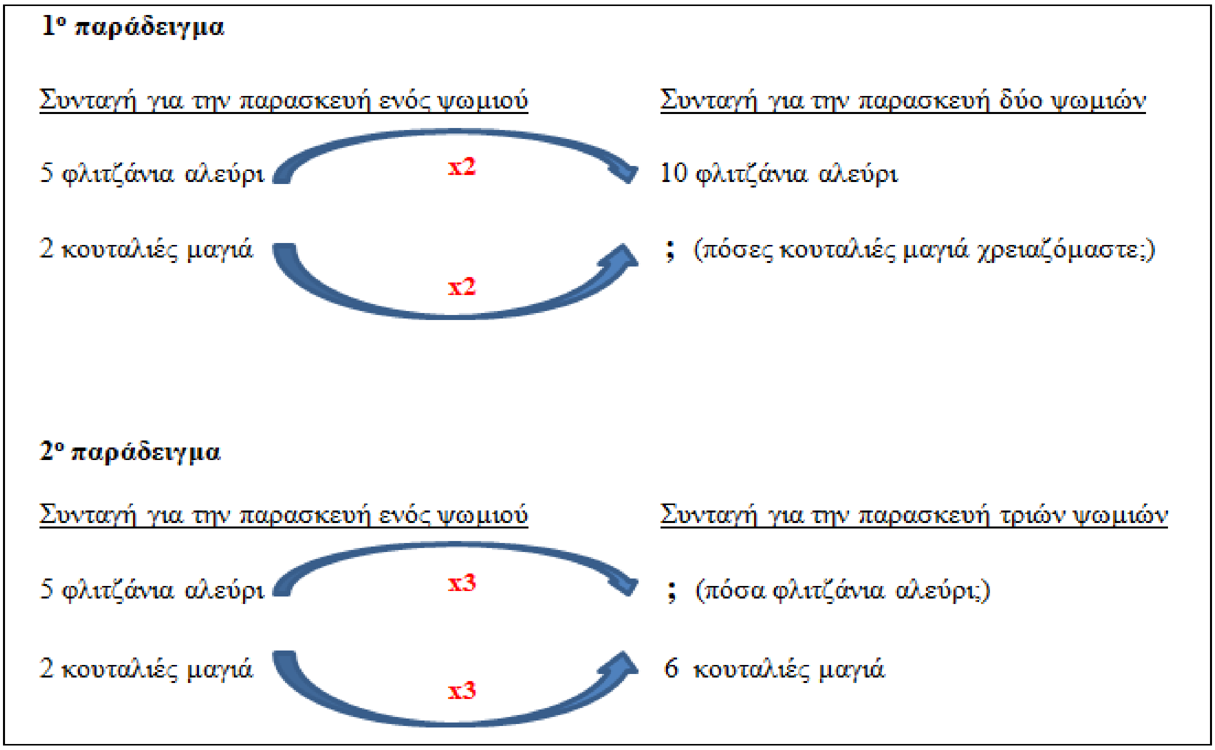
Αντίθετα, ο όρος μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός χρησιμοποιείται στη θέση του αγγλικού όρου ‘‘proportional reasoning’’. Πρόκειται για μια μορφή μαθηματικού συλλογισμού που περιλαμβάνει μια αίσθηση συν-μεταβολής, δηλαδή την παράλληλη αλλαγή δύο τυχαίων μεταβλητών καθώς και πολλαπλές συγκρίσεις μεταξύ τους (Lesh et al., 1988).

Κατά τη Lamon (2007) ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός αναφέρεται στην ανίχνευση, ανάλυση, επεξήγηση, αιτιολόγηση και παροχή αποδείξεων σχετικά με τη δομή της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα σε ποσότητες που συνυπάρχουν εντός ενός πλαισίου. Ταυτόχρονα περιλαμβάνει την ικανότητα κάποιου να διακρίνει την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ αυτών των ποσοτήτων αλλά και να επεκτείνει τη σχέση αυτή σε άλλα ζευγάρια ποσοτήτων.

Είναι μια νοητική δραστηριότητα – διεργασία που βοηθάει το άτομο να κατανοήσει τη σχέση της αλλαγής μιας ποσότητας σε μια άλλη ποσότητα μέσω πολλαπλασιαστικής σχέσης (Lamon, 2012). Οι ποσότητες που περιλαμβάνονται σε κάθε μαθηματική αναλογική σχέση μεταβάλλονται πολλαπλασιαστικά. Δηλαδή, πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο παράγοντα. Στο Διάγραμμα 1 παρουσιάζονται δύο παραδείγματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε προβλήματα άγνωστης αξίας (δίνονται τρεις μαθηματικές τιμές και απουσιάζει μία, την οποία καλούμαστε να υπολογίσουμε παρατηρώντας τη σχέση μεταξύ των ζευγαριών ποσοτήτων).

Διάγραμμα 1

Παραδείγματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού



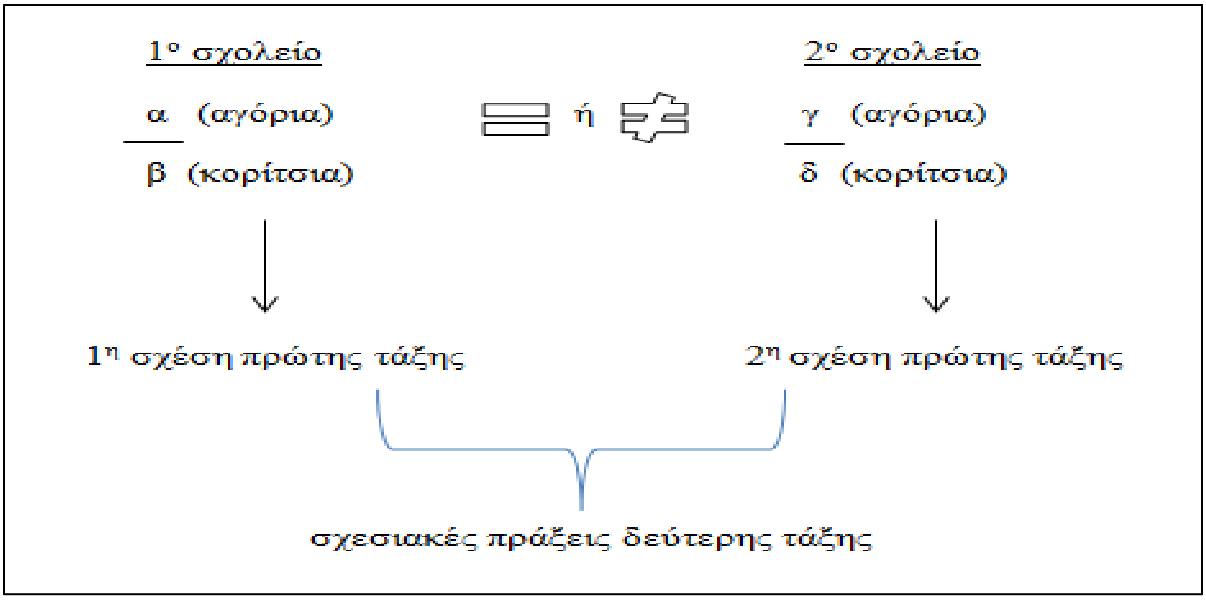
Όπως φαίνεται στο πιο πάνω διάγραμμα υπάρχει μια πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των ποσοτήτων και στα δύο παραδείγματα που δίνονται. Στο πρώτο παράδειγμα παρατηρείται ότι η ποσότητα του αλευριού έχει διπλασιαστεί, άρα για να δημιουργηθεί μια αναλογική σχέση θα πρέπει να διπλασιαστεί και η ποσότητα της μαγιάς. Αντίστοιχα, στο δεύτερο παράδειγμα παρατηρείται ότι η ποσότητα της μαγιάς έχει αρχικά τριπλασιαστεί. Συνεπώς, θα πρέπει να τριπλασιαστεί και η ποσότητα του αλευριού. Και στα δύο παραδείγματα χρειάζεται να αναλυθεί η σχέση μεταξύ των ποσοτήτων, να εντοπιστεί και να δικαιολογηθεί η πολλαπλασιαστική τους σχέση καθώς και να επεκταθεί αυτή η σχέση και σε άλλες ποσότητες, στοιχεία που εμπίπτουν στον ορισμό του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Σύμφωνα με τον Vergnaud (1983) ο μαθηματικός αναλογικός συλλογικός συγκαταλέγεται μέσα στο ευρύτερο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο (Multiplicative Conceptual Field-MCF) και αναφέρεται στην ικανότητα κατανόησης, κατασκευής και χρήσης της πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ δύο χώρων μέτρησης που μεταβάλλονται ταυτόχρονα (Van Dooren et al., 2018). Ένας χώρος μέτρησης αποτελείται από όλες τις ποσότητες που μετρούν ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης (Vergnaud, 1983). Οι ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε όταν η μία αλλάζει, τότε αλλάζει και η άλλη με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός περιλαμβάνει τη διαδικασία εντοπισμού και υπολογισμού των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων. Οι Piaget και Inhelder (1958) – όπως αναφέρεται στους He et al. (2018) – το ονόμασαν κατανόηση της «σχέσης που υπάρχει ανάμεσα σε δύο σχέσεις». Υποστηρίζουν ότι κατά τον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό αναπτύσσονται δύο είδη σχέσεων. Οι σχέσεις αυτές μπορεί να είναι σχέσεις κατώτερης τάξης (πρώτης τάξης), οι οποίες είναι συσχετισμοί που διατηρούνται μέσα στην ίδια εννοιολογική κατηγορία, ή σχέσεις ανώτερης τάξης (δεύτερης τάξης), οι οποίες απαιτούν από το άτομο να συσχετίσει εννοιολογικά δυο διαφορετικές κατηγορίες. Στο Διάγραμμα 2 παρουσιάζονται πιο αναλυτικά οι σχέσεις πρώτης και δεύτερης τάξης.

Διάγραμμα 2

Σχέση πρώτης τάξης – Σχέση δεύτερης τάξης



Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2, πρέπει πρώτα να ληφθεί υπόψη μια σχέση πρώτης τάξης μεταξύ του όρου «α» και του όρου «β» (ο αριθμός των αγοριών που σχετίζονται με τον αριθμό των κοριτσιών σε ένα συγκεκριμένο σχολείο) και στη συνέχεια μια δεύτερη σχέση πρώτης τάξης μεταξύ του όρου «γ» και του όρου «δ» (η ίδια σχέση σε ένα άλλο σχολείο), έτσι ώστε να είναι σε θέση το άτομο να δημιουργήσει μια σχέση δεύτερης τάξης μεταξύ των δύο προηγούμενων σχέσεων πρώτης τάξης που θα του επιτρέψει να εξακριβώσει αν αυτές οι προηγούμενες σχέσεις πρώτης τάξης είναι ανάλογες ($α/β = γ/δ$) ή όχι (Falcão & Hazin, 2012). Η σχέση μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή σε ένα λόγο αντιπροσωπεύει σχέση πρώτης τάξης. Η σύγκριση των σχέσεων ανάμεσα και σε άλλους λόγους αποτελεί αναστοχασμό για σχέσεις δεύτερης τάξης και οδηγεί στην ανάπτυξη της έννοιας της αναλογικότητας (Spinillo & Bryant, 1991).

Σε γενικές γραμμές ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός είναι η ικανότητα κάποιου να κάνει συγκρίσεις μεταξύ ποσοτήτων/μεγεθών σε καταστάσεις αναλογίας, αναγνωρίζοντας τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους και χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστικούς όρους.

2.2 Αναπτυξιακά επίπεδα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού

Αρκετοί ερευνητές μαθηματικής παιδείας καθώς και αναπτυξιακοί ψυχολόγοι ασχολήθηκαν με τον μαθηματικό αναλογικό αναλογισμό και διερεύνησαν τον τρόπο που αναπτύσσεται σε μαθητές. Από τους πρώτους ερευνητές αυτού του θέματος υπήρξαν οι Piaget και Inhelder (1958). Σύμφωνα με αυτούς – όπως αναφέρεται στους Lesh και Harel (2003) – υπάρχουν τέσσερα στάδια ανάπτυξης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού: λειτουργικό στάδιο (concrete operational), προσθετικό (additive), προ-αναλογικό (pre-proportional) και αναλογικό στάδιο (proportional). Στο λειτουργικό στάδιο, ο συλλογισμός των μαθητών τείνει να περιλαμβάνει ποιοτικές συγκρίσεις (π.χ. Α>Β). Στο προσθετικό στάδιο, οι μαθητές επικεντρώνονται στις προσθετικές διαφορές μεταξύ των ποσοτήτων (π.χ. Α-Β = Γ-Δ). Στο παράδειγμα αυτό η διαφορά μεταξύ Α και Β συγκρίνεται με τη διαφορά Γ και Δ. Στο προ-αναλογικό στάδιο συλλογισμού, οι μαθητές σκέφτονται για τις αναλογίες, παρατηρώντας και αναπαράγοντας ένα μοτίβο ή μια σχέση μεταξύ των ποσοτήτων (π.χ. δύο σοκολάτες για ένα ευρώ, άρα τέσσερις σοκολάτες για δύο ευρώ). Στο αναλογικό στάδιο οι μαθητές αναστοχάζονται ως προς τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (π.χ. Α/Β = Γ/Δ). Δηλαδή κατανοούν και αντιλαμβάνονται μια σχέση δεύτερης τάξης μεταξύ δύο σχέσεων και θεωρούν τις σχέσεις πρώτης τάξης πολλαπλασιαστικές (Lesh & Harel, 2003).

Σε μεταγενέστερο στάδιο, οι Langrall και Swafford (2000) καθόρισαν διαφορετικά τα επίπεδα ανάπτυξης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού:

Επίπεδο 0 (απουσία μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού): οι μαθητές αδυνατούν να αναγνωρίσουν αναλογικές καταστάσεις και πολλαπλασιαστικές σχέσεις, δεν μπορούν να ενώσουν τις δύο ποσότητες, πραγματοποιούν αβάσιμες προβλέψεις, προβαίνουν σε συγκρίσεις που στηρίζονται σε προσθετική σχέση παρά σε πολλαπλασιαστική ή χρησιμοποιούν τυχαία αριθμούς και πράξεις στα προβλήματα.

Επίπεδο 1 (άτυπος μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός): οι μαθητές σκέφτονται παραγωγικά για τα προβλήματα, παρατηρούν την αναλογία, χρησιμοποιούν διαισθητικές στρατηγικές, κάνουν ποιοτικές συγκρίσεις και χρησιμοποιούν εικόνες, μοντέλα ή στερεά υλικά για να κατανοήσουν την αναλογική κατάσταση.

Επίπεδο 2 (ποσοτικός μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός): οι μαθητές εδώ χρησιμοποιούν ποσοτικό αναστοχασμό χωρίς αντικείμενα ή άλλα βοηθητικά στοιχεία, εντοπίζουν και χρησιμοποιούν λόγους, αναγνωρίζουν ισοδύναμα κλάσματα, εντοπίζουν και χρησιμοποιούν την πολλαπλασιαστική αλλαγή, αυξάνουν/μειώνουν και τις δύο ποσότητες κατά τον ίδιο αριθμό, κατανοούν τις αμετάβλητες σχέσεις αλλά και τις σχέσεις που αλλάζουν μαζί. Είναι σε θέση να αιτιολογήσουν ποσοτικά και να συνδέσουν τις ποσότητες με αριθμητικούς υπολογισμούς.

Επίπεδο 3 (επίσημος μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός): οι μαθητές σε αυτό το στάδιο δημιουργούν αναλογία χρησιμοποιώντας μεταβλητές, επιλύουν προβλήματα αναλογίας με τη μέθοδο «χιαστή» (ή αλλιώς μέθοδος του εσωτερικού γινομένου) ή μέσω των ισοδύναμων κλασμάτων, έχοντας πλήρη κατανόηση των δομικών σχέσεων που υπάρχουν. Παράλληλα, χρησιμοποιούν σωστό μαθηματικό λεξιλόγιο κατά το συλλογισμό τους σχετικό με καταστάσεις αναλογίας.

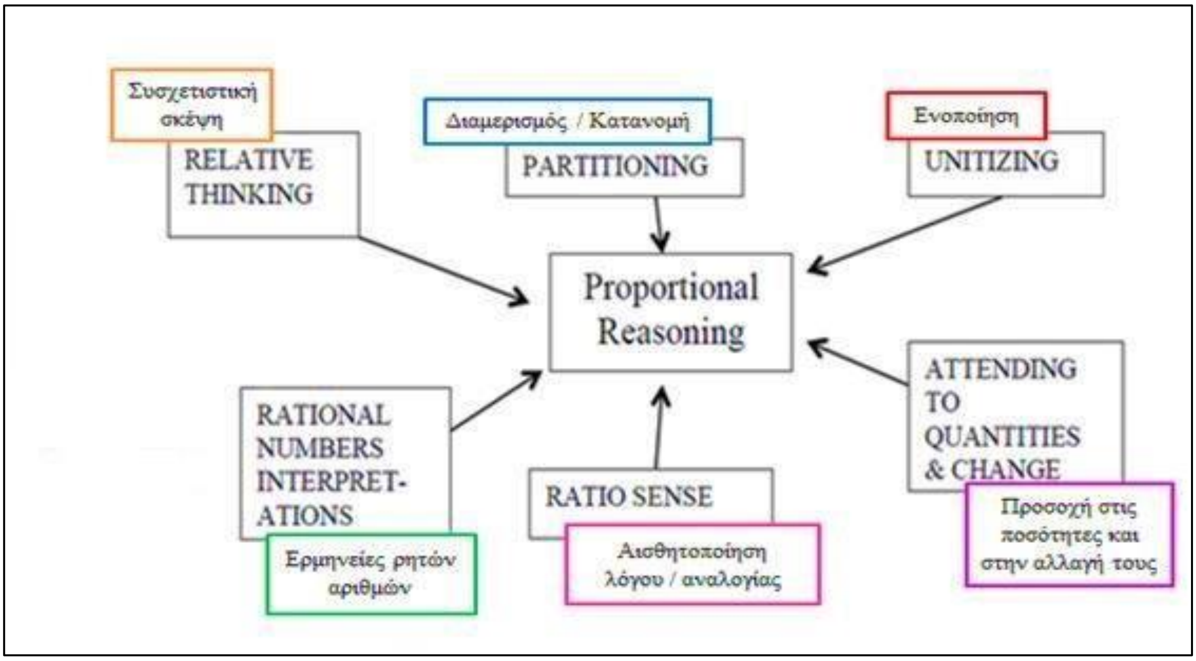
Τα πιο πάνω επίπεδα ανάπτυξης ισχύουν για μαθητές ηλικίας 10 – 15 ετών, ηλικίες δηλαδή όπου οι μαθητές ξεκινούν να εκπαιδεύονται συστηματικά σε δεξιότητες ανάπτυξης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και επίλυσης προβλημάτων αναλογίας.

2.3 Συστατικά στοιχεία μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού

Κατά τη Lamon (1999, 2005) υπάρχουν έξι ενότητες μαθηματικού περιεχομένου που συνεισφέρουν στην ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού: συσχετιστική σκέψη (relative thinking), διαμερισμός/κατανομή (partition), ενοποίηση (unitizing), ερμηνείες ρητών αριθμών (rational number interpretations), αισθητοποίηση λόγου/αναλογίας (ratio sense), προσοχή στις ποσότητες και στην αλλαγή τους (attention to quantities and change). Ουσιαστικά πρόκειται για δεξιότητες που βοηθούν στην ολόπλευρη ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 3.

Διάγραμμα 3

Συστατικά στοιχεία μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού



Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers (*1st edition).

1. **Συσχετιστική σκέψη (relative thinking):** Ένας από τους πιο σημαντικούς τύπους σκέψης που απαιτούνται για τον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό είναι η συσχετιστική ή αλλιώς πολλαπλασιαστική σκέψη. Πρόκειται για μια γνωστική λειτουργία που περιγράφει την ικανότητα ανάλυσης της αλλαγής των ποσοτήτων με συσχετιστικούς όρους. Αυτή η ικανότητα απαιτεί από τους μαθητές να αναγνωρίζουν τη διαφορά μεταξύ απόλυτης ή προσθετικής αλλαγής (το πραγματικό ποσό της αλλαγής ανεξάρτητο και άσχετο με κάτι άλλο) με τη συσχετιστική ή πολλαπλασιαστική αλλαγή (πόσο κάτι άλλαξε σε σχέση με κάτι άλλο) (Lamon, 1999).

Ένα παράδειγμα μεταξύ απόλυτης και συσχετιστικής αλλαγής είναι το ακόλουθο πρόβλημα σύγκρισης: Έχουμε δύο φυτά, εκ των οποίων το ένα φυτό έχει ύψος 5 εκατοστά και το άλλο φυτό 7 εκατοστά. Τα δύο αυτά φυτά ψηλώνουν 10 και 12 εκατοστά αντίστοιχα. Πόσο ψήλωσαν; Σε απόλυτους όρους και τα δύο φυτά ψήλωσαν το ίδιο ποσό. Καθένα είναι ψηλότερο κατά 5 εκατοστά. Ωστόσο, σε συσχετιστικούς όρους, το πρώτο φυτό έχει ψηλώσει κατά δύο φορές (έχει διπλασιαστεί), ενώ το δεύτερο έχει ψηλώσει μόνο κατά 1 και 2/3. Η συσχετιστική αλλαγή είναι πολύ μεγαλύτερη για το πρώτο φυτό, οπότε το πρώτο φυτό έχει ψηλώσει περισσότερο.

2. **Διαμερισμός (partitioning):** Είναι η διαδικασία διαίρεσης ενός αντικειμένου ή αντικειμένων σε έναν αριθμό αποσπασμένων τμημάτων. Ο διαμερισμός είναι σημαντικός για την εννοιολογική κατανόηση των ρητών αριθμών. Τα κλάσματα και οι δεκαδικοί αριθμοί σχηματίζονται μέσω του διαμερισμού. Είναι απαραίτητος για την κατανόηση της έννοιας του πηλίκου, αλλά και για την κατανόηση της αναλογίας (πόση αλλαγή σε μια ποσότητα συγκριτικά με την αλλαγή μιας μονάδας σε μια άλλη ποσότητα) (Lamon, 1999).

3. **Ενοποίηση (unitizing):** Ένα άλλο συστατικό στοιχείο για την ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι η καλλιέργεια της ικανότητας των μαθητών να οικοδομούν σύνθετες δομές μονάδας. Αυτή η ικανότητα ονομάζεται ενοποίηση (Langrall & Swafford, 2000). Είναι μια γνωστική διαδικασία αναδιάρθρωσης μιας δεδομένης ποσότητας σε κατάλληλα μεγέθη και εμφανίζεται μετά την αναγνώριση της μονάδας μέτρησης (Lamon, 2007).

   Ένα παράδειγμα για αυτή την ικανότητα αποτελεί το παρακάτω μαθηματικό πρόβλημα: 4 σοκολάτες στοιχίζουν 2.40 ευρώ και χρειάζομαι να αγοράσω 12 σοκολάτες. Πόσο θα στοιχίσουν; Μια τυπική προσέγγιση αναγωγής στην ακέραιη μονάδα είναι να υπολογιστεί ότι κάθε σοκολάτα στοιχίζει 0.60 σεντ και στη συνέχεια αυτό το ποσό πολλαπλασιάζεται με 12 σοκολάτες για εντοπισμό της τελικής τιμής. Ωστόσο, η ενοποίηση είναι σε ομάδες των 4, όπου ο υπολογισμός μπορεί εύκολα να γίνει με τον προσδιορισμό ότι 12 είναι 3 ομάδες των 4 (τετράδες) έτσι ώστε το συνολικό κόστος θα ήταν 3 ομάδες φορές 2.40 ευρώ. Αυτή η ευελιξία στη σκέψη φαίνεται προφανής στους έμπειρους ενήλικες αλλά όχι στα παιδιά. Για αυτό οι μαθητές χρειάζεται πρώτα να εκπαιδευτούν στο να εντοπίζουν πρώτα τη μονάδα μέτρησης και να μάθουν να αναστοχάζονται σε συγκρίσεις μεταξύ μέρους-όλου (Lamon, 1999).

4. **Ερμηνείες ρητών αριθμών (rational number interpretations):** Ρητός αριθμός είναι οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να γραφτεί με τη μορφή ενός κλάσματος. Η κατανόηση της έννοιας των ρητών αριθμών περιλαμβάνει την αντίληψη ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές έννοιες που φαίνονται όμοιες όταν είναι γραμμένες σε κλασματικά σύμβολα. Ωστόσο, ερμηνεύονται διαφορετικά (π.χ. το κλασματικό σύμβολο 1/3 έχει διαφορετικό νόημα αν ερμηνευθεί ως πιθανότητα, ως λόγος, ως ποσοστό, ως κλιμάκωση

ή ως διαμερισμός). Στο πλαίσιο του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ένας ρητός αριθμός μπορεί να ερμηνευθεί ως τελεστής κλίμακας, αλλά κι ως λόγος.

Οι ρητοί αριθμοί λειτουργούν ως τελεστές στο πλαίσιο της κλιμάκωσης. Αυτή η έννοια αφορά την αύξηση και τη μείωση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Ο τελεστής κλίμακας ενεργεί πάνω σε ποσότητες ή μεγέθη μετασχηματίζοντας τα, χωρίς να αλλάζει τη φύση τους παρά μόνο το μέγεθός τους (Vergnaud, 1983). Οι τελεστές δημιουργούν παρόμοιες ποσότητες/μεγέθη διαφορετικών αναλογιών.

Αντίθετα ο όρος λόγος μεταξύ δύο ή περισσότερων ποσοτήτων είναι ένας αριθμός που εκφράζει την αριθμητική σχέση μεταξύ τους. Όταν χρησιμοποιούμε ένα ρητό αριθμό (ένα κλάσμα) για να αναπαραστήσουμε μια συγκριτική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων, ο συγκεκριμένος ρητός αριθμός αποτελεί μόνο ένα σύμβολο. Συνεπώς, όταν περιγράφουμε ένα τμήμα ενός συνόλου, τότε το κλάσμα είναι κατάλληλο. Όταν όμως συγκρίνουμε ποσότητες/μεγέθη τότε ο λόγος είναι κατάλληλος. Και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιούμε ένα ρητό αριθμό, ο οποίος όμως ερμηνεύεται διαφορετικά. (Lamon, 1999). Η διδασκαλία των μαθητών σχετικά με τις ερμηνείες των ρητών αριθμών θα πρέπει να δίνει έμφαση σε όλες τις ερμηνείες για βελτίωση της μαθηματικής τους εξέλιξης.

5. **Αισθητοποίηση λόγου-αναλογίας (ratio sense):** Η ανάπτυξη αισθητοποίησης των εννοιών λόγου-αναλογίας είναι απαραίτητη για τη σταδιακή ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Ο λόγος εκφράζει το αποτέλεσμα της σύγκρισης ποσοτήτων, ενώ η αναλογία αποτελεί την ισοδυναμία δύο ή περισσότερων λόγων. Κατά την ανάπτυξη αισθητοποίησης η έμφαση πρέπει να δίνεται στην περιγραφή της σχέσης μεταξύ των λόγων (δηλαδή των αριθμητικών ποσοτήτων) και όχι στην εύρεση ενός αριθμού που απουσιάζει (Lamon, 1999).

Απαραίτητο συστατικό στοιχείο για την επιτυχή ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι η κατανόηση ισοδύναμων λόγων, δηλαδή η ύπαρξη αναλογίας ανάμεσα σε διαφορετικές ποσότητες που ακολουθούν βαθμιαία κλιμάκωση. Η κλιμάκωση περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό του αριθμητή και του παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό. Ως αποτέλεσμα, οι ποσότητες του αριθμητή και του παρονομαστή αλλάζουν κατά τον ίδιο βαθμό (π.χ. διπλασιάζονται ή τριπλασιάζονται, κ.τ.λ.). Ωστόσο, η σχέση μεταξύ τους παραμένει η ίδια όπως πριν από την κλιμάκωση (π.χ. 1:2 = 2:4 ή 2:3 = 6:9) (Boyer & Levine, 2012).

6. **Προσοχή στις ποσότητες και στην αλλαγή τους (attention to quantities and change):** Ένα άλλο απαραίτητο στοιχείο για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι οι μαθητές να αντιληφθούν ότι δύο ποσότητες συνδέονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε όταν αλλάζει η μία ποσότητα, η άλλη ποσότητα ταυτόχρονα μεταβάλλεται με ένα συγκεκριμένο τρόπο σε σχέση με την πρώτη ποσότητα (Lamon, 2007). Παράλληλα, είναι σημαντικό να κατανοούν ότι οι ποσότητες που συνθέτουν ένα λόγο είναι ενωμένες με τέτοιο τρόπο ώστε η σχέση αναλογίας μεταξύ τους παραμένει σταθερή και αμετάβλητη (Lamon, 1993). Για παράδειγμα έχοντας 2 σοκολάτες για 3 μαθητές είναι το ίδιο με το να έχεις 4 σοκολάτες για 6 μαθητές (2:3 = 4:6).

Είναι σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να εντοπίζουν τι αλλάζει και τι παραμένει σταθερό (Langrall & Swafford, 2000). Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός απαιτεί οι μαθητές να μπορούν να αξιολογήσουν και να συγκρίνουν τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων καθώς και τον τρόπο με τον οποίο αλλάζουν. Για να καλλιεργηθεί σωστά η έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι απαραίτητη προϋπόθεση να υπάρξει μια ουσιαστική κατανόηση ότι μια αναλογική σχέση αντιπροσωπεύει αλλαγή, αλλά ταυτόχρονα παραμένει αμετάβλητη στην ίδια κατάσταση (Lamon, 1999).

Τα πιο πάνω συστατικά στοιχεία όπως ήδη επεξηγήθηκε, είναι απαραίτητα για την ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Ωστόσο, αρκετοί μαθητές κατά τη διάρκεια της τυπικής σχολικής εκπαίδευσης δεν κατορθώνουν να τα καλλιεργήσουν στο βαθμό που χρειάζεται κι αυτό δυσχεραίνει τη βαθύτερη ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και τους δημιουργεί δυσκολίες στην εννοιολογική κατανόησή του (Spinillo & Bryant, 1999; Lamon, 2012). Συνεπώς κατά τον σχεδιασμό των δύο εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στην καλλιέργεια κάποιων από αυτών των στοιχείων ως μια προσπάθεια αντιμετώπισης των δυσκολιών των μαθητών.

Συγκεκριμένα κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα εφαρμογίδια ενισχύεται η συσχετιστική τους σκέψη, καθώς παρουσιάζεται συνεχώς με διάφορες οπτικές αναπαραστάσεις η πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των ποσοτήτων. Παράλληλα, μέσω των εφαρμογιδίων γίνεται προσπάθεια αισθητοποίησης των εννοιών λόγου-αναλογίας. Ο λόγος παρουσιάζεται ως ένα ζευγάρι ποσοτήτων (ποσότητα Α' – ποσότητα Β' και η σχέση μεταξύ τους) και η κατανόηση της έννοιας της αναλογίας γίνεται με διαδραστικό τρόπο, αυξάνοντας ή μειώνοντας τα ζευγάρια ποσοτήτων κατά τον ίδιο αριθμό, παραμένοντας κάθε φορά ίσα μεταξύ τους. Επιπλέον, η προσοχή των μαθητών εστιάζεται συνεχώς στην αλλαγή των ποσοτήτων. Μέσω κατάλληλης τεχνολογικής υποστήριξης γίνεται προσπάθεια οι μαθητές να κατανοήσουν τι αλλάζει και ποια σχέση παραμένει σταθερή. Οι ποσότητες του αριθμητή και του παρονομαστή σε ένα ζευγάρι αυξάνονται ή μειώνονται κατά τον ίδιο βαθμό. Ωστόσο, η σχέση μεταξύ τους παραμένει η ίδια όπως πριν από την αλλαγή. Τόσο η παράλληλη αλλαγή των ποσοτήτων, όσο και η σταθερή σχέση αναλογίας παρουσιάζονται με τρόπο απλό και επεξηγηματικό.

Μέσω της σταδιακής αλλά και συστηματικής καλλιέργειας των τριών αυτών στοιχείων, θεωρήθηκε ότι θα αναπτυχθεί καλύτερα μέσω τεχνολογίας ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός, που αποτελεί πρωταρχικό σκοπό της έρευνας.

2.4 Κατηγορίες προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού

Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει προβλήματα σύγκρισης (comparison problems) όπου δίνονται τέσσερις τιμές και προσδιορίζεται η σχέση μεταξύ τους (Cramer & Post, 1993). Συγκεκριμένα στους μαθητές παρέχονται δύο λόγοι (ο κάθε λόγος περιέχει από δύο τιμές) και καλούνται να καθορίσουν τη σχέση μεταξύ των δύο αυτών λόγων, να τους συγκρίνουν για να εξακριβώσουν την ύπαρξη ή όχι μιας αναλογίας. Οι πιθανές απαντήσεις για τη μεταξύ τους σχέση είναι: ο πρώτος λόγος είναι «μεγαλύτερος από/περισσότερος από», «μικρότερος από/λιγότερος από» ή «ίσος» με το δεύτερο λόγο (ter Vrugte et al., 2017).

Η δεύτερη κατηγορία αναφέρεται σε προβλήματα άγνωστης αξίας (missing value problems) στα οποία παρέχονται τρεις από τις τέσσερις μαθηματικές τιμές και η τέταρτη τιμή είναι άγνωστη (Cramer & Post, 1993). Έχουν σχεδιαστεί για να αξιολογήσουν την ικανότητα των μαθητών να εντοπίσουν μια άγνωστη τιμή, ενώ έχουν δοθεί οι υπόλοιπες τρεις με τέτοιο τρόπο ώστε οι τέσσερις τιμές που αποτελούν το πρόβλημα να σχετίζονται μεταξύ τους αναλογικά. Οι μαθητές χρειάζεται να εντοπίσουν την άγνωστη τιμή, υποθέτοντας ότι οι δύο λόγοι είναι ίσοι (π.χ. 4:8=?:16) (ter Vrugte et al., 2017).

Η τρίτη κατηγορία αφορά προβλήματα μετατροπής. Στους μαθητές παρέχονται δύο άνισοι λόγοι (π.χ. 4:8≠8:20) και χρειάζεται να υπολογίσουν τι αλλαγή πρέπει να κάνουν και σε ποιον από τους δύο λόγους, έτσι ώστε να γίνουν ισοδύναμοι και να υπάρξει αναλογία (ter Vrugte et al., 2017). Η συγκεκριμένη κατηγορία θεωρείται και η πιο δύσκολη από τις τρεις.

Ο Πίνακας 1 περιλαμβάνει παραδείγματα προβλημάτων που εμπίπτουν στις τρεις κατηγορίες προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Πίνακας 1

Κατηγορίες προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού

Κατηγορίες	Περιγραφή	Παραδείγματα
Προβλήματα Σύγκρισης	Δίνονται τέσσερις μαθηματικές τιμές οι οποίες χρειάζεται να συγκριθούν μεταξύ τους, για να εξακριβωθεί η ύπαρξη ή όχι μιας αναλογίας.	Ο οδηγός Α οδηγάει 180 χιλιόμετρα σε 3 ώρες. Ο οδηγός Β οδηγάει 350 χιλιόμετρα σε 7 ώρες. Ποιος οδηγάει πιο γρήγορα;
Προβλήματα άγνωστης αξίας	Παρέχονται τρεις από τις τέσσερις μαθηματικές τιμές και χρειάζεται να εντοπιστεί η τέταρτη τιμή η οποία είναι άγνωστη.	Για να φτιάξεις μια φρουτοσαλάτα για 4 άτομα χρειάζεσαι 8 μήλα. Πόσα μήλα χρειάζεσαι για να φτιάξεις την ίδια φρουτοσαλάτα για 6 άτομα;
Προβλήματα μετατροπής	Παρέχονται δύο άνισοι λόγοι (τέσσερις μαθηματικές τιμές) και χρειάζεται να υπολογιστεί τι αλλαγή πρέπει να γίνει και σε ποιον από τους δύο λόγους, έτσι ώστε να γίνουν ίσοι.	Έχω φτιάξει δύο πορτοκαλάδες. Η πρώτη περιέχει 3 ποτήρια νερό και 6 ποτήρια χυμό πορτοκάλι. Η δεύτερη περιέχει 4 ποτήρια νερό και 12 ποτήρια χυμό πορτοκάλι. Οι δύο πορτοκαλάδες έχουν την ίδια γεύση; Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες πρέπει να αλλάξω για να έχουν την ίδια γεύση;

Η παρούσα έρευνα θα ασχοληθεί με τη διερεύνηση προβλημάτων αριθμητικής σύγκρισης (προβλήματα σύγκρισης) και εντοπισμού της άγνωστης τιμής (προβλήματα άγνωστης αξίας), καθώς είναι οι δύο κατηγορίες προβλημάτων που διδάσκονται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Η τρίτη κατηγορία προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (τα προβλήματα μετατροπής) εντοπίζεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

2.5 Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού

Τα προβλήματα και οι καταστάσεις μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού επιλύονται με περισσότερες από μία στρατηγικές. Το είδος των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων αναλογίας εξαρτάται από το είδος των αναλογικών σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στα τέσσερα στοιχεία μιας αναλογίας και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές θα διακρίνουν τις σχέσεις αυτές. Οι πιο γνωστές στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές έχουν εντοπιστεί μέσα από έρευνες κι αφορούν διαισθητικές στρατηγικές, στρατηγικές πρόσθεσης, στρατηγικές οικοδόμησης, τη μέθοδο του εσωτερικού γινομένου και τέλος, στρατηγικές πολλαπλασιασμού (Lesh et al., 1988; Noelting, 1980; Van Dooren et al., 2005). Οι στρατηγικές αυτές αναπτύσσονται εκτενέστερα παρακάτω.

Οι διαισθητικές στρατηγικές περιλαμβάνουν τον εντοπισμό της σωστής απάντησης με πειραματισμό χωρίς όμως αναγνώριση και κατανόηση της αναλογίας. Ο όρος διαισθητικός χαρακτηρίζει την ανθρώπινη κρίση η οποία βασίζεται σε προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις ενός μαθητή, σε ένα άτυπο σύστημα μάθησης, μέσω του οποίου οδηγούμαστε στη λύση ενός προβλήματος (Christou & Philippou, 2001). Ωστόσο, αρκετές φορές οι στρατηγικές αυτές μπορεί να οδηγήσουν σε λανθασμένες απαντήσεις, επειδή αγνοούν την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των όρων αναλογίας. Οι πιο σημαντικές διαισθητικές στρατηγικές είναι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και η επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (Pittalis et al., 2003). Η στρατηγική της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ή αφαίρεσης βασίζεται στη χρήση ενός δοσμένου λόγου για να εντοπιστεί ο απαιτούμενος λόγος ακολουθώντας μια διαδικασία πρόσθεσης/αφαίρεσης (Nesher & Sukenik, 1991).

Αντίθετα, οι στρατηγικές πρόσθεσης δίνουν έμφαση στη διαφορά μεταξύ των ποσοτήτων, αντί στην εξέταση του τρόπου με τον οποίο οι δύο ποσότητες συνδέονται πολλαπλασιαστικά (Lamon, 2012). Επίσης, περιλαμβάνουν μια περιορισμένη αντίληψη της ισότητας των δύο λόγων με την αναγνώριση μιας μόνο σχέσης κάθε φορά (Ayan & Isiksal-Bostan, 2019).

Στη συνέχεια, οι στρατηγικές οικοδόμησης (build up) περιλαμβάνουν την ικανότητα αναγνώρισης μιας σχέσης μεταξύ δύο ποσοτήτων (που συνθέτουν ένα λόγο) και την εφαρμογή της ίδιας αυτής σχέσης σε δύο άλλες ποσότητες μέσω της οργάνωσης πληροφοριών και της εφαρμογής ενός επαναλαμβανόμενου μοτίβου. Μέσα από αυτό το μοτίβο οι μαθητές είναι σε θέση να εντοπίσουν τη λύση (Koellner-Clark & Lesh, 2003). Στη στρατηγική αυτή οι μαθητές χρησιμοποιούν επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ή επαναλαμβανόμενη αφαίρεση για να φτάσουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα (Tourniaire, 1986).

Από την άλλη μεριά, η μέθοδος του εσωτερικού γινομένου ή αλλιώς η μέθοδος «χιαστί» (cross-multiplication strategy) αναφέρεται ως μια αλγοριθμική διαδικασία και αυτόματη στρατηγική που στερείται εννοιολογικής κατανόησης. Διάφοροι ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι οι μαθητές αναπτύσσουν σε μεγαλύτερο βαθμό την ικανότητα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, όταν δεν χρησιμοποιούν αυτή την μηχανιστική διαδικασία, και ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος μπορεί να αποκρύψει ή ακόμη και να παρέμβει στην κατανόηση της έννοιας της αναλογικότητας από τους μαθητές (Singh, 2000; Lamon, 2007). Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός αποτελεί πρώτα απ' όλα μια γνωστική διεργασία και κατανόηση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων, κι όχι ένας αλγόριθμος ή μια διαδικασία.

Οι στρατηγικές πολλαπλασιασμού που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία, οι οποίες αφορούν και τη συγκεκριμένη ερευνητική εργασία, εστιάζονται στην κατανόηση της πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ των όρων εντός ενός λόγου και της επέκτασης της ίδιας σχέσης σε ένα άλλο λόγο (Van Dooren et al., 2003). Τα προβλήματα αναλογίας περιλαμβάνουν τη διαδικασία ένωσης τεσσάρων ποσοτήτων/μεγεθών, οι οποίες σύμφωνα με τον τρόπο που σχετίζονται μεταξύ τους, σχηματίζουν δύο είδη αναλογικών σχέσεων. Το πρώτο είδος αναφέρεται στις «εντός σχέσεις – within relations», δηλαδή τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων του ίδιου είδους και το δεύτερο είδος αναφέρεται στις «εκτός σχέσεις - between relations», δηλαδή τις σχέσεις μεταξύ αντίστοιχων ποσοτήτων διαφορετικού είδους (Lamon, 1994). Το Διάγραμμα 4 παρουσιάζει πιο επεξηγηματικά τις στρατηγικές πολλαπλασιασμού «εντός» σχέσεων και «εκτός» σχέσεων.

Διάγραμμα 4

Στρατηγικές πολλαπλασιασμού – «εντός» σχέσεων & «εκτός» σχέσεων

Όπως φαίνεται και από το πιο πάνω διάγραμμα στο μαθηματικό πρόβλημα «Αν 2 παγωτά κοστίζουν 4 ευρώ, πόσο κοστίζουν 8 παγωτά;» υπάρχουν δύο χώροι μέτρησης: ο πρώτος χώρος περιλαμβάνει τον αριθμό των ποσοτήτων των δύο ομάδων στα παγωτά και ο άλλος χώρος περιλαμβάνει τον αριθμό των ποσοτήτων των δύο ομάδων για τα χρήματα. Οι εκτός σχέσεις συγκρίνουν τον αριθμό των παγωτών με το αντίστοιχο χρηματικό ποσό στο πρώτο σύνολο και το ίδιο γίνεται και με το δεύτερο σύνολο, σχηματίζοντας τους λόγους 2:4 και 8:x.

Αντίθετα, οι εντός σχέσεις συγκρίνουν τον αριθμό των παγωτών του πρώτου συνόλου με τον αριθμό των παγωτών του δεύτερου συνόλου και το ποσό των χρημάτων του πρώτου συνόλου με το ποσό των χρημάτων του δεύτερου συνόλου. Αυτές οι δύο σχέσεις σχηματίζουν τους λόγους 2:8 και 4:x.

Η διάκριση μεταξύ αυτών των δύο ειδών σχέσεων είναι σημαντική, διότι κάθε είδος απαιτεί διαφορετική γνωστική διαδικασία και διαφορετική στρατηγική επίλυσης ενός προβλήματος αναλογίας (Pittalis et al., 2003).

Παράλληλα, εντοπίζεται ακόμη μια στρατηγική πολλαπλασιασμού η οποία ονομάζεται στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα (unit rate strategy). Μέσω αυτής της στρατηγικής οι μαθητές εντοπίζουν την τιμή της μίας μονάδας και στη συνέχεια υπολογίζουν την άγνωστη τιμή που ζητήθηκε ή συγκρίνουν δύο τιμές (Özgün-Koca & Kayhan Altay, 2009).

Περιλαμβάνει τον εντοπισμό του αριθμού ή αλλιώς του τελεστή κλίμακας που συνδέει τις δύο ποσότητες στους χώρους μέτρησης (Singh, 2000).

Είναι μια διαδικασία δύο βημάτων όπου αρχικά υπολογίζεται η αριθμητική τιμή του ενός στοιχείου/μιας ποσότητας μέσω διαίρεσης και μετά πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό για εντοπισμό των υπόλοιπων στοιχείων/ποσοτήτων (Singh, 2000; Christou & Philippou, 2001). Στο Διάγραμμα 5 δίνεται ένα παράδειγμα εφαρμογής της συγκεκριμένης στρατηγικής μέσω ενός προβλήματος σύγκρισης από τους Karplus et al. (1983): «Ο οδηγός Α οδηγεί 180 χιλιόμετρα σε 3 ώρες. Ο οδηγός Β οδηγεί 400 χιλιόμετρα σε 7 ώρες. Ποιος οδηγός οδηγάει πιο γρήγορα;». Οι μαθητές αρχικά μπορούν να εντοπίσουν πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψαν οι δύο οδηγοί μέσα σε μια ώρα και στη συνέχεια να τους συγκρίνουν με τη στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα.

Διάγραμμα 5

Στρατηγικής της αναγωγής στη μονάδα

$$\left.\begin{array}{l} \text{Οδηγός A: } \dfrac{180}{3} = 60 \text{ χιλιόμετρα την ώρα} \\[2ex] \text{Οδηγός B: } \dfrac{400}{7} = 57.14 \text{ χιλιόμετρα την ώρα} \end{array}\right\} \text{Επομένως, ο οδηγός Α είναι πιο γρήγορος}$$

Οι πιο πάνω στρατηγικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Ωστόσο, η χρήση της μιας στρατηγικής έναντι κάποιας άλλης δείχνει σε ποιο επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού βρίσκεται κάθε μαθητής. Οι συγκεκριμένες στρατηγικές αντικατοπτρίζουν και διαφορετικά επίπεδα ανάπτυξης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Tourniaire & Pulos, 1985).

Οι σχέσεις μέσα σε ένα πρόβλημα αναλογίας, η δομή και ο τύπος του συγκεκριμένου προβλήματος διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην επιλογή της σωστής στρατηγικής

(Lamon, 1994). Είναι σημαντικό οι μαθητές να εκπαιδεύονται σε όλες τις στρατηγικές πολλαπλασιασμού και ανάλογα με το πλαίσιο κάθε προβλήματος να μπορούν να επιλέγουν και να εφαρμόζουν την κατάλληλη στρατηγική επίλυσής του.

2.6 Αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών – Διδασκαλία μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού

Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός αποτελεί μια πολύπλοκη και σύνθετη μαθηματική έννοια που διδάσκεται περισσότερο σε βάθος στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ωστόσο, η διδασκαλία του ξεκινάει από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, όπου τίθενται κάποιες ισχυρές βάσεις για την καλλιέργεια των συστατικών στοιχειών που τον αποτελούν (Lamon, 2012). Η διδασκαλία της έννοιας του εντοπίζεται σε όλο το μαθηματικό οικοδόμημα, ξεκινώντας από τη μέτρηση και σύγκριση ποσοτήτων, κατανόηση της έννοιας των λόγων και εφαρμογή πολλαπλασιαστικών στρατηγικών στο δημοτικό σχολείο, ενώ επεκτείνεται σε θέματα άλγεβρας και στατιστικής σε γυμνάσιο-λύκειο.

Αρχίζοντας από τις μικρές τάξεις, στην Α’ και στη Β’ τάξη δημοτικού σχολείου οι μαθητές αρχίζουν να μαθαίνουν τις έννοιες του πολλαπλασιασμού-διαίρεσης, έρχονται σε επαφή με προβλήματα και δραστηριότητες που εμπεριέχουν τέτοιες έννοιες και μαθαίνουν να ξεχωρίζουν πότε χρειάζεται να εφαρμόσουν αυτές τις αριθμητικές πράξεις σε απλά λεκτικά προβλήματα μιας πράξης (π.χ. 1 κιλό πορτοκάλια κοστίζει 2 ευρώ. Πόσο κοστίζουν 3 κιλά πορτοκάλια;) (Van Dooren et al., 2005).

Στην Γ’ και στην Δ’ τάξη οι μαθητές έρχονται σε επαφή με δραστηριότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, όπως είναι τα προβλήματα αναλογίας με άγνωστη τη μια τιμή, δηλαδή λεκτικά προβλήματα στα οποία είναι γνωστοί τρεις αριθμοί και ο τέταρτος πρέπει να εντοπιστεί μέσω μιας κατάλληλης μαθηματικής πράξης (π.χ. 5 σοκολάτες ζυγίζουν 300 γραμμάρια. Ποιο είναι το βάρος των 20 σοκολατών;) (Van Dooren et al., 2005). Με την εισαγωγή τέτοιων δραστηριοτήτων αναμένεται ότι οι μαθητές θα αρχίσουν να κατανοούν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που υπάρχουν εντός καταστάσεων αναλογιών. Κατά τον Vergnaud (1983), η συγκεκριμένη κατανόηση αφορά την αντίληψη της πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ ποσοτήτων/μεγεθών σε δύο χώρους μέτρησης. Στο προηγούμενο παράδειγμα οι ποσότητες στους δύο χώρους μέτρησης (αριθμός σοκολατών και βάρος) συνδέονται μεταξύ τους πολλαπλασιαστικά (εάν πολλαπλασιαστεί ο αριθμός των σοκολατών με το 60, τότε θα εντοπιστεί και το αντίστοιχο βάρος τους). Παράλληλα, υπάρχει μια πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των στοιχείων μέσα σε κάθε χώρο μέτρησης (εάν τετραπλασιαστεί ο αριθμός των σοκολατών, τότε θα τετραπλασιαστεί και το βάρος τους, κ.τ.λ.).

Σε μεταγενέστερο στάδιο και σε μεγαλύτερες τάξεις οι μαθητές συναντούν περαιτέρω εφαρμογές των αναλογικών σχέσεων. Στην Ε’ και στην ΣΤ’ τάξη δημοτικού, οι μαθητές διδάσκονται περαιτέρω τις έννοιες λόγου – αναλογίας. Διερευνούν την έννοια του λόγου, διακρίνουν ανάλογα και μη ανάλογα ποσά και αναφέρουν πότε μια σχέση αφορά ευθέως ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Παράλληλα, οι έννοιες λόγου – αναλογίας αναπτύσσονται μέσω καταστάσεων που περιλαμβάνουν ισοδυναμία ή σύγκριση κλασμάτων, κατανόηση και χρήση δεκαδικών αριθμών και ποσοστών ως λόγων (ΥΠΠΑΝ, 2016).

Αντίστοιχα, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός αναπτύσσεται μέσω των αλγεβρικών σχέσεων, της τριγωνομετρίας και της θεωρίας των πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν την ιδιότητα της αναλογίας που χαρακτηρίζει τη σχέση μεταξύ της διαμέτρου και της περιμέτρου ενός κύκλου, της αναλογίας μεταξύ του χρόνου και της απόστασης που διανύεται σε μια σταθερή ταχύτητα ή της αναλογίας μεταξύ της τάσης και της έντασης που υπάρχει σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα (Van Dooren et al., 2005).

Στο κυπριακό εκπαιδευτικό σύστημα η διδασκαλία των αναλογιών και η καλλιέργεια μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ξεκινάει στοχευμένα στο δημοτικό σχολείο στην Δ’ τάξη όπου και διδάσκεται ως στρατηγική επίλυσης η αναγωγή στη μονάδα (ΥΠΠΑΝ, 2016). Η συγκεκριμένη μέθοδος που διδάσκονται οι μαθητές είναι αρχικά να εντοπίζουν την τιμή της μιας μονάδας με διαίρεση και στη συνέχεια να βρίσκουν την τιμή της ζητούμενης ποσότητας με πολλαπλασιασμό. Παράλληλα όμως έρχονται και σε μια πρώτη επαφή με τη στρατηγική των «εντός» σχέσεων σε μια αναλογία. Οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στο βιβλίο μαθητή στη Δ’ τάξη δημοτικού εντοπίζονται στην 6η ενότητα και στοχεύουν σε μια εισαγωγή στον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό, στην κατανόηση των «εντός» σχέσεων σε μια αναλογία και στην ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής σκέψης η οποία σταδιακά θα οδηγήσει στη σύγκριση ποσοτήτων.

Άξιο αναφοράς αποτελεί το γεγονός ότι στον οδηγό εκπαιδευτικού για κάθε αντίστοιχη μαθηματική ενότητα διδασκαλίας περιλαμβάνονται κάποια εφαρμογίδια τα οποία ο κάθε εκπαιδευτικός μπορεί να αξιοποιήσει στο μάθημά του. Για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Δ’ τάξη – ενότητα 6) δεν αναφέρεται όμως κάποιο εφαρμογίδιο, κάτι που αποτελεί καινοτομία της παρούσας έρευνας. Στους οδηγούς εκπαιδευτικών για Ε’ και ΣΤ’ τάξη αναφέρονται κάποιες ιστοσελίδες με δραστηριότητες αισθητοποίησης λόγων-αναλογιών, οι οποίες όμως είναι στην αγγλική γλώσσα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς περισσότερο για εμπέδωση αυτών των εννοιών. Αντίθετα τα προτεινόμενα εφαρμογίδια αυτής της έρευνας έχουν προγραμματιστεί στην ελληνική γλώσσα και στόχος τους είναι η καλλιέργεια συγκεκριμένων δεξιοτήτων όπως είναι η αναγνώριση της πολλαπλασιαστικής σχέσης σε ποσότητες, η εξεύρεση ισότητας-ανισότητας, ο εντοπισμός και υπολογισμός των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, η εφαρμογή στρατηγικών «εντός» και «εκτός» σχέσεων, δεξιότητες που εμπίπτουν στην ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

2.7 Δυσκολίες μαθητών

Αποτελέσματα διάφορων ερευνών δείχνουν ότι οι μαθητές δεν αναπτύσσουν εύκολα τις απαραίτητες δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Noelting, 1980; Singh, 2000, Boyer & Levine, 2015), όπως είναι η σύγκριση ποσοτήτων, η εξεύρεση ισότητας ή ανισότητας μεταξύ των ποσοτήτων, η αναγνώριση της πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ ποσοτήτων και η επέκταση της σχέσης αυτής και σε άλλα ζευγάρια ποσοτήτων, η δημιουργία πίνακα τιμών, η αναπαράσταση και επεξήγηση των ποσοτικών σχέσεων και γενικά η ικανότητα κριτικής σκέψης σε καταστάσεις αναλογίας. Τέτοιες δεξιότητες απαιτούν αρκετό χρόνο για να καλλιεργηθούν (Tourniaire & Pulos, 1985) και παράλληλα χρειάζονται στοχευμένη διδασκαλία (Resnick & Singer, 1993; Lamon, 2007).

Ένας παράγοντας που επηρεάζει την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε μαθητές είναι η πολυπλοκότητα της διαδικασίας αναστοχασμού που περιλαμβάνει δύο στάδια. Οι μαθητές πρέπει πρώτα να κατανοήσουν τις σχέσεις αναλογίας πρώτης τάξης, όπως είναι οι σχέσεις μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή και στη συνέχεια να επεξεργαστούν τις σχέσεις δεύτερης τάξης, οι οποίες αφορούν συγκρίσεις μεταξύ των δύο λόγων (ζευγάρια ποσοτήτων) και κατά πόσο υπάρχει ή όχι μεταξύ τους μια ισοδυναμία – αναλογία (Spinillo & Bryant, 1991). Εμπειρικές έρευνες έχουν επισημάνει ότι τα λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν συγκρίνουν λόγους για να κρίνουν αν υπάρχει αναλογική σχέση μπορούν να αποδοθούν στη μονομερή σύγκριση ίδιων τμημάτων (π.χ. μόνο του αριθμητή ή μόνο του παρονομαστή) και όχι στη συνολική σύγκριση (Boyer & Levine, 2015). Οι μαθητές μπορεί να είναι ικανοί να αναγνωρίζουν μεμονωμένα τις σχέσεις σε κάθε λόγο (σε ένα ζευγάρι ποσοτήτων), αλλά δυσκολεύονται να συγκρίνουν τους λόγους (τα ζευγάρια ποσοτήτων) μεταξύ τους (Spinillo & Bryant, 1991).

Η σκέψη των μαθητών σε καταστάσεις που οι ενήλικες θεωρούν συχνά ως αναλογικές δείχνει ότι δεν καταλαβαίνουν τι πραγματικά συμβαίνει σε τέτοιες καταστάσεις. Πάνω στη βιασύνη τους να υπολογίσουν μια απάντηση, οι μαθητές δεν σκέφτονται πρώτα με ποιο τρόπο οι ποσότητες σε αυτές τις καταστάσεις συνδέονται μεταξύ τους (Smith, 2002). Το αποτέλεσμα της διαμόρφωσης ενός λόγου και του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι μια γνωστική επεξεργασία κι όχι μια αλγοριθμική διαδικασία (NCTM, 2013).

Οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν την έννοια της αναλογίας ως μια ποιοτική σχέση μεταξύ των μεταβλητών της, αλλά και ως μια ποσοτική σχέση (Nesher & Sukenik, 1991). Στην πρώτη περίπτωση οι μαθητές περιθωριοποιούν τα αριθμητικά δεδομένα που περιλαμβάνει ένα πρόβλημα αναλογίας και εστιάζονται σε λεκτικές φράσεις όπως «περισσότερο», «λιγότερο», «εντονότερο», κ.ά. (Noelting, 1980, Nesher & Sukenik, 1991). Στη δεύτερη περίπτωση δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν όλα τα αριθμητικά στοιχεία που εμπλέκονται σε μια αναλογία και τον τρόπο που σχετίζονται, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν μόνο ένα μέρος των πληροφοριών ενός προβλήματος (Nesher & Sukenik, 1991).

Η πιο συχνή δυσκολία που εντοπίζεται στην επίλυση προβλημάτων αναλογίας αναφέρεται στην πολλαπλασιαστική σκέψη κατά την οποία υπάρχει μια πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων η οποία εφαρμόζεται στο δεύτερο ζευγάρι ποσοτήτων (Noelting, 1980; Karplus et al., 1983; Ayan & Isiksal-Bostan, 2019). Οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τον πολλαπλασιαστικό χαρακτήρα της αλλαγής μεταξύ των ποσοτήτων (Lamon, 2012) και συχνά χρησιμοποιούν στρατηγικές πρόσθεσης για να επιλύσουν προβλήματα αναλογίας (Misailidou & Williams, 2003). Διακρίνουν τις ποσότητες που υπάρχουν εντός μιας προβληματικής κατάστασης, αλλά δεν κατανοούν ότι οι ποσότητες αυτές σχετίζονται πολλαπλασιαστικά και χρησιμοποιούν διαισθητικά κάποια προσθετική στρατηγική (Nesher & Sukenik, 1991).

Υπάρχουν εμπειρικά στοιχεία ότι οι μαθητές δεν προσεγγίζουν καταστάσεις αναλογίας με τον τρόπο που τον κάνουν οι ενήλικες. Μπορεί να μην αντιλαμβάνονται την αναλογικότητα που υπάρχει μέσα σε μια κατάσταση και χρειάζονται συστηματική εκπαίδευση για να μεταπηδήσουν από προσθετικές συγκρίσεις σε πολλαπλασιαστικές συγκρίσεις (NCTM, 2013). Οι μαθητές που δεν έχουν αναπτύξει την ικανότητα να συγκρίνουν πολλαπλασιαστικά, κάνουν προσθετικούς αναστοχασμούς (μέσω πρόσθεσης), με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λανθασμένες απαντήσεις (Tjoe & De la Torre, 2014).

Μια άλλη επισημανθείσα δυσκολία αναφέρεται ως «ψευδαίσθηση της γραμμικότητας», κατά την οποία αρκετοί μαθητές, αλλά και ενήλικες σκέφτονται λανθασμένα και εφαρμόζουν σε όλα τα προβλήματα που συναντούν στρατηγικές αναλογίας, είτε πρόκειται για κάποιο πρόβλημα αναλογίας είτε όχι (Modestou & Gagatsis, 2007). Ενώ επιτυγχάνουν να επιλύσουν προβλήματα αναλογίας, αποτυγχάνουν στο να τα διακρίνουν από άλλα μη αναλογικά προβλήματα. Έτσι τους δημιουργείται μια ψευδαίσθηση για την ύπαρξη αναλογίας και χρησιμοποιούν λανθασμένες στρατηγικές επίλυσης που ταιριάζουν μόνο σε περιπτώσεις προβλημάτων αναλογίας.

Γενικά, η κατανόηση της έννοιας της αναλογίας και συνεπώς η ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι δεξιότητες που δυσκολεύουν τους μαθητές ως προς την κατάκτησή τους. Οι πιο πάνω δυσκολίες των μαθητών οδήγησαν στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος για διερεύνηση ως προς την επίδραση της τεχνολογίας στην ανάπτυξη του συγκεκριμένου μαθηματικού συλλογισμού και στην αλλαγή της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.

2.8 Αναγκαιότητα έρευνας

Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός αποτελεί θεμελιώδη ικανότητα για μελλοντική μαθηματική κατανόηση και επιτυχία (Rick et al., 2012). Συνεπώς η ολοκληρωμένη ανάπτυξή του κρίνεται ως απαραίτητη. Η παραδοσιακή διδασκαλία για την ανάπτυξή του παρουσιάζεται συχνά ως αναποτελεσματική (Rick et al., 2012) και ως εκ τούτου οι μαθητές υστερούν σε δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Tourniaire & Pulos, 1985; Modestou & Gagatsis, 2007; Clark, 2008).

Ακριβώς επειδή πρόκειται για ένα χρήσιμο αλλά και παράλληλα δύσκολο θέμα, ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών ερευνητικών μελετών για πάρα πολλά χρόνια. Με την πάροδο των χρόνων, η έρευνα για αυτό το θέμα συνεχώς αλλάζει και εξελίσσεται με τους ερευνητές να εστιάζουν κάθε φορά σε διαφορετικές παραμέτρους που μπορούν να βοηθήσουν ως προς την καλύτερη ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Tourniaire & Pulos, 1985).

Μέσα από τη βιβλιογραφική ανασκόπηση διαφάνηκε ότι έχουν πραγματοποιηθεί έρευνες με μεικτά αποτελέσματα, οι οποίες διερευνούν την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και του τρόπου με τον οποίο μπορεί να ενισχυθεί, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές ως προς την κατάκτησή του, τις στρατηγικές επίλυσης που χρησιμοποιούν, κ.ά. Ωστόσο, πολύ λίγες έρευνες έχουν εντοπιστεί που να συνδυάζουν αυτό το θέμα με την τεχνολογία και να διερευνούν τον τρόπο μέσω του οποίου μπορεί να αναπτυχθεί ο συγκεκριμένος συλλογισμός στους μαθητές με ένα διαφορετικό, εναλλακτικό και πιο διαδραστικό τρόπο.

Ένα κρίσιμο ζήτημα στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο μαθαίνουν και κατανοούν οι μαθητές, ο τρόπος με τον οποίο, όχι μόνο είναι σε θέση να κατασκευάσουν, αλλά και να μεταμορφώσουν μαθηματικές έννοιες και ιδέες. Σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία παίζουν οι εννοιολογικές και οπτικές αναπαραστάσεις. Η τεχνολογία έχει τη δύναμη να βελτιώσει τις ήδη προτεινόμενες αναπαραστάσεις, καθιστώντας τις διαδραστικές και δυναμικές, με παροχή άμεσης ανατροφοδότησης, καλλιέργειας του αναστοχασμού και μεταφοράς των αναπαραστάσεων σε αυθεντικά περιβάλλοντα (Vandercruysse et al., 2015).

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το κυπριακό αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών η τεχνολογία αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής παιδείας και οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν τις απαραίτητες γνώσεις που απαιτούνται στη σύγχρονη κοινωνία της πληροφορίας (ΥΠΠΑΝ, 2016). Μέσω του σχεδιασμού και της ανάπτυξης των δύο ψηφιακών εφαρμογιδίων για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού οι δύο πιο πάνω αρχές υποστηρίζονται.

Η ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού θεωρείται κρίσιμη και απαραίτητη για τη μελλοντική εξέλιξη των μαθητών, καθώς τους βοηθάει σε διάφορους τομείς της μαθητικής αλλά και της ενήλικης ζωής τους. Πρόκειται για μια πολύπλοκη νοητική διεργασία για την οποία αρκετοί μαθητές πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ακόμη και ενήλικες, έχουν παρανοήσεις και αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Συνεπώς, είναι ένα ερευνητικό θέμα που χρήζει περαιτέρω έρευνας και μελέτης και η διερεύνηση της χρήσης τεχνολογίας έχει τη δυνατότητα να συνεισφέρει προς την ερευνητική κοινότητα που ερευνά το εν λόγω θέμα με καινούργια πορίσματα και συμπεράσματα.

Οι πιο πάνω λόγοι οδήγησαν στη δημιουργία των ψηφιακών εφαρμογιδίων στα οποία αναφέρεται η συγκεκριμένη εργασία και διαμορφώθηκαν συγκεκριμένα ερευνητικά ερωτήματα. Πιο αναλυτικά τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας ερευνητικής εργασίας ήταν:

1. Σε ποιο βαθμό η χρήση τεχνολογίας μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της επίδοσης μαθητών Δ’ τάξης ως προς την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης (1η κατηγορία προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού);
2. Σε ποιο βαθμό η χρήση τεχνολογίας μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της επίδοσης μαθητών Δ’ τάξης ως προς την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας (2η κατηγορία προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού);
3. Ποια είναι η επίδραση των δύο ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων στην ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού;

Αρχικά, κρίθηκε σκόπιμο να υπάρξουν δύο ξεχωριστά ερευνητικά ερωτήματα που να διερευνούν την επίδραση που είχε το κάθε ένα εφαρμογίδιο στην ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και στην αλλαγή της μαθηματικής σκέψης των μαθητών που τα χρησιμοποίησαν. Όπως έχει ήδη αναφερθεί και σε προηγούμενη ενότητα τα προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες. Οι δύο πρώτες κατηγορίες (προβλήματα σύγκρισης και προβλήματα άγνωστης αξίας) είναι αυτές με τις οποίες ασχολήθηκε η ερευνητική μελέτη και τα δύο εφαρμογίδια που σχεδιάστηκαν (το πρώτο εφαρμογίδιο αφορούσε τη σύγκριση ποσοτήτων και το δεύτερο εφαρμογίδιο εστιαζόταν στον εντοπισμό άγνωστων ποσοτήτων). Συνεπώς διερευνήθηκε η επίδραση του καθενός καθώς και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν ο μαθητές κατά την ενασχόληση μαζί τους και έγινε σύγκριση με τα αποτελέσματα από την παραδοσιακή διδασκαλία.

Στη συνέχεια τέθηκε και ένα τρίτο ερευνητικό ερώτημα το οποίο αφορούσε συνδυαστικά και τα δύο εφαρμογίδια και στόχος του ήταν να διερευνήσει αν οι μαθητές που δοκίμασαν τα συγκεκριμένα εφαρμογίδια καλλιέργησαν κάποιες συγκεκριμένες δεξιότητες που εμπίπτουν στην ευρύτερη έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Τέτοιες δεξιότητες ήταν η σύγκριση ποσοτήτων, η εξεύρεση ισότητας ή ανισότητας μεταξύ των ποσοτήτων, η αναγνώριση της πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ ποσοτήτων και η επέκταση της σχέσης αυτής και σε άλλα ζευγάρια ποσοτήτων, η δημιουργία πίνακα τιμών, η αναπαράσταση και επεξήγηση των ποσοτικών σχέσεων και γενικά η ικανότητα κριτικής σκέψης σε καταστάσεις αναλογίας.

3. Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρονται ενδεικτικά κάποιες έρευνες που εντοπίστηκαν κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση με κύριο θέμα διερεύνησής τους την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Στην αρχή περιγράφονται οι έρευνες που δεν χρησιμοποίησαν τεχνολογία, αλλά διερεύνησαν τις ικανότητες των μαθητών, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν και τις παρανοήσεις τους στο συγκεκριμένο θέμα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τρεις έρευνες που διενεργήθηκαν στην Κύπρο για τη μελέτη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, έχοντας ως συμμετέχοντες Κύπριους μαθητές. Ακολουθεί η παρουσίαση ερευνών που χρησιμοποίησαν κάποια τεχνολογική υποστήριξη για ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και πρόσθεσαν ευρήματα ως προς την καλύτερη κατανόηση του. Το κεφαλαίο ολοκληρώνεται με την επισήμανση των περιορισμών των υφιστάμενων τεχνολογιών, οι οποίοι οδήγησαν στη ανάγκη δημιουργίας νέων ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων.

3.1 Έρευνες για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού

Η ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι μια απαραίτητη αλλά και μια δύσκολη γνωστική διαδικασία για τους μαθητές. Γι' αυτό το λόγο αρκετές έρευνες έχουν διενεργηθεί αναφέροντας ωστόσο μεικτά αποτελέσματα. Οι έρευνες αυτές αξιολόγησαν τις ικανότητες των μαθητών, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν, τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν και τις παρανοήσεις τους στο συγκεκριμένο θέμα, ενώ περιλάμβαναν διάφορες δραστηριότητες. Κάποιες έρευνες χρησιμοποίησαν προβλήματα άγνωστης αξίας (Singh, 2000; 2000b), άλλες χρησιμοποίησαν προβλήματα σύγκρισης (Noelting, 1980; Karplus et al., 1983; Nesher & Sukenik, 1991), ενώ κάποιες άλλες συμπεριέλαβαν πολλαπλά είδη προβλημάτων (Lamon, 1993). Ενδεικτικά θα αναφερθούν κάποιες από αυτές, καθώς μεγάλος όγκος παρόμοιων ερευνών έχει εντοπιστεί κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει συνοπτικά αυτές τις έρευνες, τη μεθοδολογία που ακολούθησαν καθώς και τα αποτελέσματά τους.

Πίνακας 2

Έρευνες για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (χωρίς τεχνολογία)

	Ερευνητές	Σκοπός Έρευνας	Μεθοδολογία	Αποτελέσματα
1.	Inhelder & Piaget (1958)	Διερεύνηση μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε καταστάσεις ισορροπίας και πιθανότητας.	Διεξήγαγαν ατομικές συνεντεύξεις με μαθητές διαφορετικών ηλικιών για να ανακαλύψουν τις ιδέες τους ως προς την έννοια της αναλογίας μέσω μιας ζυγαριάς ισορροπίας.	Περιορισμένες ικανότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε μαθητές ηλικίας κάτω των 12 ετών.
2.	Karplus (1974)	Διερεύνηση μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω ενός προβλήματος άγνωστης αξίας.	Διεξήγαγε ατομικές συνεντεύξεις με μαθητές 12 – 14 ετών όπου έπρεπε να λύσουν ένα πρόβλημα άγνωστης αξίας. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα έπρεπε να εντοπίσουν τη μονάδα μέτρησης του ύψους.	Δυσκολία των μαθητών στη μέτρηση και στον εντοπισμό της σωστής ποσότητας (λανθασμένη προσθετική στρατηγική αντί κάποιας στρατηγικής πολλαπλασιασμού).
3.	Noelting (1980)	Διερεύνηση μαθ. αναλ. συλ. μέσω προβλημάτων σύγκρισης, όπως τα προβλήματα μίξης γεύσεων.	Ζήτησε από 321 μαθητές ηλικίας 6-16 ετών να συγκρίνουν το επίπεδο γλυκύτητας δύο μειγμάτων που είχαν παρασκευαστεί από διαφορετικές ποσότητες ποτηριών χυμού και νερού.	Δυσκολία των μαθητών να συγκρίνουν σωστά, όταν τα μείγματα ήταν ισοδύναμα με διαφορετικές ποσότητες (π.χ. 1:2 = 2:4).
4.	Karplus et al. (1983)	Διερεύνηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων αναλογιών.	Προβλήματα σύγκρισης με τη δημιουργία λεμονάδων με διαφορετικές ποσότητες στα συστατικά τους κάθε φορά (διαγνωστικά δοκίμια σε 60 μαθητές Στ' τάξης δημοτικού και 60 μαθητές Β' τάξης γυμνασίου).	Χώρισαν τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να επιλύσουν τα προβλήματα σε 4 κατηγορίες: ελλιπής ή παράλογη στρατηγική, ποιοτική στρατηγική, στρατηγική πρόσθεσης

				και στρατηγική αναλογίας. Οι 4 αυτές κατηγορίες αντιστοιχούν στα αναπτυξιακά επίπεδα του μαθ. αναλ. συλλογισμού.
5.	Nesher & Sukenik (1991)	Μελέτησαν την επίδραση της αναπαράστασης των μειγμάτων με τη μορφή ρητών αριθμών-δηλ. κλασμάτων σε προβλήματα σύγκρισης δύο μειγμάτων.	Έρευνα με 60 μαθητές Α’, Β’ και Γ’ γυμνασίου, οι οποίοι επιλέχθηκαν τυχαία και αξιολογήθηκαν ατομικά μέσω κλινικών συνεντεύξεων όπου εκτέλεσαν τρεις δραστηριότητες.	Πολλοί μαθητές βελτίωσαν την επίδοσή τους λόγω της αναπαράστασης των ποσοτήτων με τη μορφή κλάσματος.
6.	Spinillo & Bryant (1991) Οι ίδιοι ερευνητές επανέλαβαν την έρευνά τους το 1999.	Διερεύνηση του κατά πόσο τα μικρά παιδιά διακρίνουν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων χρησιμοποιώντας ως στρατηγική την έννοια του «μισού». Είχαν τον ίδιο σκοπό έρευνας.	Σε 80 παιδιά ηλικίας 4 – 7 ετών παρουσιάστηκαν δύο κουτιά που περιείχαν άσπρα και μπλε τούβλα σε διαφορετική αναλογία και μια εικόνα που ταίριαζε με ένα από τα δύο κουτιά που τους είχαν παρουσιαστεί. Τα παιδιά έπρεπε να υποδείξουν ποιο από τα δύο κουτιά ταίριαζε με την εικόνα. Στην επαναληπτική τους έρευνα χρησιμοποίησαν την ίδια μεθοδολογία με 60 μαθητές ηλικίας 6-8 ετών.	Σημαντική επίδοση των παιδιών σε ασκήσεις όπου εφάρμοζαν τη στρατηγική του μισού. Συνεπώς ακόμη και μικρά παιδιά μπορούν να επιδείξουν μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό, μέσω συγκεκριμένων στρατηγικών όπως το όριο του μισού ως σημείο αναφοράς. Οι μαθητές μπορούσαν να διακρίνουν τις μη ισοδύναμες ποσότητες. Δυσκολεύονταν όμως στην αναγνώριση ισοδύναμων ποσοτήτων.

7.	Resnick & Singer (1993)	Διερεύνηση μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω πραγματικών αντικειμένων.	Διερεύνησαν αν παιδιά νηπιαγωγείου ηλικίας 3-5 ετών μπορούσαν να αναλογιστούν με λόγους και αναλογίες με τη χρήση πραγματικών αντικειμένων και χωρίς να χρησιμοποιούν αριθμούς (αν μπορούσαν να ταιριάξουν 3 αρκούδες διαφορετικού μεγέθους με 3 αντίστοιχες καρέκλες).	Τα παιδιά επέδειξαν συσχετιστική σκέψη κι αυτό θεωρήθηκε στοιχείο ανάπτυξης πρώιμου μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.
8.	Tourniaire (1996)	Διερεύνησε την κατανόηση της έννοιας της αναλογίας σε μαθητές δημοτικού διαφορετικών τάξεων.	60 μαθητές Γ', Δ' και Ε' τάξης δημοτικού συμπλήρωσαν διαγνωστικό δοκίμιο με προβλήματα μαθ. αναλ. συλλ. (διαφορετικά προβλήματα για κάθε τάξη).	Οι περισσότεροι μαθητές μπόρεσαν να επιλύσουν με επιτυχία τα προβλήματα με διαφορετικές όμως στρατηγικές. Οι πιο συχνές στρατηγικές ήταν διαισθητικές ή στηρίζονταν στην πρόσθεση κι όχι στον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση. Άρα χρειάζονται καθοδήγηση στη χρήση σωστών στρατηγικών επίλυσης.
9.	Lamon (1993)	Διερεύνηση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.	Στην έρευνα της συμμετείχαν 24 μαθητές ΣΤ' τάξης και ανέλυσε την σκέψη των μαθητών πάνω σε προβλήματα αναλογικού συλλογισμού μέσω ατομικών συνεντεύξεων.	Ανέπτυξε ένα πλαίσιο που περιλάμβανε τέσσερις σημασιολογικούς τύπους προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

10.	Singh (2000a) Ο ίδιος ερευνητής συνέχισε την έρευνά του (Singh, 2000b)	Διερεύνησε τα γνωστικά σχήματα και τις διαδικασίες μαθ. αναλ. συλλ. που ακολουθούν οι μαθητές μέσω τριών ειδών προβλημάτων: προβλήματα άγνωστης αξίας, προβλήματα σύγκρισης και προβλήματα ποιοτικού αναλογισμού. Είχε τον ίδιο σκοπό έρευνας.	Δόθηκε σε 423 μαθητές ηλικίας 15 – 16 ετών διαγνωστικό δοκίμιο όπου συγκρίθηκε η μαθησιακή επίδοση των μαθητών στις τρεις κατηγορίες προβλημάτων και εντοπίστηκαν οι στρατηγικές που χρησιμοποίησαν κατά την επίλυσή τους. Πραγματοποίησε κλινικές συνεντεύξεις με 2 μαθητές ΣΤ’ τάξης δημοτικού.	Οι μαθητές εκτελούσαν με επιτυχία προβλήματα άγνωστης αξίας, αλλά υστερούσαν στις άλλες δύο κατηγορίες προβλημάτων. Επίσης, χρησιμοποιούσαν σε μεγάλο βαθμό στρατηγικές πρόσθεσης. Συνεπώς, δεν μπορούν να κατανοήσουν την κλιμακωτή σχέση που υπάρχει εντός μιας αναλογίας, αν δεν αναπτύξουν πρώτα πολλαπλασιαστικό συλλογισμό. Διαφάνηκε η μεγάλη σημασία που έχει η πολλαπλασιαστική σκέψη κατά τον αναλογικό συλλογισμό.
11.	Bentley & Yates (2017)	Διερεύνηση ενός εναλλακτικού τρόπου διδασκαλίας ανάπτυξης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.	Πειραματικός σχεδιασμός με 44 μαθητές ΣΤ’ τάξης για περίοδο δύο εβδομάδων. Η ομάδα ελέγχου ακολούθησε την παραδοσιακή διδασκαλία μέσω των σχολικών εγχειριδίων, ενώ η πειραματική ομάδα διδάχθηκε στρατηγικές μέσω εκπαιδευτικών παραδειγμάτων για την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας.	Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας παρουσίασαν σημαντική βελτίωση στο διαγνωστικό δοκίμιο που ακολούθησε συγκριτικά με την ομάδα ελέγχου.

12.	Ayan & Isiksal-Bostan (2019)	Εξέταση του μαθ. αναλ. συλλ. σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, τις στρατηγικές επίλυσης που ακολουθούν, τις δυσκολίες που συναντούν καθώς και τους λόγους που συναντούν αυτές τις δυσκολίες σε στους τομείς της γεωμετρίας και της μέτρησης.	Χορήγησαν διαγνωστικό δοκίμιο σε 935 μαθητές Α', Β' και Γ' λυκείου το οποίο περιλάμβανε προβλήματα που χρειάζονται αναλογικό συλλογισμό για να επιλυθούν και αφορούσαν μέτρηση των εννοιών του μήκους, της περιμέτρου, της επιφάνειας και του όγκου. Μετά πραγματοποίησαν συνεντεύξεις βασισμένες στην επίλυση προβλημάτων με 12 από αυτούς τους μαθητές.	Οι μαθητές έδιναν σωστές απαντήσεις στα προβλήματα, όμως δεν μπορούσαν να αιτιολογήσουν επαρκώς τις απαντήσεις τους, δείχνοντας έτσι ότι δεν κατανοούσαν σε βάθος τις αναλογικές σχέσεις.

Οι αρχικές έρευνες που αναφέρονται στον πιο πάνω πίνακα (αριθμοί 1-5) θεωρούσαν ότι ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός είναι μια γνωστική διαδικασία που ξεκινάει να αναπτύσσεται στην ηλικία των 12-13 ετών. Εξαιτίας της επιρροής που είχε η θεωρία του Piaget (σύμφωνα με την οποία η ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ξεκινάει να αναπτύσσεται στα άτομα στο στάδιο των τυπικών λογικών ενεργειών, δηλαδή στην ηλικία των 12-13 ετών και μετά), αρκετές παλαιότερες έρευνες είχαν επικεντρωθεί σε έφηβους μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Tourniaire, 1986). Συγκεκριμένα οι υποστηρικτές της θεωρίας του Piaget θεωρούσαν ότι τα παιδιά μικρότερα των 12-13 ετών δεν μπορούν να κατανοήσουν και να αναπτύξουν δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, καθώς εφαρμόζουν στρατηγικές που στηρίζονται στην προσθετική σκέψη κι όχι στην πολλαπλασιαστική.

Ωστόσο, στον ίδιο πίνακα αναφέρονται και έρευνες με μικρότερα παιδιά (αριθμοί 6 & 7), τα αποτελέσματα των οποίων αποδεικνύουν ότι ακόμη και μαθητές προσχολικής εκπαίδευσης μπορούν να επιλύσουν με επιτυχία δραστηριότητες που απαιτούν μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό. Τέτοιες έρευνες θεωρούν πως ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός έχει ρίζες σε εμπειρίες της προσχολικής εκπαίδευσης και μπορεί να αναπτυχθεί και να καλλιεργηθεί μέσα από κατάλληλες σχολικές δραστηριότητες.

Οι αναφερόμενες έρευνες όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2 είχαν διαφορετικά αποτελέσματα, ανάλογα και με τον εκάστοτε σκοπό έρευνάς τους. Όμως στη πλειοψηφία τους αναφέρουν ως μεγαλύτερη δυσκολία των μαθητών τις λανθασμένες στρατηγικές πρόθεσης που χρησιμοποιούν και τη χαμηλή ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής τους σκέψης. Δύο σημαντικές δυσκολίες που λήφθηκαν υπόψη κατά τον σχεδιασμό των υπό διερεύνηση εκπαιδευτικών ψηφιακών εφαρμογιδίων.

Ακόμη και στην Κύπρο έχουν διενεργηθεί κάποιες έρευνες για μελέτη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τις έρευνες που εντοπίστηκαν κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση να έχουν ως συμμετέχοντες Κύπριους μαθητές δημοτικού σχολείου.

Πίνακας 3

Έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στην Κύπρο

	Ερευνητές	Σκοπός Έρευνας	Μεθοδολογία	Αποτελέσματα
1.	Papageorgiou & Christou (1999)	Διερεύνηση του βαθμού κατανόησης της έννοιας της αναλογίας από μαθητές δημοτικού σχολείου και των στρατηγικών που χρησιμοποιούν.	Διαγνωστικό δοκίμιο σε 202 μαθητές Ε’ και ΣΤ’ τάξης με προβλήματα σύγκρισης μείγματος.	Χρήση της στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα από τους μαθητές, κάτι που οι ερευνητές αποδίδουν σε προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών με προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Επίσης, οι μαθητές δεν είχαν ολοκληρωμένη αντίληψη όλων των πολλαπλασιαστικών σχέσεων που διέπουν μια αναλογία. Συνεπώς δεν αντιλαμβάνονται την αναλογία ως μια πολλαπλασιαστική σχέση.

2.	Christou & Philippou (2002)	Διερεύνησαν την άτυπη κατανόηση των μαθητών σε προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού καθώς και τις στρατηγικές επίλυσης τους.	Στην αρχή χορήγησαν ένα διαγνωστικό δοκίμιο σε 120 μαθητές Δ’ και Ε’ τάξης και ανάλογα με τα αποτελέσματα διάλεξαν 16 μαθητές για να διεξάγουν συνεντεύξεις μαζί τους καθώς έλυναν προβλήματα άγνωστης αξίας.	Οι μαθητές χρησιμοποιούσαν διαισθητικά τη στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα, κάτι που προέκυπτε από την εμπειρία τους στην επίλυση απλών πολλαπλασιαστικών προβλημάτων. Εάν δεν ήταν εύκολο να υπολογίσουν τη μονάδα τότε χρησιμοποιούσαν διαισθητικά άλλες στρατηγικές τις οποίες δεν είχαν διδαχθεί.
3.	Pittali et al. (2003)	Ανάπτυξη και διερεύνηση ενός μοντέλου για την αξιολόγηση των ικανοτήτων των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων μαθ. αναλ. συλλογισμού με βάση τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν.	Πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με 15 μαθητές ΣΤ’ τάξης κατά την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας, όπου ενθαρρύνονταν να αναπτύξουν προφορικά τον τρόπο σκέψης τους.	Το προτεινόμενο μοντέλο που αναπτύχθηκε περιγράφει τη δομή και τον αναστοχασμό των μαθητών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη ενός αποτελεσματικού εκπαιδευτικού προγράμματος ως προς την επίλυση προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Από τις τρεις έρευνες που εντοπίστηκαν να έχουν πραγματοποιηθεί στην Κύπρο και οι οποίες είχαν ως κύριο θέμα διερεύνησης την ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, παρατηρείται ότι και οι τρεις διερεύνησαν τον τρόπο σκέψης των μαθητών και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας.

Δεν εφαρμόστηκε μέχρι τώρα ένα διαφορετικό παρεμβατικό πρόγραμμα διδασκαλίας και ανάπτυξης δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού κατά την επίλυση τόσο προβλημάτων άγνωστης αξίας όσο και προβλημάτων σύγκρισης. Κάτι το οποίο επιδιώκει η παρούσα ερευνητική εργασία μέσω των ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων που δοκιμάστηκαν σε μαθητές Δ' τάξης δημοτικού.

Η προσθήκη κάποιας τεχνολογικής βοήθειας και η μελέτη του τρόπου συνεισφοράς της ως προς την καλύτερη και βαθύτερη ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε μαθητές όλων των βαθμίδων αποτελεί μια πιο καινούργια εξέλιξη στην έρευνα του συγκεκριμένου θέματος. Στην επόμενη ενότητα θα αναφερθούν ενδεικτικά κάποιες έρευνες που μελέτησαν την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω τεχνολογίας και πρόσθεσαν ευρήματα ως προς την καλύτερη κατανόηση του**.**

3.2 Έρευνες για τον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό μέσω τεχνολογίας

Κατά τη βιβλιογραφική έρευνα εντοπίστηκαν έρευνες που προσπάθησαν να διερευνήσουν την ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω κάποιας τεχνολογικής βοήθειας. Ο Πίνακας 4 περιγράφει τις έρευνες αυτές, τον σκοπό τους, τη μεθοδολογία που ακολούθησαν, τα αποτελέσματα που είχαν καθώς και την τεχνολογία που χρησιμοποιήθηκε σε κάθε μια περίπτωση.

Πίνακας 4

Έρευνες για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (με τεχνολογία)

	Ερευνητές	Σκοπός Έρευνας	Τεχνολογία που χρησιμοποιήθηκε	Μεθοδολογία	Αποτελέσματα
1.	Nabors (2003)	Συνδυασμός διδασκαλίας κλασμάτων με έννοιες λόγου-αναλογίας μέσω ενός μικρόκοσμου Η/Υ.	Μικρόκοσμος Η/Υ όπου οι μαθητές καλούνταν να επιλύσουν δραστηριότητες με κλάσματα στις οποίες περιλαμβανόταν η έννοια του λόγου και της αναλογίας.	4 μαθητές Α' γυμνασίου βιντεοσκοπήθηκαν κατά τη διάρκεια εμπλοκής τους με τον μικρόκοσμο για 12 εβδομάδες και αναλύθηκε ο τρόπος σκέψης τους.	Υπήρξε τροποποίηση των γνωστικών σχημάτων που είχαν ήδη δημιουργήσει οι μαθητές για τα κλάσματα κι αυτό αποτέλεσε τη βάση για τη δημιουργία

					γνωστικών σχημάτων που αφορούσαν κατανόηση έννοιας της αναλογίας.
2.	Boyer & Levine (2008a) (2008b) Επανάληψη της έρευνάς τους	Διερεύνηση δυσκολιών των μαθητών κατά την επεξεργασία αναλογιών με ξεχωριστές ποσότητες (έναντι συνεχόμενων ποσοτήτων). Ίδιος σκοπός έρευνας	Χρησιμοποίησαν ένα λογισμικό σε υπολογιστή, το οποίο είχαν κατασκευάσει οι ερευνητές για τη δημιουργία οπτικών αναπαραστάσεων που υποδήλωναν ισοδύναμα ζευγάρια ποσοτήτων. Ίδιο λογισμικό με μια παραλλαγή ότι ο στόχος και οι εναλλακτικές επιλογές για αντιστοίχιση παρουσιάζονται στους μαθητές διαδοχικά, ενώ στην 1η έρευνα παρουσιάζονταν ταυτόχρονα.	240 μαθητές προσχολικής εκπαίδευσης, Α’ Β’, Γ’ και Δ’ τάξης δημοτικού χρησιμοποίησαν ατομικά το λογισμικό όπου έπρεπε να αντιστοιχήσουν ισοδύναμα ζευγάρια ποσοτήτων είτε ως ξεχωριστές ποσότητες είτε ως συνεχείς. Ίδια μεθοδολογία αλλά διαφορετικό δείγμα (144 μαθητές Α’ και Γ’ τάξης).	Τα αποτελέσματα και στις δύο έρευνες έδειξαν πως οι μαθητές δυσκολεύονται σε ξεχωριστές ποσότητες όταν είναι δυνατή μια αριθμητική αντιστοίχιση, υποδηλώνοντας ότι η δυσκολία τους οφείλεται σε υπερβολική επέκταση των αριθμητικών εννοιών ισοδυναμίας.
3.	Boyer & Levine (2012a)	Εξέταση του ρόλου του τελεστή	Ίδιο λογισμικό (με την έρευνα τους το 2008) για τη	161 μαθητές προσχολικής εκπαίδευσης, Α’ Β’,	Και στις δύο έρευνες οι μαθητές

	(2012b) Επανάληψη της έρευνάς τους	κλίμακας ως προς την ανάπτυξη μαθ. αναλογικού συλλογισμού. Ίδιος σκοπός έρευνας	δημιουργία οπτικών αναπαραστάσεων ισοδύναμων ζευγαριών ποσοτήτων. Ίδιο λογισμικό	Γ' και Δ' τάξης δημοτικού χρησιμοποίησαν ατομικά το λογισμικό όπου έπρεπε να επιλέξουν τη σωστή απάντηση (αντιστοίχιση ενός ζευγαριού ποσοτήτων που παρουσιαζόταν με άλλο ισοδύναμο ζευγάρι). 129 μαθητές ίδιων ηλικιών με την πρώτη έρευνα, αλλά εδώ έπρεπε να φτιάξουν τη σωστή απάντηση (να φτιάξουν ένα ισοδύναμο ζευγάρι ποσοτήτων).	αντιμετώπιζαν δυσκολίες όταν αυξανόταν το μέγεθος της κλίμακας μεταξύ των αντίστοιχων αναλογιών. Θεώρησαν ότι η κλιμάκωση παίζει σημαντικό ρόλο, με αποτέλεσμα όσο αυξάνεται το μέγεθος της κλίμακας τόσο να μειώνεται η μαθησιακή επίδοση.
4.	Boyer & Levine (2015)	Διερεύνηση βελτίωσης μαθησιακής επίδοσης σε προβλήματα με ξεχωριστές ποσότητες, μέσω ανάπτυξης διαισθητικού αναστοχασμού σε προβλήματα	Ίδιο λογισμικό (με τις έρευνες τους το 2008 και το 2012) για τη δημιουργία οπτικών αναπαραστάσεων ισοδύναμων ζευγαριών ποσοτήτων.	Πειραματικός σχεδιασμός με 194 μαθητές προσχολικής εκπαίδευσης, Β' & Δ' τάξης, οι οποίοι χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ομάδες. Η πειραματική ομάδα ασχολήθηκε μέσω του λογισμικού αρχικά με την	Οι μαθητές Δ' τάξης της πειραματικής ομάδας είχαν υψηλότερη επίδοση στην επίλυση προβλημάτων μαθ. αναλ. συλλογισμού με ξεχωριστές ποσότητες από

		με συνεχείς ποσότητες.		επίλυση ασκήσεων με συνεχείς ποσότητες και στη συνέχεια ασκήσεις με ξεχωριστές ποσότητες. Ενώ η ομάδα ελέγχου επίλυσε μόνο ασκήσεις με ξεχωριστές ποσότητες.	τους μαθητές Δ' της ομάδας ελέγχου. Ωστόσο, δεν υπήρξε σημαντική διαφορά μεταξύ των ομάδων μαθητών προσχολικής και Β' τάξης. Συνεπώς, μαθητές μεγαλύτερης ηλικίας μπορούν να δεχθούν προτροπές ως προς τη χρήση διαισθητικών στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων μαθ. αναλ. συλλογισμού.
5.	Kaplan & Ozturk (2012)	Διερεύνηση της ανάπτυξης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω ενός ανοικτού λογισμικού.	Ανοικτό λογισμικό για τη διδασκαλία λόγου-αναλογίας που ετοιμάστηκε από δύο μαθηματικούς δημοτικής εκπαίδευσης.	Πειραματικός σχεδιασμός με 3 συνθήκες όπου σύγκριναν έναν καινοτόμο τρόπο διδασκαλίας μέσω Η/Υ (ανοικτό λογισμικό), τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας μέσω Η/Υ (έτοιμο σύστημα εξάσκησης	Καλύτερη μαθησιακή επίδοση στα διαγνωστικά δοκίμια των μαθητών της πρώτης συνθήκης. Οι ερευνητές εισηγούνται χρήση της τεχνολογίας από

				και πρακτικής) και την παραδοσιακή διδασκαλία (βιβλίο μαθηματικών). Η παρέμβαση διήρκησε τρεις εβδομάδες με 141 μαθητές ΣΤ’ τάξης.	τους εκπαιδευτικούς όχι απλά για παράδοση διδασκαλίας αλλά για τη δημιουργία ενός κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος.
6.	Rick (2012)	Σχεδιασμός και ανάπτυξη ψηφιακού εφαρμογιδίου με στόχο την υποστήριξη συνεργατικής μάθησης με θέμα το μαθ. αναλογικό συλλογισμό.	Ψηφιακό εφαρμογίδιο σε iPad	Δοκιμάστηκε πιλοτικά σε δύο μαθητές ηλικίας 9 – 10 ετών (Δ’ τάξη δημοτικού). Οι δύο μαθητές συνεργάστηκαν στις διάφορες δραστηριότητες για οικοδόμηση της έννοιας της αναλογίας. Αναλύθηκε ο τρόπος σκέψης τους μέσω των συνομιλιών τους.	Οι μαθητές κατανόησαν την έννοια της αναλογίας και απέκτησαν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω συνεργατικής μάθησης.
7.	Rick et al. (2015)	Εφαρμογή ψηφιακού εφαρμογιδίου με στόχο την υποστήριξη συνεργατικής μάθησης με θέμα το μαθ. αναλογικό συλλογισμό.	Ψηφιακό εφαρμογίδιο σε iPad	Πειραματικός σχεδιασμός με 30 μαθητές Δ’ τάξης (9-10 ετών). Υπήρχαν τρεις συνθήκες: στην συνθήκη Α’ ένας μαθητής δούλευε μόνος του στο εφαρμογίδιο, στη	Η ερευνητική ομάδα εστίασε σε μια επιτυχημένη δυάδα μαθητών (μελέτη περίπτωσης) για να περιγράψει τη διαδικασία ανάπτυξης στρατηγικών

				συνθήκη Β’ δύο παιδιά εργάζονταν ταυτόχρονα και στη συνθήκη Γ’ συμμετείχαν δύο παιδιά αλλά εργάζονταν με τη σειρά στο εφαρμογίδιο (εναλλάξ). Οι συνομιλίες μεταξύ των μαθητών και ο τρόπος που δούλεψαν και συνεργάστηκαν αναλύθηκαν μέσω βίντεο.	επίλυσης προβλημάτων μαθ. αναλ. συλλογισμού, την ανάθεση καθηκόντων, τη ρύθμιση συναισθημάτων, τους τρόπους συνεργασίας και την εστίαση των μαθητών στον κοινό τους στόχο. Όλα αυτά αναδεικνύουν τα οφέλη της συνεργατικής μάθησης και πως αυτή μπορεί να επιτευχθεί μέσω των οθονών αφής.
8.	Vandercruysse et al. (2015)	Σχεδιασμός και ανάπτυξη ψηφιακού παιχνιδιού για καλλιέργεια μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.	Σχεδίασαν και ανέπτυξαν ένα ψηφιακό παιχνίδι το οποίο περιλαμβάνει τις τρεις κατηγορίες προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (προβλήματα σύγκρισης, άγνωστης αξίας και μετατροπής).	Δοκιμάστηκε πιλοτικά σε μικρό αριθμό μαθητών τεχνικής επαγγελματικής εκπαίδευσης ηλικίας 12-16 ετών. Πραγματοποιήθηκαν ομάδες εστίασης με μαθητές & καθηγητές που χρησιμοποίησαν το ψηφιακό παιχνίδι.	Οι ερευνητές εστιάστηκαν στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του ψηφιακού παιχνιδιού που βοήθησαν τους μαθητές να αποκτήσουν δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

9.	ter Vrugte et al. (2017)	Διερεύνηση του βαθμού βελτίωσης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω της πρόσθεσης παραδειγμάτων σωστής επίλυσης προβλημάτων σε ψηφιακά περιβάλλοντα.	Δοκιμάστηκε μια παραλλαγή του ψηφιακού παιχνιδιού των Vandercruysse et al. (2015).	Πειραματικός σχεδιασμός με 93 μαθητές τεχνικής εκπαίδευσης (12-16 ετών) οι οποίοι χωρίστηκαν τυχαία σε δύο συνθήκες: στη συνθήκη Α’ οι μαθητές εργάστηκαν με παραδείγματα και στη συνθήκη Β’ χωρίς παραδείγματα σωστής επίλυσης.	Η συνθήκη Α’ παρουσίασε υψηλότερη μαθησιακή επίδοση στο διαγνωστικό δοκίμιο, αποδεικνύοντας το μεγάλο ρόλο που έχει η παροχή σωστών παραδειγμάτων σε ψηφιακά περιβάλλοντα
10	He et al. (2018)	Εξέταση του βαθμού βελτίωσης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε μαθητές 5-6 ετών μέσω της παροχής οπτικών βοηθημάτων.	Λογισμικό όπου τα παιδιά καλούνταν να συγκρίνουν το επίπεδο γλυκύτητας μεταξύ δύο μειγμάτων χυμού (προβλήματα σύγκρισης).	Διεξήγαγαν τρία πειράματα: το πρώτο πείραμα τους περιλάμβανε 26 παιδιά, το δεύτερο πείραμα πάλι 26 παιδιά και το τρίτο πείραμα 24 παιδιά). Όλοι τα παιδιά ηλικίας 5-6 ετών δοκίμασαν ατομικά το λογισμικό και αναλύθηκε ο τρόπος σκέψης τους.	Και στις τρεις περιπτώσεις παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά μπορούσαν πιο εύκολα να εντοπίσουν την ισοδυναμία και να κατανοήσουν την έννοια της αναλογίας με τη βοήθεια των οπτικο-χωρικών βοηθημάτων που τους παρείχε η τεχνολογία.
11	Schmitt & Weinberger (2019)	Καλλιέργεια συνεργασίας μαθητών για κατανόηση της έννοιας της αναλογίας	Ψηφιακό εφαρμογίδιο που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα του Rick (2012, 2015), αλλά αυτή τη	Στην έρευνα υπήρχαν τέσσερις συνθήκες στις οποίες χωρίστηκαν τυχαία 162 μαθητές ηλικίας 9-10 ετών.	Οι προτροπές δεν επηρέασαν τους μαθητές ούτε θετικά ούτε αρνητικά ως προς τα μαθησιακά

		μέσω ψηφιακού εφαρμογιδίου.	φορά προστέθηκαν στο εφαρμογίδιο προτροπές για ανάπτυξη στρατηγικών και προτροπές για εξωτερίκευση σκέψεων των μαθητών.	Η πρώτη συνθήκη περιλάμβανε εργασία με το εφαρμογίδιο μαζί με προτροπές για ανάπτυξη στρατηγικής, η δεύτερη συνθήκη περιλάμβανε εργασία με το εφαρμογίδιο μαζί με προτροπές για εξωτερίκευση σκέψεων, η τρίτη συνθήκη είχε συνδυασμό των δύο στρατηγικών και η τέταρτη εργασία με το εφαρμογίδιο χωρίς προτροπές.	οφέλη, την ποιότητα του διαλόγου, την εστίαση στο στόχο και τα συναισθήματα των μαθητών.

Στον πιο πάνω πίνακα φαίνεται ότι οι περισσότεροι ερευνητές χρησιμοποίησαν λογισμικά σε υπολογιστές. Ενώ αρκετοί ερευνητές χρησιμοποιούσαν το ίδιο λογισμικό στις έρευνές τους, κάνοντας κάποιες παραλλαγές. Κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση η πιο σημαντική έρευνα που εντοπίστηκε ήταν αυτή του Rick (2012) η οποία αναφέρει το σχεδιασμό και την ανάπτυξη ενός εφαρμογιδίου με πρωταρχικό σκοπό την υποστήριξη της συνεργατικής μάθησης μεταξύ μαθητών και με θέμα την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Είναι η πιο σημαντική έρευνα καθώς ταιριάζει με την παρούσα μελέτη στο θέμα διερεύνησης (ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού) και στην τεχνολογική υποστήριξη που χρησιμοποιείται (ψηφιακό εφαρμογίδιο). Η διαφορά ωστόσο μεταξύ της έρευνας του Rick (2012, 2015) και της παρούσας ερευνητικής μελέτης έγκειται στο γεγονός ότι η πρώτη εστίασε περισσότερο στον τρόπο συνεργασίας μεταξύ των μαθητών και στο πώς οι οθόνες αφής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για υποστήριξη της συνεργατικής μάθησης. Αντίθετα, η παρούσα εργασία διερεύνησε τη βελτίωση της μαθησιακής επίδοσης μέσω εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων και στην ανάπτυξη στρατηγικών που βοηθούν τους μαθητές να κατακτήσουν πιο εύκολα δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Το γενικό συμπέρασμα που παρατηρείται στον Πίνακα 4 είναι ότι στις αναφερόμενες έρευνες η τεχνολογία συνεισφέρει σε μεγάλο βαθμό και έχει πολλές δυνατότητες ως προς την καλύτερη ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

3.3 Περιορισμοί υφιστάμενων τεχνολογιών

Υπάρχουν ωστόσο κάποιοι περιορισμοί των υφιστάμενων τεχνολογιών οι οποίοι δημιούργησαν την ανάγκη σχεδιασμού και ανάπτυξης νέων εφαρμογιδίων για καλλιέργεια μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Αρχικά όλες οι τεχνολογίες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν στην αγγλική γλώσσα κάτι που θα δυσχέραινε την κατανόηση των μαθητών και πιθανόν και τη μαθησιακή τους επίδοση. Κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση δεν εντοπίστηκε κάποια έρευνα σε Κύπρο ή Ελλάδα που να έχει διερευνήσει τον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό σε συνδυασμό με κάποιο τεχνολογικό μέσο.

Παράλληλα οι περισσότερες έρευνες που διερεύνησαν την επίδραση της τεχνολογίας δεν εστιάζονταν σε μαθητές Δ’ τάξης δημοτικού, κάτι το οποίο επιδιώκει η παρούσα μελέτη καθώς στο κυπριακό αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών η καλλιέργεια και ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ξεκινάει στοχευμένα στην Δ’ τάξη δημοτικού με τη διδασκαλία συγκεκριμένων στρατηγικών επίλυσης και με τη προσθήκη προβλημάτων σύγκρισης και άγνωστης αξίας, προβλήματα που όμως προαναφέρθηκε αποτελούν κατηγορίες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (ΥΠΠΑΝ, 2016). Οπότε το εκάστοτε τεχνολογικό μέσο που χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενες έρευνες είτε ήταν πολύ παιδικό είτε πολύ δύσκολο για κατανόηση από μαθητές Δ’ τάξης.

Η μόνη έρευνα που εντοπίστηκε να έχει κάποια κοινά χαρακτηριστικά με την παρούσα μελέτη ήταν η έρευνα του Rick (2012, 2015), καθώς αφορούσε τη δημιουργία ενός ψηφιακού εκπαιδευτικού εφαρμογιδίου με θέμα τον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και εστιαζόταν σε μαθητές Δ’ δημοτικού. Ο περιορισμός που υπήρχε εδώ ήταν πως το εφαρμογίδιο που αναπτύχθηκε στη δική τους περίπτωση προωθούσε τη συνεργατική μάθηση μέσω του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και πρωταρχικός σκοπός της έρευνας τους ήταν η ανάπτυξη συνεργασίας μεταξύ μαθητών. Κάτι που όμως δεν αποτελεί σκοπό της παρούσας έρευνας. Επιπλέον το εφαρμογίδιο που σχεδίασαν αναπτύχθηκε σε οθόνες αφής τύπου iPad. Τα περισσότερα σχολεία όμως στην Κύπρο έχουν εξοπλιστεί με οθόνες αφής τύπου android. Συνεπώς δεν ήταν εφικτό να χρησιμοποιηθεί το δικό τους εφαρμογίδιο.

Τέλος εντοπίστηκαν κάποιες ιστοσελίδες που περιείχαν παιχνίδια με προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Εκτός όμως από τον περιορισμό στην αγγλική γλώσσα τα περισσότερα από αυτά ήταν έτοιμα συστήματα εξάσκησης και πρακτικής (τύπου drill & practice). Δεν προωθούσαν την εννοιολογική κατανόηση, τη διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης, την ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής σκέψης ούτε κατανόηση της έννοιας της αναλογίας. Χρησιμοποιούνται περισσότερο για σκοπούς εμπέδωσης κι όχι εκμάθησης νέων εννοιών μέσω ενός εναλλακτικού τρόπου διδασκαλίας όπως είναι η προσθήκη οποιασδήποτε τεχνολογικής υποστήριξης.

Για όλους τους πιο πάνω περιορισμούς κρίθηκε αναγκαία η δημιουργία νέων ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων τα οποία θα παρουσιαστούν πιο αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

4. Σχεδιασμός και ανάπτυξη εφαρμογιδίων

Στο κεφάλαιο αυτό θα επεξηγηθούν αρχικά οι λόγοι επιλογής του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ως εκπαιδευτικό θέμα ενσωμάτωσης σε ψηφιακά εφαρμογίδια. Ακολούθως θα γίνει μια σύνδεση των σύγχρονων θεωριών μάθησης με τα αναφερόμενα εφαρμογίδια και θα παρουσιαστεί η γενική φιλοσοφία πάνω στην οποία στηρίχθηκε ο σχεδιασμός και η ανάπτυξή τους. Το κεφάλαιο κλείνει με την αναλυτική και ξεχωριστή περιγραφή καθενός εφαρμογιδίου (δραστηριότητες που εμπεριέχονται, εργαλεία υποστήριξης μάθησης που έχουν ενσωματωθεί και ιδιαίτερα χαρακτηριστικά).

4.1 Ενσωμάτωση μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε ψηφιακά εφαρμογίδια

Κατά την ανάπτυξη ψηφιακών εφαρμογιδίων για εκπαιδευτικούς σκοπούς χρειάζεται το μαθησιακό περιεχόμενο να ακολουθεί τους εκπαιδευτικούς στόχους, έτσι ώστε το εφαρμογίδιο να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης. Παράλληλα, το μαθησιακό περιεχόμενο πρέπει να είναι κατάλληλο να ενσωματωθεί μέσα σε ένα εφαρμογίδιο (Vandercruysse et al., 2015). Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός επιλέχθηκε ως αντικείμενο της παρούσας έρευνας διότι είναι ένας καθορισμένος τομέας με ξεκάθαρες εφαρμογές που οδηγεί στην εννοιολογική κατανόηση. Αυτά τα χαρακτηριστικά τον καθιστούν κατάλληλο για ενσωμάτωσή του σε εκπαιδευτικό εφαρμογίδιο, ένταξή του σε ένα σχολικό πλαίσιο και επιστημονική αξιολόγηση.

Παράλληλα, η ανάπτυξη του συγκεκριμένου συλλογισμού θεωρείται σημαντικό θέμα στα μαθηματικά και λαμβάνοντας υπόψη τις στενές σχέσεις που έχει με λόγους-αναλογίες, κλάσματα, ποσοστά, ρητούς αριθμούς και άλλες έννοιες, είναι ένα θέμα που καλύπτει ολόκληρο το αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών από το δημοτικό ως το πανεπιστήμιο (Lamon, 2007). Επιπρόσθετα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, θεωρείται συχνά κι ως μια συχνή πηγή δυσκολίας για τους μαθητές λόγω της μαθηματικής του πολυπλοκότητας και των γνωστικών προκλήσεών του.

Η σχέση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού με το αναλυτικό πρόγραμμα, οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές και η αναζήτηση εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων όπως είναι κάποια τεχνολογική υποστήριξη, δημιουργούν ένα πλαίσιο όπου η έρευνα σε σχέση με το αναφερόμενο θέμα κρίνεται ως αναγκαία.

4.2 Επίδραση θεωριών μάθησης στο σχεδιασμό των εφαρμογιδίων

Ο σχεδιασμός και η ανάπτυξη των δύο εφαρμογιδίων ακολουθούν τις αρχές των σύγχρονων θεωριών μάθησης και ιδιαίτερα εφαρμόζουν στην πράξη την ιδεολογία του εποικοδομισμού και της γνωστικής επιστήμης. Συγκεκριμένα η συμβολή του εποικοδομισμού στο σχεδιασμό μαθησιακών περιβαλλόντων στηρίζεται στη βασική αρχή ότι η γνώση δεν μεταφέρεται ούτε επιβάλλεται στους ανθρώπους από έξω, αλλά οικοδομείται από το ίδιο το άτομο και διαμορφώνεται μέσα του (Schunk, 2010). Η σύγχρονη άποψη για τη μάθηση στηρίζεται στην αντίληψη ότι οι άνθρωποι οικοδομούν νέες γνώσεις και έννοιες βασισμένες σε προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες τους (Bransford et al., 2000). Η μάθηση δεν είναι αποτέλεσμα μετάδοσης της γνώσης, ούτε και οι μαθητές απλοί παθητικοί δέκτες. Αντίθετα πρόκειται για μια ενεργητική διαδικασία όπου οι εκπαιδευόμενοι εμπλέκονται ενεργά σε δραστηριότητες αυθεντικού τύπου χρησιμοποιώντας πραγματικά εργαλεία.

Από την άλλη, η γνωστική επιστήμη δίνει έμφαση στις οπτικές αναπαραστάσεις, στο ρόλο του αναστοχασμού κατά τη μαθησιακή διαδικασία και στην ανάπτυξη των μαθητών από αρχάριους σε ειδήμονες. Ένα γνωστικό μοντέλο που επηρέασε το σχεδιασμό των εφαρμογιδίων αποτελεί η Πολυμεσική Μάθηση (Multimedia Learning). Πρόκειται για μια σειρά αρχών σχεδίασης, οι οποίες καθοδηγούν την οργάνωση της πληροφορίας σε οθόνες εφαρμογών πολυμέσων. Οι αρχές αυτές αφορούν μείωση της επιπρόσθετης επεξεργασίας, χειρισμό της βασικής επεξεργασίας και προώθηση της παραγωγικής επεξεργασίας (Mayer, 2009). Αποτελούν ερευνητικά εγκυροποιημένες αρχές για το σχεδιασμό πολυμεσικών περιβαλλόντων μάθησης.

Οι συγκεκριμένες αρχές εφαρμόστηκαν κατά την ανάπτυξη των εφαρμογιδίων με στόχο την κατάλληλη οπτική και ακουστική παρουσίαση των πληροφοριών προς τους μαθητές και τη διευκόλυνση της εκπαιδευτικής διαδικασίας στην τεχνολογικά υποστηριζόμενη μάθηση. Πιο αναλυτικά και στα δύο εφαρμογίδια παρέχονται μόνο οι σημαντικές πληροφορίες και αποφεύγονται οι περιττές λέξεις, εικόνες και ήχοι. Υπάρχει συνδυασμός γραφικών και παράλληλης αφήγησης, χωρίς υπερβολική χρήση λέξεων. Οι λέξεις και οι εικόνες παρουσιάζονται κοντά στην οθόνη και ταυτόχρονα την ίδια στιγμή. Μέσω του συνδυασμού εικόνων-λέξεων προωθείται η καλύτερη κατανόηση. Ακόμη η διαδικασία μάθησης χωρίζεται σε μικρά συγκεκριμένα βήματα. Οι δραστηριότητες παρουσιάζονται διαδοχικά σε τμήματα με ρυθμό που ελέγχει ο κάθε μαθητής, παρά ως συνεχόμενο μάθημα.

Παράλληλα, προστέθηκαν ενδείξεις που δείχνουν την οργάνωση του μαθησιακού περιεχομένου. Έτσι, με κατάλληλα σύμβολα οι μαθητές μπορούν να πλοηγηθούν μόνοι τους εντός των εφαρμογιδίων και να ακολουθήσουν την πορεία των δραστηριοτήτων. Χρησιμοποιείται απλό και κατανοητό λεξιλόγιο, η αφήγηση γίνεται από φιλική ανθρώπινη φωνή και δεν χρησιμοποιούνται κινούμενες εικόνες ούτε παρουσιάζεται η εικόνα του αφηγητή προς αποφυγή διάσπασης προσοχής των μαθητών. Επιπλέον, παρουσιάζονται με διαδραστικό τρόπο καινούργιες έννοιες (π.χ. η έννοια της αναλογίας) και επεξηγείται ο ορισμός τους. Δίνεται έμφαση στην ενεργή εξάσκηση και ο κάθε μαθητής ασκείται συστηματικά στο να αναπτύξει τις γνώσεις και τις δεξιότητες που αποτελούν τους εκπαιδευτικούς στόχους των εφαρμογιδίων.

Απώτερος σκοπός και των δύο εφαρμογιδίων είναι να βοηθήσουν τους μαθητές να γίνουν ενεργοί οικοδόμοι της μάθησής τους. Μέσα από τις δραστηριότητες που έχουν ενσωματωθεί υπάρχει συνεχώς ενεργή και εποικοδομητική εμπλοκή των ίδιων των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει το ρόλο του διαμεσολαβητή και βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν το μαθησιακό περιεχόμενο που περιλαμβάνεται εντός των εφαρμογιδίων. Λειτουργεί ως υποστηρικτής και διευκολύνει τους μαθητές στη διαδικασία οικοδόμησης νέων εννοιών, οργανώνοντας τη μαθησιακή διαδικασία.

Έτσι σταδιακά εγκαθιδρύεται η μάθηση και προωθείται η βαθύτερη κατανόηση των εννοιών που τα δύο εφαρμογίδια φιλοδοξούν να καλλιεργήσουν. Σύμφωνα με την εγκαθιδρυμένη μάθηση, η κατανόηση και η μάθηση συντελείται μέσα σ’ ένα σύστημα δραστηριότητας όπου υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα σε ανθρώπους (εκπαιδευτικός-μαθητές), μέσα, μεθόδους, υλικά και τεχνολογικό εξοπλισμό. Επομένως, τα μαθησιακά περιβάλλοντα είναι συστήματα δραστηριοτήτων όπου οι συμμετέχοντες αλληλεπιδρούν τόσο μεταξύ τους όσο και με υλικές και τεχνολογικές πηγές που υπάρχουν στο άμεσο περιβάλλον τους. Η δραστηριότητα και συνεπώς η μάθηση πρέπει να διαπραγματευθεί και να οικοδομηθεί ενεργά απ’ όλους τους συμμετέχοντες του συστήματος δραστηριότητας (Greeno & Engeström, 2014).

Στην οικοδόμηση της γνώσης οι μαθητές εργάζονται με προβλήματα, δοκιμασίες και δραστηριότητες που στόχο έχουν τη βαθιά κατανόηση και δόμηση της διαδικαστικής γνώσης – γνώση του πως (Scardamalia & Bereiter, 2006). Η συγκεκριμένη γνώση αποτελεί και στόχο των αναφερόμενων εφαρμογιδίων, δηλαδή να γνωρίζουν οι μαθητές πώς να συγκρίνουν δύο ζευγάρια ποσοτήτων ή πώς να εντοπίσουν άγνωστους αριθμούς εντός αναλογικών σχέσεων, ποια διαδικασία πρέπει να ακολουθήσουν, να μπορούν να επεξηγούν γιατί βρήκαν ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα και με ποιο τρόπο το βρήκαν, ποια στρατηγική εφάρμοσαν. Πραγματοποιείται με άλλα λόγια ένας συνδυασμός δηλωτικής με διαδικαστικής γνώσης.

Ταυτόχρονα, στο 1^{ο} εφαρμογίδιο: *σύγκριση ποσοτήτων* προωθείται η μάθηση μέσω κατασκευών (constructionism). Η απόκτηση νέας γνώσης συντελείται πιο αποτελεσματικά όταν οι μαθητές ασχολούνται με την κατασκευή προϊόντων και κατέχουν ένα ενεργό ρόλο κατασκευαστή. Οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν κάτι για να το μάθουν (Papert, 1993). Γενικά οι άνθρωποι δεν δέχονται έτοιμες ιδέες αλλά τις κατασκευάζουν, δεν είναι παθητικοί ακροατές και δεν απομνημονεύουν, αλλά πειραματίζονται και διερευνούν.

Αντίθετα, στο 2^{ο} εφαρμογίδιο: *αναλογίες* οι μαθητές μπορούν να εξερευνήσουν και να ανακαλύψουν την έννοια της αναλογίας μόνοι τους, καθώς υπάρχει η οθόνη της ανακάλυψης. Οι μαθητές βλέπουν τους εαυτούς τους ως εξερευνητές της μάθησής τους (αυτοί που διερευνούν ασαφείς κι άγνωστες έννοιες) κι όχι σαν παθητικούς δέκτες πληροφοριών και στείρας γνώσης.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο που συνδέει τον σχεδιασμό των συγκεκριμένων εφαρμογιδίων με σύγχρονες θεωρίες μάθησης είναι η υποστήριξη της ανάπτυξης εμπειρογνωμοσύνης που παρατηρείται σε αυτά, ένας μόνιμος στόχος στη ψηφιακή μάθηση. Τα συγκεκριμένα εφαρμογίδια βοηθάνε τους μαθητές να αποκτήσουν σταδιακά εμπειρογνωμοσύνη και να γίνουν έμπειροι γνώστες. Η ανάπτυξη εμπειρογνωμοσύνης βοηθά στην εννοιολογική αλλαγή, στον εμπλουτισμό γνώσεων και στον αυτοματισμό. Οι έμπειροι μαθητές σ' ένα τομέα έχουν την ικανότητα να παρατηρούν μοτίβα σημαντικών πληροφοριών σε σύγκριση με αρχάριους μαθητές, να οργανώνουν καλύτερα τις γνώσεις τους με σημαντικές συνδέσεις ανάμεσα σε στοιχεία και διαδοχικά αποκτούν αυτοματοποίηση και αυτό-ρυθμίζουν το επίπεδο κατανόησής τους (Bransford et al., 2000).

Μέσω της ανάπτυξης της εμπειρογνωμοσύνης, τα γνωστικά σχήματα ενός μαθητή αλλάζουν με την εμπειρία, οι πληροφορίες ομαδοποιούνται και ανασύρονται πιο εύκολα από τη μνήμη. Η διαδικασία της μάθησης απαιτεί λιγότερη προσπάθεια και λιγότερο χρόνο. Η γνωστική δομή ενδυναμώνεται και κάποιες διαδικασίες αυτοματοποιούνται, γιατί πλέον είναι διαδικασίες στις οποίες ο μαθητής έχει αποκτήσει εμπειρία και τις γνωρίζει πλέον πολύ καλά. Τα δύο αυτά εφαρμογίδια βοηθάνε τους μαθητές να γίνουν ειδήμονες και να αποκτήσουν μια αίσθηση αυτοπεποίθησης, καθώς προωθούν τον αυτοματισμό γνώσεων και δεξιοτήτων, ο οποίος επιτρέπει στους μαθητές να είναι πιο γρήγοροι στις απαντήσεις τους.

Κατά τον σχεδιασμό των εφαρμογιδίων δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στην παροχή κινήτρων προς τους μαθητές, στην προσέλκυση της προσοχής τους με ένα σύγχρονο και ευχάριστο τρόπο καθώς και στη συνεχή εκούσια ενασχόληση τους με αυτά. Σύμφωνα με τον Schunk (2010), τα κατάλληλα κίνητρα ωθούν τους μαθητές σε δραστηριότητες που αναπτύσσουν τη μαθησιακή διαδικασία και βοηθούν να επέλθει η μάθηση. Η ανατροφοδότηση που λαμβάνουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια ή στο τέλος μιας δραστηριότητας εντός των εφαρμογιδίων είναι ένα είδος κινήτρου, καθώς τους παρέχει πληροφορίες σχετικά με την πρόοδό τους και τους στόχους που έχουν θέσει.

Με την ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος, υπάρχει αύξηση των κινήτρων και της παρώθησης αλλά και πιο αποτελεσματική εμπλοκή των μαθητών κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Τα περιβάλλοντα μάθησης που θέλουν να ενεργοποιούν το ενδιαφέρον αλλά και να διατηρούν σε υψηλό επίπεδο την παρώθηση και την εμπλοκή χρειάζεται να υποστηρίζουν το περιεχόμενο μάθησης μέσω αλληλεπιδράσεων και να παρέχουν υποστήριξη μάθησης, έτσι ώστε οι μαθητές να επεξεργάζονται κατάλληλα το περιεχόμενο. Όταν οι μαθητές εμπλέκονται και επιμένουν σε μια δραστηριότητα, τότε αυτορρυθμίζουν τη μαθησιακή τους συμπεριφορά και θεωρούνται ως μαθητές που έχουν κίνητρα για μάθηση (Jarvela & Renninger, 2014).

Κατά τους Blumenfeld et al. (2006) κάποιοι παράγοντες που συνεισφέρουν στην παρώθηση και στη γνωστική εμπλοκή είναι η προσδοκία – αξία (δηλαδή η ανάγκη για επιτυχία σε πλαίσια επίδοσης), το αίσθημα του ανήκειν (δηλαδή το να νιώθει κάποιος άνετα σε μια δραστηριότητα και να γνωρίζει τι πρέπει να κάνει) και η αυτονομία-πρωτοβουλία. Και οι τρεις αυτοί παράγοντες χαρακτηρίζουν σε μεγάλο βαθμό τα δύο εφαρμογίδια, τα οποία συνδράμουν στη βαθιά ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος, στη διατήρηση της παρώθησης και στην ενεργή εμπλοκή-ενασχόληση με την οικοδόμηση της γνώσης.

Ξεχωριστή αναφορά θα γίνει για την υποστήριξη μάθησης (scaffolding), καθώς είναι ένα θέμα που εντοπίζεται σε μεγάλο βαθμό στα υπό διερεύνηση εφαρμογίδια. Ο όρος υποστήριξη της μάθησης προέρχεται από την ιδέα του Ρώσου ψυχολόγου Vygotsky για τη Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης. Η ΖΕΑ αναφέρεται στην πραγματοποίηση μιας δοκιμασίας που χωρίς κατάλληλη βοήθεια δεν θα ήταν εφικτή και θα βρισκόταν εκτός των ικανοτήτων ενός ατόμου, αλλά με σωστή υποστήριξη βρίσκεται εντός των δυνατοτήτων του. Επομένως, η υποστήριξη μάθησης αναφέρεται σε μια προσπάθεια στήριξης των μαθητών να αποκτήσουν σταδιακά μεγαλύτερη ευχέρεια σε μια δραστηριότητα (Tabak & Kyza, 2018).

Η ενσωμάτωση κατάλληλων εργαλείων υποστήριξης στα δύο εφαρμογίδια φέρνει τη μάθηση εντός της Ζώνης Επικείμενης Ανάπτυξης και βοηθά τους μαθητές να διαχειριστούν το μαθησιακό έργο, δίνει νέες δυνατότητες για αυθεντική μάθηση, συνεισφέρει στη διατήρηση κινήτρων – ενδιαφέροντος και βοηθά στην εστίαση της προσοχής στα σημαντικά σημεία μιας δραστηριότητας. Μέσω των πιο πάνω η κατάλληλη υποστήριξη μπορεί να μετασχηματίσει τις διαδικασίες μάθησης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η υποστήριξη μάθησης κατέχει πρωταγωνιστικό ρόλο. Σύμφωνα με τους Quintana et al. (2004), τα εργαλεία υποστήριξης που εντοπίζονται σε ένα ψηφιακό περιβάλλον μάθησης για να μετατρέψουν τις δοκιμασίες και να βοηθήσουν τους μαθητές, παρέχουν ευκαιρίες για μάθηση και οδηγούν σε μεγαλύτερη επιτυχία.

Στις πιο κάτω ενότητες θα παρουσιαστούν πιο αναλυτικά οι μορφές υποστήριξης της μάθησης που ενσωματώθηκαν εντός των εφαρμογιδίων.

4.3 Φιλοσοφία ανάπτυξης των δύο ψηφιακών εφαρμογιδίων

Ο σχεδιασμός των δύο εφαρμογιδίων, εκτός από τις σύγχρονες θεωρίες μάθησης, βασίστηκε και στο Νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών Κύπρου σε σχέση με την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που η διδασκαλία του ξεκινάει στοχευμένα στη Δ’ τάξη δημοτικού. Παράλληλα, στηρίχθηκε στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία κι έγινε προσπάθεια αντιμετώπισής τους μέσω της συγκεκριμένης τεχνολογίας. Οι δυσκολίες των μαθητών παρουσιάστηκαν ήδη εκτενέστερα στο κεφάλαιο του θεωρητικού πλαισίου, ωστόσο οι πιο συνηθισμένες αφορούν τις λανθασμένες στρατηγικές πρόσθεσης και τη χαμηλή ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης.

Συνεπώς κατά τον σχεδιασμό δόθηκε αρχικά ιδιαίτερη έμφαση στην καλλιέργεια κάποιων συστατικών στοιχείων του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού σε μια προσπάθεια αντιμετώπισης των συγκεκριμένων δυσκολιών. Συγκεκριμένα κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα εφαρμογίδια ενισχύεται η πολλαπλασιαστική τους σκέψη, καθώς παρουσιάζεται συνεχώς με διάφορες οπτικές αναπαραστάσεις η πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των ποσοτήτων.

Ακόμη, μέσω των εφαρμογιδίων γίνεται προσπάθεια αισθητοποίησης των εννοιών λόγου-αναλογίας. Ο λόγος παρουσιάζεται ως ένα ζευγάρι ποσοτήτων (ποσότητα Α' – ποσότητα Β' και η σχέση μεταξύ τους) και η κατανόηση της έννοιας της αναλογίας γίνεται με διαδραστικό τρόπο, αυξάνοντας ή μειώνοντας τα ζευγάρια ποσοτήτων κατά τον ίδιο αριθμό, παραμένοντας κάθε φορά ίσα μεταξύ τους.

Επιπλέον, η προσοχή των μαθητών εστιάζεται συνεχώς στην αλλαγή των ποσοτήτων. Μέσω κατάλληλης τεχνολογικής βοήθειας γίνεται προσπάθεια οι μαθητές να κατανοήσουν τι αλλάζει και ποια σχέση παραμένει σταθερή. Οι ποσότητες του αριθμητή και του παρονομαστή σε ένα ζευγάρι αυξάνονται ή μειώνονται κατά τον ίδιο αριθμό. Ωστόσο, η σχέση μεταξύ τους παραμένει η ίδια όπως πριν από την αλλαγή. Τόσο η παράλληλη αλλαγή των ποσοτήτων, όσο και η σταθερή σχέση αναλογίας παρουσιάζονται με τρόπο απλό και επεξηγηματικό.

Μέσω της σταδιακής αλλά και συστηματικής καλλιέργειας των τριών αυτών συστατικών στοιχείων, θεωρήθηκε ότι θα αναπτυχθεί καλύτερα μέσω τεχνολογίας ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός, που αποτελεί πρωταρχικό σκοπό της έρευνας.

Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στην παροχή άμεσης ανατροφοδότησης με διάφορους οπτικοακουστικούς τρόπους. Η τεχνολογία και ιδιαίτερα τα ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια έχουν τη δυνατότητα να παρέχουν πιο εξελιγμένη και βοηθητική ανατροφοδότηση, η οποία βοηθά τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν άμεσα τα αποτελέσματα των ενεργειών τους κατά την εκτέλεση διάφορων δραστηριοτήτων (Rick, 2012).

Στη συνέχεια δόθηκε έμφαση στα είδη προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που θα χρησιμοποιούνταν στα εφαρμογίδια. Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο οι μαθητές έρχονται σε επαφή με δύο κατηγορίες προβλημάτων: προβλήματα σύγκρισης και προβλήματα άγνωστης αξίας. Γι' αυτό το λόγο κρίθηκε πιο βοηθητικό να αναπτυχθούν δύο σύντομα και μικρά σε έκταση εφαρμογίδια, παρά ένα που θα περιλάμβανε μαζί και τις δύο κατηγορίες προβλημάτων και ίσως να ήταν πιο σύνθετο και πολύπλοκο για κατανόηση από τους μαθητές της συγκεκριμένης ηλικίας. Επομένως, αναπτύχθηκαν τα δύο αναφερόμενα εφαρμογίδια, όπου το πρώτο αφορούσε προβλήματα σύγκρισης και το δεύτερο προβλήματα άγνωστης αξίας.

Τα δύο εφαρμογίδια μπορούν να εγκατασταθούν σε οθόνες αφής τύπου android ως αυτόνομες εκδοχές (stand-alone version). Δεν χρειάζονται διαδίκτυο για να λειτουργήσουν ούτε και οι μαθητές χρειάζεται να συνδεθούν ως χρήστες. Μετά την εγκατάστασή τους στις οθόνες αφής, ο εκάστοτε χρήστης πατάει το αντίστοιχο εικονίδιο του κάθε εφαρμογιδίου και μπορεί να το χρησιμοποιήσει αυτόνομα και ανεξάρτητα ακολουθώντας τις οδηγίες.

Οι μαθητές-χρήστες μπορούν να επιλύσουν τις διάφορες δραστηριότητες που τους εμφανίζονται με δύο τρόπους: «σέρνοντας» και «τοποθετώντας» (drag-and-drop) τους αριθμούς και τις εικόνες, αλλά και κάνοντας κλικ (point-and-click) με το δάχτυλό τους εκεί που χρειάζεται.

Στο πρώτο εφαρμογίδιο δεν υπάρχει χρονόμετρο σε κάθε δραστηριότητα, έτσι ο κάθε μαθητής ακολουθεί το δικό του ρυθμό μάθησης. Αντίθετα, στο δεύτερο εφαρμογίδιο έχει ενσωματωθεί χρονόμετρο μόνο κατά την επίλυση των προβλημάτων άγνωστης αξίας, αλλά έχει καθαρά ενημερωτικό χαρακτήρα. Επιπρόσθετα και στα δύο εφαρμογίδια έχουν ενσωματωθεί εργαλεία υποστήριξης της μάθησης τα οποία θα αναφερθούν πιο αναλυτικά παρακάτω.

4.4 Υποστήριξη μάθησης σε ψηφιακά περιβάλλοντα

Η ψηφιακή μάθηση θεωρείται συχνά ως ένα πολύπλοκο μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο οι εκπαιδευόμενοι χρειάζονται κάποια εκπαιδευτική υποστήριξη για να εμπλακούν στις γνωστικές διαδικασίες, όπως είναι η ενσωμάτωση των νέων πληροφοριών (Wouters & Van Oostendorp, 2013). Η υποστήριξη μάθησης μπορεί να πάρει πολλές μορφές. Πιο συγκεκριμένα είναι κάθε είδους βοήθεια, καθοδήγηση, συμβουλή ή οδηγία που θα βοηθήσει τους μαθητές να μάθουν. Κάποια παραδείγματα είναι οι επεξηγήσεις, οι οδηγίες, οι προτροπές, οι αναθέσεις, η παροχή συμβουλών, εργαλεία παρακολούθησης, η οπτική αναπαράσταση, η μοντελοποίηση, εργαλεία σχεδιασμού, κ.ά. (Tobias et al., 2011).

Η προσθήκη εκπαιδευτικής υποστήριξης αναμένεται ότι θα διευκολύνει τη ψηφιακή μάθηση και είναι ένα σημαντικό στοιχείο για τα σχεδιασμό κατάλληλων ψηφιακών εφαρμογιδίων. Μέσω της σωστής μαθησιακής υποστήριξης και βοήθειας, οι μαθητές θα αξιοποιήσουν τη μαθησιακή τους εμπειρία και να έχουν θετικά μαθησιακά αποτελέσματα (Fisch, 2005). Τα εφαρμογίδια που περιλαμβάνουν εκπαιδευτική υποστήριξη, βοηθούν τους εκπαιδευομένους να αναλαμβάνουν πιο ενεργό ρόλο στη μάθησή τους και να βελτιώσουν τη μαθησιακή τους απόδοση.

Παρακάτω περιγράφονται τα χαρακτηριστικά των μορφών υποστήριξης μάθησης, οι οποίες έχουν ενσωματωθεί στα δύο ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια:

1. Ανατροφοδότηση

Η ανατροφοδότηση είναι ζωτικής σημασίας στη ψηφιακή μάθηση. Είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα κατά την οποία οι άνθρωποι σκέφτονται και αξιολογούν μια εμπειρία τους. Παρέχεται είτε με τη μορφή κάποιου βαθμού/θετικού σχόλιου είτε με τη μορφή κάποιας αλλαγής, κάποιου λάθους που έγινε και πρέπει να διορθωθεί. Έτσι οι μαθητές παρακολουθούν την πρόοδο τους προς την επίτευξη του στόχου τους (Prensky, 2001). Η ανατροφοδότηση που παρέχεται από ένα ψηφιακό εφαρμογίδιο ανάλογα με τις απαντήσεις/ενέργειες κάποιου χρήστη θα πρέπει να υποστηρίζει την αναστοχαστική σκέψη και την οικοδόμηση γνώσης, επικεντρώνοντας την προσοχή του σε σχετικές πληροφορίες με το μαθησιακό περιεχόμενο (Kiili, 2007). Στόχος της συγκεκριμένης στρατηγικής είναι να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ του επιπέδου απόδοσης/κατανόησης των μαθητών και των μαθησιακών στόχων που πρέπει να επιτύχουν (Brand-Gruwel et al, 2014). Υπάρχουν δύο ειδών ανατροφοδότησης: γνώση/ανατροφοδότηση σχετικά με την ορθότητα της απάντησης (knowledge of correct response feedback) και γνώση/ανατροφοδότηση με επεξηγηματικό σχόλιο (elaborated response feedback). Το πρώτο είδος είναι διορθωτικό και παρέχει στους μαθητές τη σωστή απάντηση μετά από μια λανθασμένη απάντηση, ενώ το δεύτερο είδος είναι επεξηγηματικό και εξηγεί γιατί μια απάντηση ήταν λανθασμένη (Law & Chen, 2016).

2. Προτροπές

Η προτροπή είναι μια ένδειξη που δίνεται σε κάποιον για να τον βοηθήσει ή να τον κινητοποιήσει για να ενεργήσει εγκαίρως και άμεσα. Οι προτροπές που ενσωματώνονται στο μαθησιακό περιεχόμενο ενεργοποιούν τους μαθητές να εκτελέσουν δεξιότητες σε συστηματική βάση και κατευθύνουν την προσοχή τους κατά τη γνωστική επεξεργασία του μαθησιακού υλικού (Brand-Gruwel et al., 2014). Εδώ περιλαμβάνεται και η προτρεπόμενη σειρά ενεργειών βήμα με βήμα για την επίτευξη μιας δραστηριότητας. Οι προτροπές δεν περιορίζονται μόνο στο πού θα εστιάσει την προσοχή του ο μαθητής, αλλά και στο τι θα μάθει στο ψηφιακό εφαρμογίδιο (Law & Chen, 2016).

3. Οπτικοποίηση

Η οπτική αναπαράσταση ή αλλιώς οπτικοποίηση, όπως τα διαγράμματα και οι εικόνες, είναι μια εξωτερική μορφή των γνωστικών εννοιών και έχει αναγνωριστεί ως ένα ισχυρό εργαλείο στη μάθηση. Μέσω αυτής τονίζονται συγκεκριμένες σχέσεις και προωθούνται γνωστικές λειτουργίες όπως είναι η οικοδόμηση της γνώσης καθώς και η βαθύτερη κατανόηση της. Παράλληλα, συμβάλλει στη μείωση της γνωστικής υπερφόρτωσης, παρέχοντας μόνο τα σημαντικά στοιχεία για μάθηση (Yung & Paas, 2015).

4. Μοντελοποίηση

Η μοντελοποίηση αναφέρεται στην αναπαράσταση κάποιας δοκιμασίας από κάποιον ειδικό (Brand-Gruwel et al., 2014). Εντός της σχολικής τάξης η μοντελοποίηση γίνεται από τον εκπαιδευτικό ή κάποιον αντίστοιχο αρμόδιο στο εκάστοτε θέμα. Στη ψηφιακή μάθηση τον ρόλο αυτό αναλαμβάνει κάποιος διαμεσολαβητής. Στην περίπτωση των εν λόγω ψηφιακών εφαρμογιδίων για ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, η μοντελοποίηση θα είναι λεκτική και θα περιλαμβάνει σταδιακή επεξήγηση σε συνδυασμό με οπτική αναπαράσταση των βημάτων που καλούνται οι μαθητές να ολοκληρώσουν.

5. Παροχή στόχου

Δίνεται απλή και ξεκάθαρη επεξήγηση στους μαθητές για το ποιος είναι ο στόχος τους σε κάθε εφαρμογίδιο, τι αναμένεται από αυτούς να κάνουν και πού θα τους βοηθήσει το κάθε εφαρμογίδιο.

Χωρίς την κατάλληλη εκπαιδευτική υποστήριξη ή την απουσία εκπαιδευτικής υποστήριξης, οι εκπαιδευόμενοι θα μάθουν μόνο να παίζουν σ' ένα εφαρμογίδιο, αντί να μάθουν παράλληλα και το εκπαιδευτικό υλικό που είναι ενσωματωμένο σε αυτό (Ke, 2009). Η αποτελεσματική υποστήριξη της μάθησης μπορεί να καλύψει το χάσμα μεταξύ των ικανοτήτων των μαθητών και των προσδοκιών των στόχων, να βοηθήσει τους μαθητές να εσωτερικεύσουν τη γνώση κατά την αλληλεπίδραση τους με τα διάφορα εργαλεία εκπαιδευτικής υποστήριξης και ταυτόχρονα να επιτύχουν τους στόχους τους (Sun et al., 2011).

Στις επόμενες δύο ενότητες θα επεξηγηθεί πιο αναλυτικά με ποιο τρόπο ενσωματώθηκαν οι πιο πάνω μορφές υποστήριξης μάθησης κατά τον σχεδιασμό των εφαρμογιδίων. Ακόμη πιο κάτω δίνονται και οι υπερσύνδεσμοι όπου εντοπίζονται τα δύο εφαρμογίδια για εγκατάσταση σε οθόνες αφής και χρησιμοποίησή τους. Ωστόσο, για λόγους προστασίας οι δύο υπερσύνδεσμοι για να ανοίξουν, χρειάζονται έγκριση από την εταιρεία που προγραμμάτισε και ανέπτυξε τα συγκεκριμένα εφαρμογίδια. Όποιος αναγνώστης επιθυμεί να χρησιμοποιήσει τα δύο αυτά εφαρμογίδια, μπορεί να αποστείλει σχετικό αίτημα στην εταιρεία info@smileandlearn.net ή στη σχεδιάστρια-ερευνήτρια trillidouvirginia@gmail.com

4.5 Χαρακτηριστικά 1ου εφαρμογιδίου: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

Το πρώτο ψηφιακό εφαρμογίδιο που σχεδιάστηκε για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ονομάζεται ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ. Η ανάπτυξη του συγκεκριμένου συλλογισμού ξεκινάει με την αντίληψη εκ μέρους των μαθητών ότι υπάρχουν δύο ή και περισσότερες ποσότητες που συγκρίνονται μεταξύ τους και η οποία σύγκριση οδηγεί στην ύπαρξη ή όχι μιας αναλογίας.

Έτσι το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο αφορά μια εισαγωγή στην έννοια των αναλογιών και στόχος του είναι να μάθουν οι μαθητές να συγκρίνουν δύο ζευγάρια ποσοτήτων (ίσα ή άνισα). Το εφαρμογίδιο αυτό συγκαταλέγεται στην κατηγορία της σύγκρισης προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και στοχεύει στην εκμάθηση της στρατηγικής επίλυσης των «εντός» σχέσεων, δηλαδή τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων του ίδιου είδους. Εντοπίζεται στον ακόλουθο σύνδεσμο και μπορεί να εγκατασταθεί μόνο σε οθόνες αφής (tablet) τύπου android:

https://drive.google.com/file/d/1xATs4oXJd6j9Z5I6qgGBVACjLxP9bs2f/view?ts=5e8b3a46

Πιο αναλυτικά αποτελείται από πέντε στάδια. Σε κάθε στάδιο υπάρχουν τρεις δραστηριότητες όπου οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν διάφορα μείγματα ανάλογα με τα συστατικά υλικά που τους δίνονται κάθε φορά και στη συνέχεια να απαντήσουν σε μια ερώτηση σύγκρισης μεταξύ των μειγμάτων που θα έχουν κατασκευάσει. Η ερώτηση εμφανίζεται μετά την ολοκλήρωση κατασκευής των μειγμάτων από τους μαθητές. Υπάρχουν πέντε ίδιες κατασκευές, αλλά με διαφορετικούς αριθμούς στις ποσότητες κάθε φορά. Αυτό έγινε σκόπιμο καθώς χρειάζεται η προσοχή των μαθητών να εστιάζεται στους αριθμούς των ποσοτήτων και στις σχέσεις μεταξύ τους κι όχι στις κατασκευές που θα φτιάχνουν.

Συνοπτικά οι κατασκευές που έχουν να φτιάξουν οι μαθητές είναι:

1. Φτιάξιμο λεμονάδων (Διάγραμμα 6)
2. Ανάμειξη μπογιών (Διάγραμμα 7)
3. Φτιάξιμο πιτσών (Διάγραμμα 8)

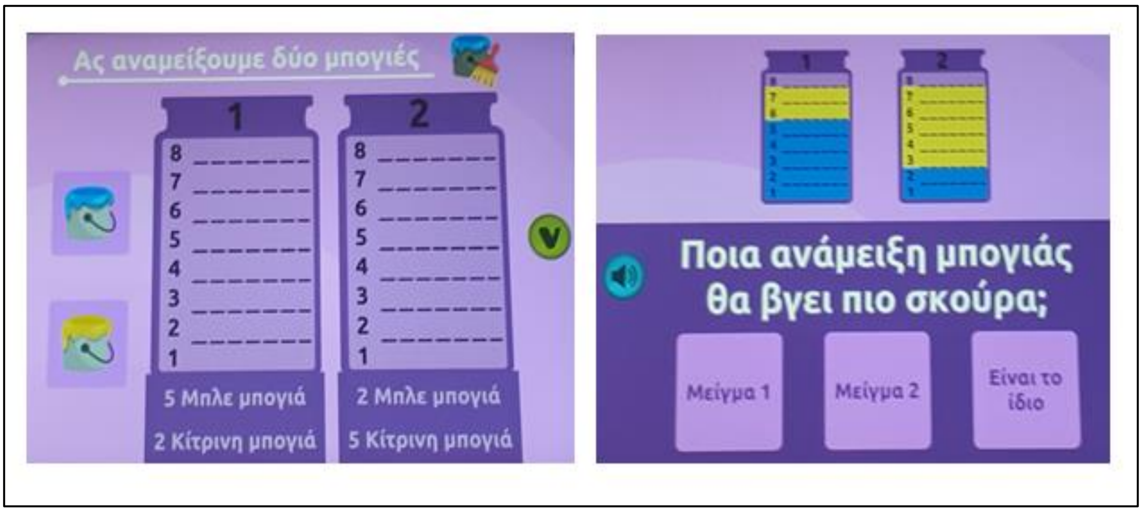
4. Ετοιμασία τσαγιών (Διάγραμμα 9)
5. Φτιάξιμο μπισκότων (Διάγραμμα 10)

Διάγραμμα 6

1^{o} Εφαρμογίδιο: Φτιάξιμο λεμονάδων - Ερώτηση σύγκρισης των δύο μειγμάτων

Διάγραμμα 7

1^{o} Εφαρμογίδιο: Ανάμειξη μπογιών - Ερώτηση σύγκρισης των δύο μειγμάτων



Διάγραμμα 8

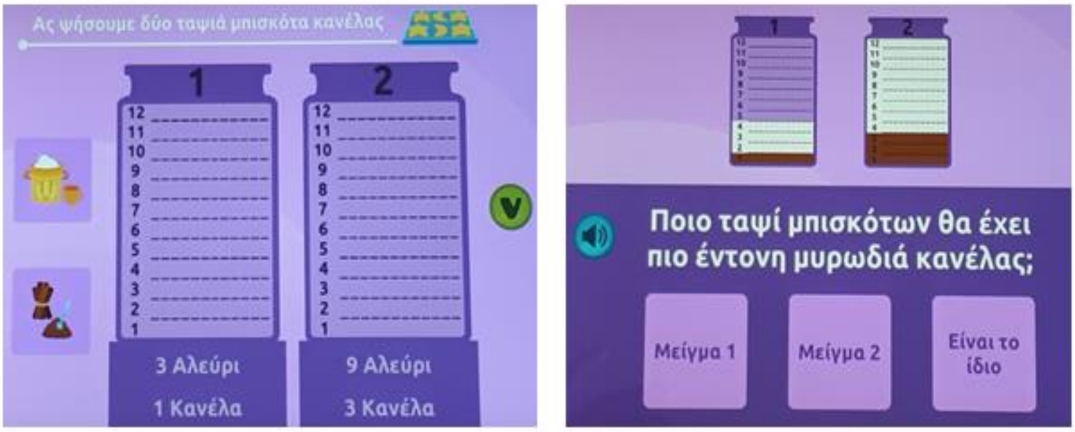
1ο Εφαρμογίδιο: Φτιάξιμο πιτσών - Ερώτηση σύγκρισης των δύο μειγμάτων

Διάγραμμα 9

1ο Εφαρμογίδιο: Ετοιμασία τσαγιών - Ερώτηση σύγκρισης των δύο μειγμάτων

Διάγραμμα 10

1ο Εφαρμογίδιο: Φτιάξιμο μπισκότων - Ερώτηση σύγκρισης των δύο μειγμάτων

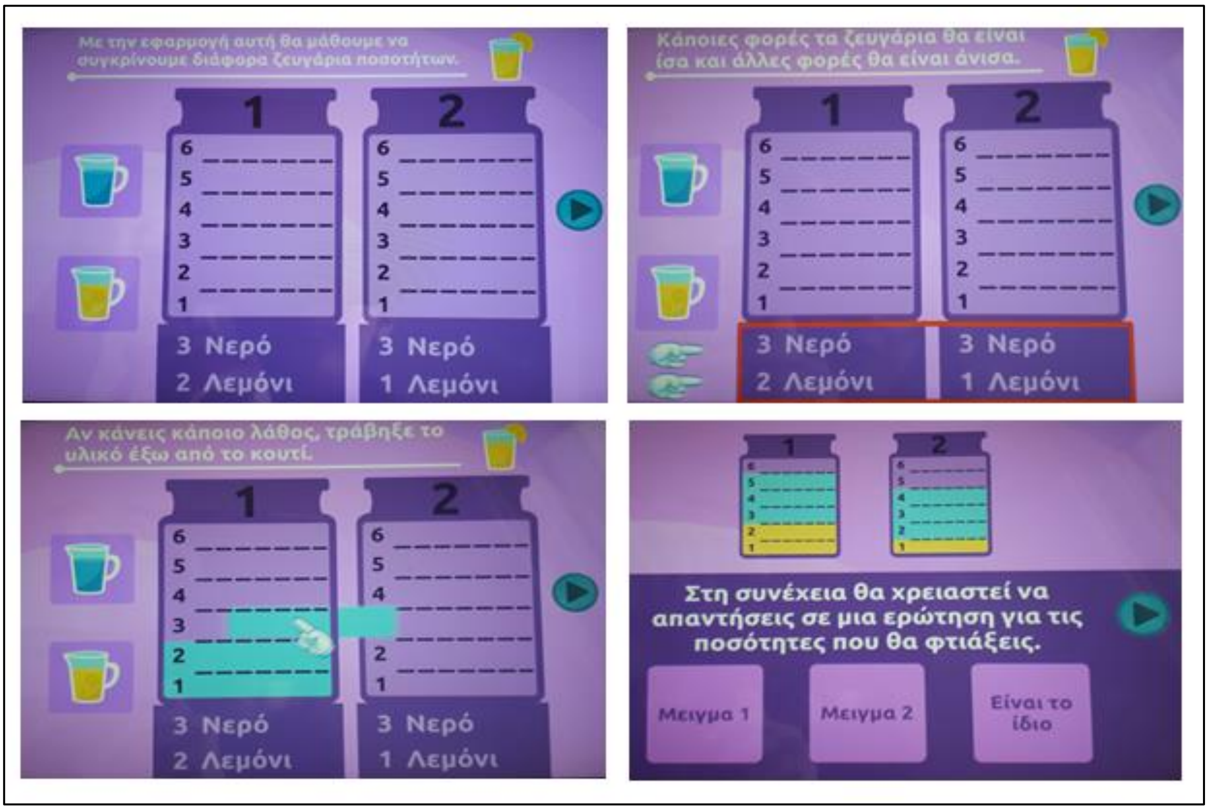


Πορεία δραστηριοτήτων και ενσωμάτωση εργαλείων υποστήριξης μάθησης:

1. **Μοντελοποίηση:** Αρχικά πριν από τη χρήση του συγκεκριμένου εφαρμογιδίου υπάρχει λεκτική μοντελοποίηση ως προς το τι αναμένεται οι μαθητές να κάνουν με σταδιακή οπτική αναπαράσταση των βημάτων που καλούνται να ακολουθήσουν. Κάθε φορά που τους δίνεται μια οδηγία αναβοσβήνει και η αντίστοιχη οπτική αναπαράσταση στην οθόνη. Υπάρχει επεξήγηση ως προς σε τι αποσκοπεί η χρήση αυτού του εφαρμογιδίου και τι πρόκειται να διδαχθούν. Παράλληλα, εμφανίζεται ψηλά στην οθόνη ο στόχος σε κάθε αποστολή τους (Διάγραμμα 11).

Διάγραμμα 11

1ο Εφαρμογίδιο: Παραδείγματα από τη μοντελοποίηση



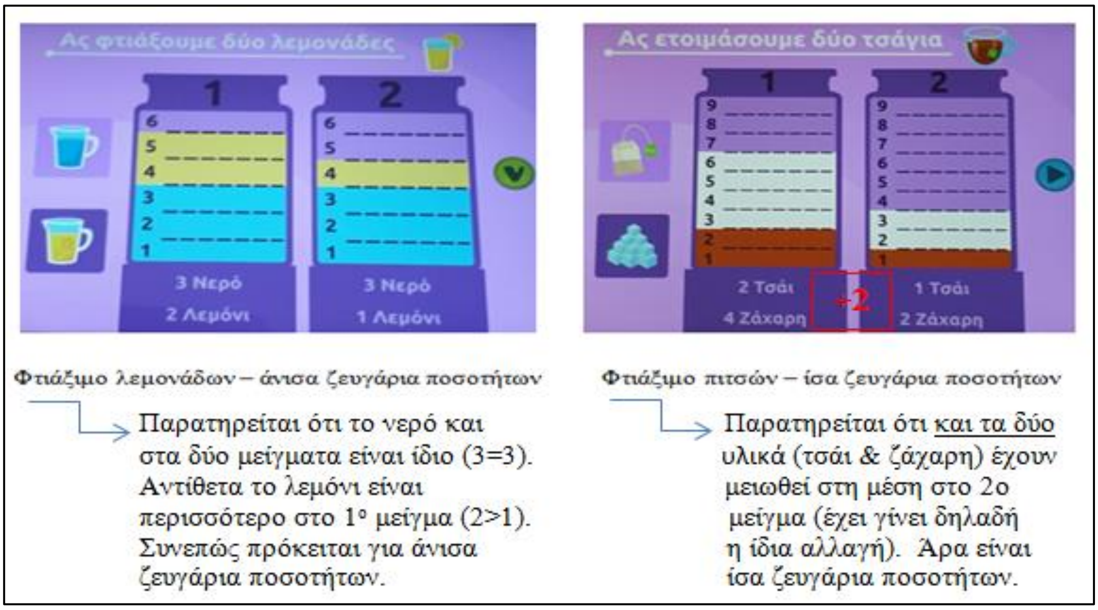
2. **Κατασκευή μειγμάτων:** Στη συνέχεια εμφανίζεται η πρώτη κατασκευή μειγμάτων που καλούνται οι μαθητές να φτιάξουν. Χρειάζεται να επιλέξουν με το δάχτυλο τους το πρώτο υλικό που εμφανίζεται ψηλά και ανάλογα με τον αριθμό που αναγράφεται πρέπει να επιλέξουν τόσα αντίστοιχα κουτιά. Στη συνέχεια κάνουν το ίδιο με το δεύτερο υλικό από κάτω. Μόλις φτιάξουν το πρώτο μείγμα ακολουθούν την ίδια διαδικασία και για το δεύτερο μείγμα. Για παράδειγμα στο Διάγραμμα 10 ο εκάστοτε μαθητής καλείται να φτιάξει δύο ταψιά μπισκότων κανέλας. Τα υλικά που θα χρησιμοποιήσει είναι αλεύρι και κανέλα (δύο ποσότητες). Το πρώτο μείγμα γράφει από κάτω τους αριθμούς των ποσοτήτων: 3 αλεύρι – 1 κανέλα. Οπότε επιλέγει αρχικά την εικόνα με το αλεύρι και αγγίζει σε 3 κουτιά που αμέσως παίρνουν χρώμα άσπρο (όπως το αλεύρι). Στη συνέχεια επιλέγει την εικόνα με την κανέλα και αγγίζει σε 1 κουτί που γίνεται καφέ (όπως το χρώμα της κανέλας). Την ίδια διαδικασία θα κάνει και για το δεύτερο μείγμα που γράφει 9 αλεύρι – 3 κανέλα. Κι έτσι θα έχει δημιουργήσει δύο ζευγάρια ποσοτήτων τα οποία θα πρέπει στη συνέχεια να τα συγκρίνει.

3. **Ερώτηση σύγκρισης:** Μετά την ολοκλήρωση κατασκευής των μειγμάτων εμφανίζεται μια αντίστοιχη ερώτηση σύγκρισης, την οποία καλούνται να απαντήσουν οι μαθητές παρατηρώντας τη σχέση μεταξύ των αριθμών στις ποσότητες (οι ερωτήσεις σύγκρισης παρουσιάζονται πιο πάνω στα Διαγράμματα 6, 7, 8, 9, 10).

   Στο εφαρμογίδιο έχουν συμπεριληφθεί ίσα ζευγάρια ποσοτήτων αλλά και άνισα ζευγάρια. Τα ίσα ζευγάρια αφορούν διπλασιασμό των ποσοτήτων (x2), τριπλασιασμό (x3) και μείωση στη μέση (÷2). Η αντίληψη ως προς το ποια ζευγάρια είναι ίσα και ποια όχι επιτυγχάνεται με κατάλληλη οπτικοποίηση μέσω της χρήσης διαφορετικών χρωμάτων ανάμεσα στα συστατικά υλικά. Συνεπώς η οπτικοποίηση μέσω διαφορετικών χρωμάτων είναι ένα εργαλείο υποστήριξης που βοηθάει τους μαθητές να συγκρίνουν τα δύο ζευγάρια ποσοτήτων και να καλλιεργηθεί η συσχετιστική τους σκέψη (Διάγραμμα 12).

Διάγραμμα 12

1ο Εφαρμογίδιο: Οπτικοποίηση μέσω διαφορετικών χρωμάτων

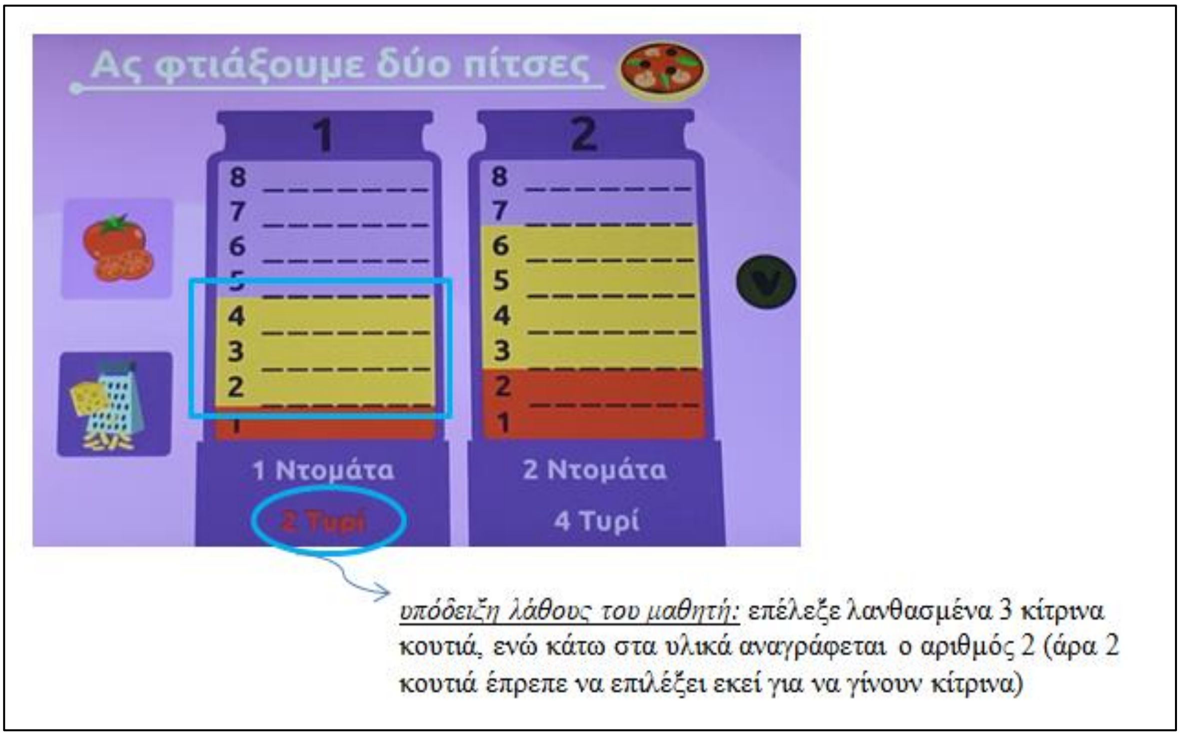


4. **Ανατροφοδότηση:** Στη συνέχεια παρέχεται ανατροφοδότηση στον κάθε μαθητή σχετικά με την ορθότητα της απάντησή του με κατάλληλο οπτικοακουστικό τρόπο. Αν ένας μαθητής τοποθετήσει λάθος κάποια συστατικά υλικά κατά τη κατασκευή των μειγμάτων, ο αριθμός που έκανε λάθος παίρνει χρώμα κόκκινο για να βοηθηθεί ο μαθητής να αντιληφθεί που έκανε λάθος και το σύστημα δεν τον αφήνει να προχωρήσει παρακάτω αν

δεν διορθώσει το λάθος / τα λάθη του (Διάγραμμα 13). Επίσης, ανατροφοδότηση δίνεται και κατά την απάντηση ενός μαθητή σχετικά με την ερώτηση σύγκρισης για τα δύο ζευγάρια ποσοτήτων. Αν ο μαθητής απαντήσει σωστά ακούγεται ένας χαρούμενος ήχος και το περίγραμμα της απάντησης που επέλεξε γίνεται πράσινο. Αντίθετα αν απαντήσει λάθος ακούγεται ένας λυπημένος ήχος και το περίγραμμα της απάντησης που επέλεξε γίνεται κόκκινο, ενώ ταυτόχρονα το περίγραμμα της σωστής απάντησης που δεν διάλεξε γίνεται πράσινο. Δηλαδή του αποκαλύπτεται η σωστή απάντηση (Διάγραμμα 14).

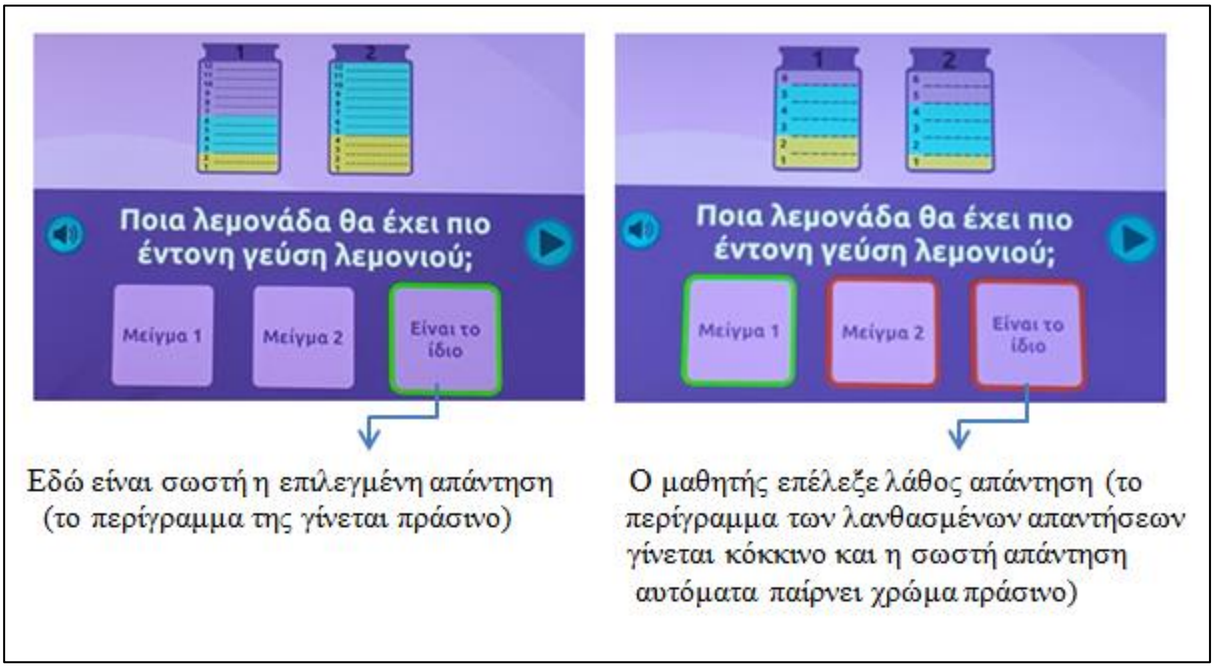
Διάγραμμα 13

1ο Εφαρμογίδιο: Ανατροφοδότηση κατά την κατασκευή των μειγμάτων



Διάγραμμα 14

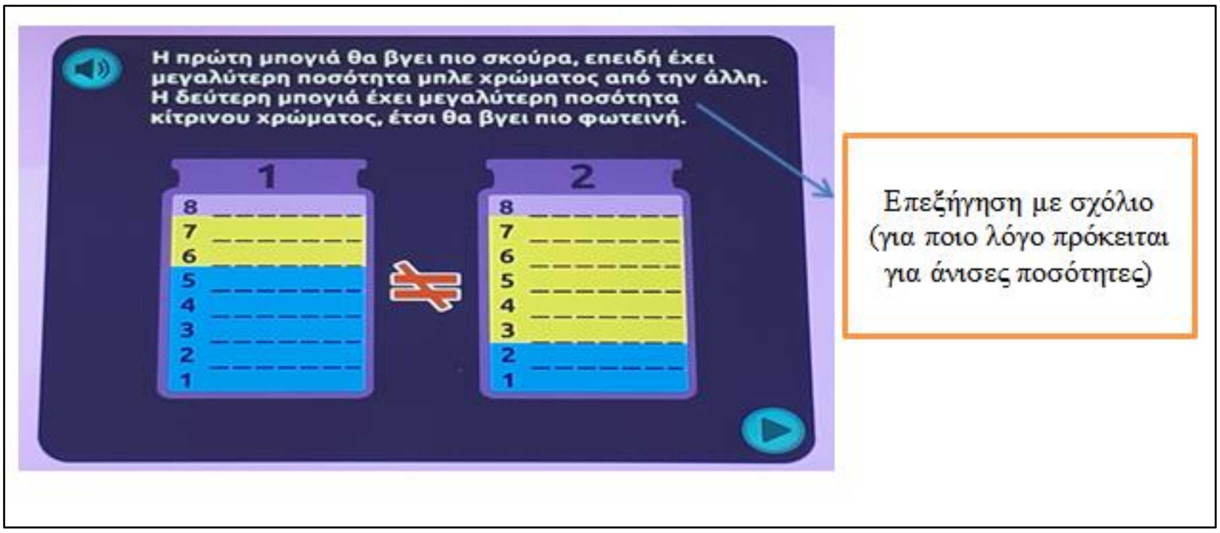
1ο Εφαρμογίδιο: Ανατροφοδότηση κατά την απάντηση στην ερώτηση σύγκρισης



5. **Επεξήγηση:** Στο τέλος μετά την ολοκλήρωση της κατασκευής των μειγμάτων και την επιλογή μιας απάντησης από τους μαθητές στην ερώτηση που τους τίθεται, παρέχεται επεξήγηση ως προς τη σύγκριση των δύο ζευγαριών ποσοτήτων. Παρέχεται λεκτική και ακουστική επεξήγηση σε συνδυασμό με κάποια οπτική αναπαράσταση. Εάν πρόκειται για άνισες ποσότητες εμφανίζεται ο σωστός τρόπος κατασκευής του κάθε μείγματος και μεταξύ των δύο μειγμάτων εμφανίζεται το σύμβολο της ανισότητας. Παράλληλα, δίνεται λεκτική επεξήγηση για ποιο λόγο οι ποσότητες είναι άνισες (Διάγραμμα 15). Εάν πρόκειται για ίσες ποσότητες εμφανίζεται ο σωστός τρόπος κατασκευής του κάθε μείγματος και μεταξύ των δύο μειγμάτων εμφανίζεται το σύμβολο της ισότητας. Ταυτόχρονα, παρουσιάζεται η στρατηγική των «εντός» σχέσεων σε διάγραμμα. Αντίστοιχα, και σε αυτή την περίπτωση δίνεται μια λεκτική επεξήγηση για ποιο λόγο οι ποσότητες είναι ίσες (Διάγραμμα 16).

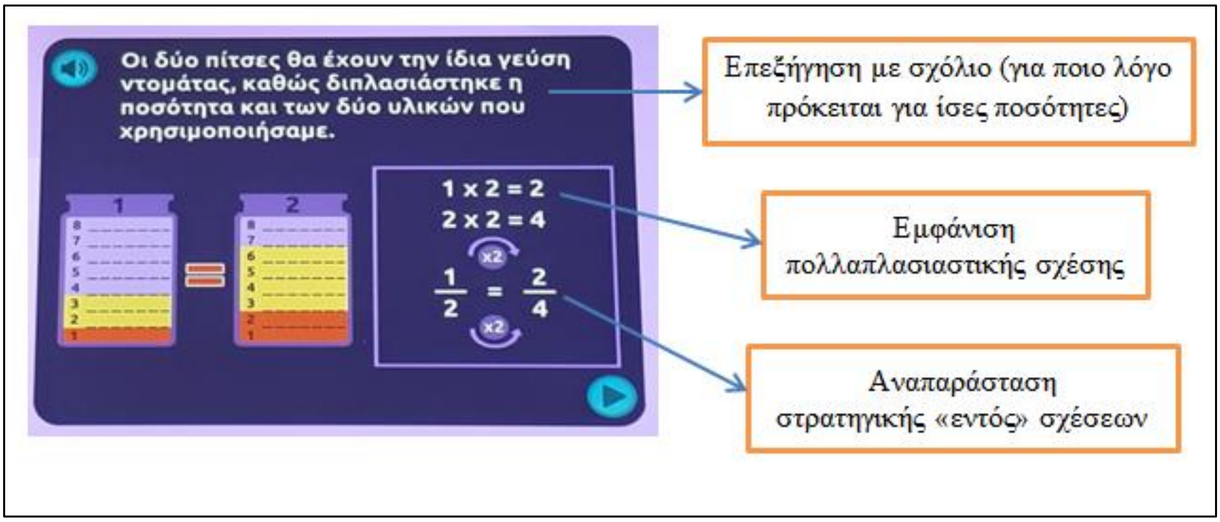
Διάγραμμα 15

1ο Εφαρμογίδιο: Επεξήγηση άνισων ποσοτήτων



Διάγραμμα 16

1ο Εφαρμογίδιο: Επεξήγηση ίσων ποσοτήτων



Η πιο πάνω περιγραφόμενη πορεία ακολουθείται και για τη 2η κατασκευή μειγμάτων καθώς και για την 3η κατασκευή (το μόνο σημείο που δεν εμφανίζεται στις άλλες δύο κατασκευές είναι η μοντελοποίηση η οποία αυτή εμφανίζεται μόνο στην αρχή, πριν την έναρξη των δραστηριοτήτων). Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, κάθε στάδιο αποτελείται από τρεις κατασκευές. Όταν οι μαθητές ολοκληρώσουν το πρώτο στάδιο, εμφανίζεται ένας πίνακας ανατροφοδότησης που τους ενημερώνει πόσα λάθη έκαναν, μαζί με ένα κουμπί επανάληψης (replay button) που τους οδηγεί στο επόμενο στάδιο (Διάγραμμα 17) και ακολουθείται ακριβώς η ίδια πορεία δραστηριοτήτων.

Διάγραμμα 17

1ο Εφαρμογίδιο: Μετάβαση στο επόμενο στάδιο

Η υποστήριξη μάθησης στο συγκεκριμένο εφαρμογίδιο επιτυγχάνεται πρωτίστως μέσω των οπτικών αναπαραστάσεων όπου τονίζονται οι σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων. Οι μαθητές χρειάζεται να κατασκευάσουν πρώτα κάτι και μετά να το συγκρίνουν. Η χρήση διαφορετικών χρωμάτων ανάμεσα στα διάφορα συστατικά των μειγμάτων που θα φτιάξουν βοηθάει στη διαδικασία της σύγκρισης. Κατά τη μοντελοποίηση υπάρχει ακουστική και οπτική σταδιακή αναπαράσταση των βημάτων που καλούνται οι μαθητές να εφαρμόσουν για να πετύχουν τις πέντε αποστολές τους. Παράλληλα έχουν ενσωματωθεί ηχητικές προτροπές οι οποίες αναφέρουν στους μαθητές τι θα μάθουν σε αυτό το ψηφιακό εφαρμογίδιο και που θα τους βοηθήσει. Πριν την έναρξη κάθε αποστολής παρουσιάζεται ο στόχος στους μαθητές και σε περίπτωση λάθους των μαθητών, το εφαρμογίδιο έχει προγραμματιστεί να μην προχωράει στην επόμενη δραστηριότητα μέχρι να εντοπιστεί και να διορθωθεί το εκάστοτε λάθος.

Το μεγαλύτερο εργαλείο υποστήριξης της μάθησης είναι η ανατροφοδότηση που δίνεται στους μαθητές τόσο κατά τη διάρκεια μιας κατασκευής όσο και στο τέλος με την ολοκλήρωσή της. Χρησιμοποιούνται και τα δύο είδη ανατροφοδότησης: γνώση σχετικά με την ορθότητα της κάθε απάντησης (μέσω διαφορετικών ήχων, χρωμάτων και σύντομων επαίνων ή ενθαρρυντικών σχολίων) και γνώση με επεξηγηματικό τρόπο όπου το εφαρμογίδιο δίνει μια οπτική και ακουστική επεξήγηση γιατί μια απάντηση ήταν ορθή ή λανθασμένη. Υπάρχει συνδυασμός ακουστικής επεξήγησης σε συνδυασμό με κάποια οπτική αναπαράσταση όπου παρέχονται μόνο τα σημαντικά στοιχεία για μάθηση για μείωση γνωστικής υπερφόρτωσης. Κατά την τελική ανατροφοδότηση δίνεται έμφαση στην αναπαράσταση της στρατηγικής των «εντός σχέσεων» και στην πολλαπλασιαστική σχέση που υπάρχει μεταξύ των ποσοτήτων.

4.6 Χαρακτηριστικά 2ου εφαρμογιδίου: ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

Το δεύτερο ψηφιακό εφαρμογίδιο που σχεδιάστηκε για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού ονομάζεται ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ. Πρόκειται για κατανόηση της έννοιας της αναλογίας με ευθέως ανάλογα ποσά, δηλαδή ποσότητες που αλλάζουν και μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο ταυτόχρονα. Στόχος εδώ είναι οι μαθητές να εντοπίζουν άγνωστες τιμές ποσοτήτων που οδηγούν στη δημιουργία μιας αναλογίας.

Το εφαρμογίδιο αυτό συγκαταλέγεται στην κατηγορία των προβλημάτων άγνωστης αξίας και στοχεύει στην εκμάθηση της στρατηγικής επίλυσης των «εκτός» σχέσεων, δηλαδή τις σχέσεις μεταξύ αντίστοιχων ποσοτήτων διαφορετικού είδους. Εντοπίζεται στον ακόλουθο σύνδεσμο και μπορεί να εγκατασταθεί μόνο σε οθόνες αφής (tablet) τύπου android:

https://drive.google.com/file/d/13HnPVI8U5FX_g4u2dFCK4cohrQKXF6aF/view

Αρχικά όταν ένας μαθητής ανοίγει το εφαρμογίδιο εμφανίζονται δύο επιλογές: η οθόνη της «ανακάλυψης» και η οθόνη της «εμπέδωσης». Η οθόνη της ανακάλυψης περιλαμβάνει τον ορισμό για την έννοια της αναλογίας με διαδραστικό τρόπο παρουσίασης και επεξήγησης. Ενώ στην οθόνη της εμπέδωσης εμπεριέχονται διάφορα προβλήματα άγνωστης αξίας για ενεργή εξάσκηση και εξοικείωση των μαθητών με τέτοιου είδους προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Διάγραμμα 18).

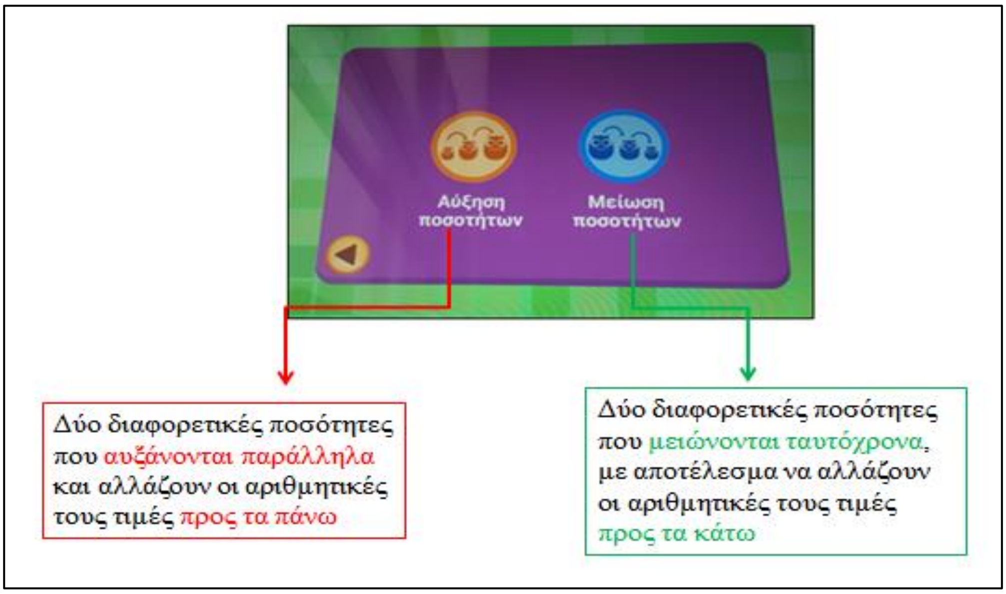
Διάγραμμα 18

2ο Εφαρμογίδιο: Αρχική οθόνη δύο επιλογών

Οθόνη ανακάλυψης: Περιλαμβάνει δύο δραστηριότητες, την αύξηση ποσοτήτων και τη μείωση ποσοτήτων. Η αύξηση ποσοτήτων αφορά δύο διαφορετικές ποσότητες που αυξάνονται και οι δύο παράλληλα και αλλάζουν οι αριθμητικές τους τιμές προς τα πάνω. Αντίθετα η μείωση ποσοτήτων αφορά δύο διαφορετικές ποσότητες που μειώνονται ταυτόχρονα και οι δύο, με αποτέλεσμα να αλλάζουν οι αριθμητικές τους τιμές προς τα κάτω (Διάγραμμα 19).

Διάγραμμα 19

2ο Εφαρμογίδιο: Δραστηριότητες οθόνης ανακάλυψης



Στην πρώτη δραστηριότητα σχετικά με την αύξηση ποσοτήτων ο μαθητής καλείται να τοποθετήσει σωστά πάνω στον πίνακα δύο διαφορετικές ποσότητες (χυμούς και κέρματα) και κάθε φορά να αυξάνει ανάλογα και τις δύο ποσότητες (Διάγραμμα 20). Στόχος του είναι να συμπληρώσει σωστά με τις αντίστοιχες εικόνες τον πίνακα τιμών, γνωστός στη βιβλιογραφία κι ως πίνακας λόγων-ποσοτήτων. Ακολούθως, καλείται να συμπληρώσει τον ίδιο πίνακα τιμών με αριθμούς δημιουργώντας έτσι ισοδύναμα κλάσματα (Διάγραμμα 21).

Διάγραμμα 20

2ο Εφαρμογίδιο: Αύξηση ποσοτήτων – πίνακας με εικόνες

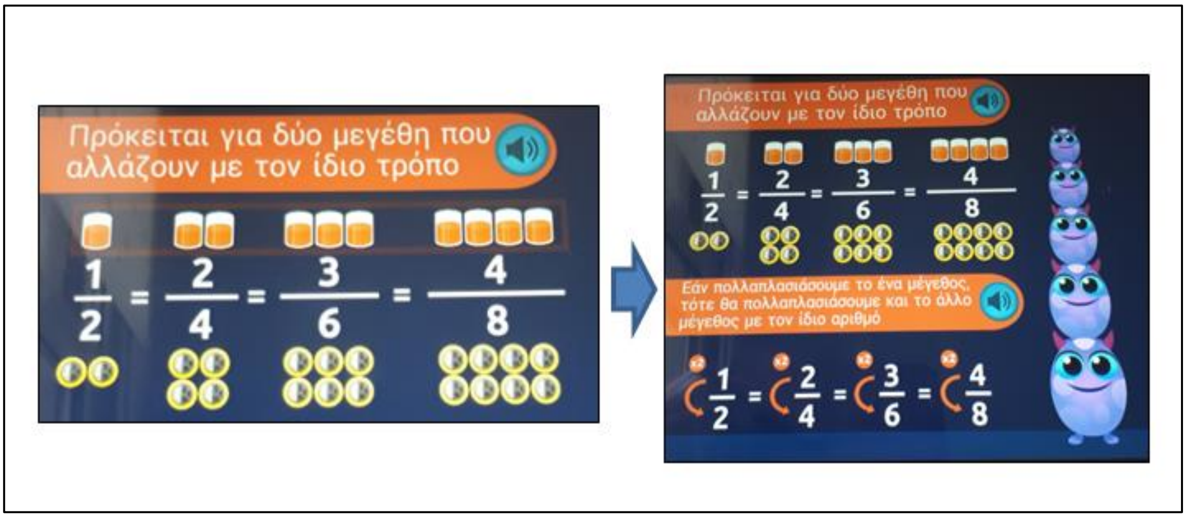
Διάγραμμα 21

2ο Εφαρμογίδιο: Αύξηση ποσοτήτων – πίνακας με αριθμούς

***Οπτικοποίηση έννοιας αναλογίας (στην αύξηση ποσοτήτων)*:** Με τη συμπλήρωση και των δύο πινάκων εμφανίζεται ο ορισμός της έννοιας της αναλογίας με σταδιακή λεκτική και οπτική αναπαράσταση. Κάθε φορά που δίνεται στους μαθητές μια λεκτική επεξήγηση του ορισμού, η αντίστοιχη οπτική αναπαράσταση στην οθόνη τοποθετείται μέσα σε ένα κόκκινο περίγραμμα. Στο τέλος το μαθηματικό σύμβολο του πολλαπλασιασμού αναβοσβήνει έτσι ώστε η προσοχή του μαθητή να εστιαστεί στο γεγονός ότι κάθε φορά που αυξάνονται οι ποσότητες τις πολλαπλασιάζουμε κατά τον ίδιο αριθμό (Διάγραμμα 22).

Διάγραμμα 22

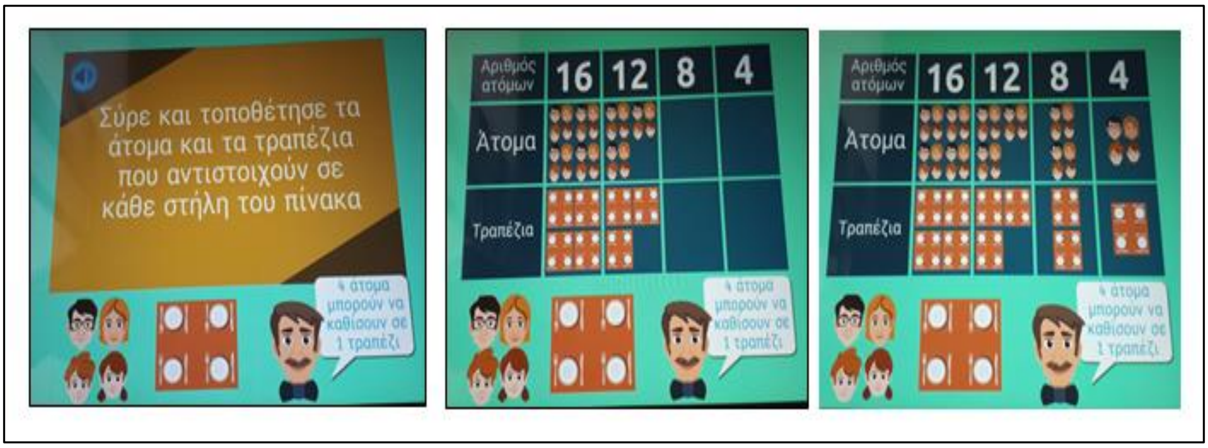
2^ο Εφαρμογίδιο: Αύξηση ποσοτήτων – επεξήγηση έννοιας αναλογίας



Ακολουθεί η δεύτερη δραστηριότητα της οθόνης της ανακάλυψης η οποία αφορά τη μείωση ποσοτήτων. Πάλι ο μαθητής καλείται να τοποθετήσει σωστά πάνω στον πίνακα δύο διαφορετικές ποσότητες (άτομα και τραπέζια) και ανάλογα να μειώσει σωστά κάθε φορά και τις δύο ποσότητες (Διάγραμμα 23). Στόχος του είναι να συμπληρώσει σωστά με τις αντίστοιχες εικόνες τον πίνακα τιμών και στη συνέχεια να συμπληρώσει τον ίδιο πίνακα τιμών με αριθμούς δημιουργώντας έτσι ισοδύναμα κλάσματα (Διάγραμμα 24).

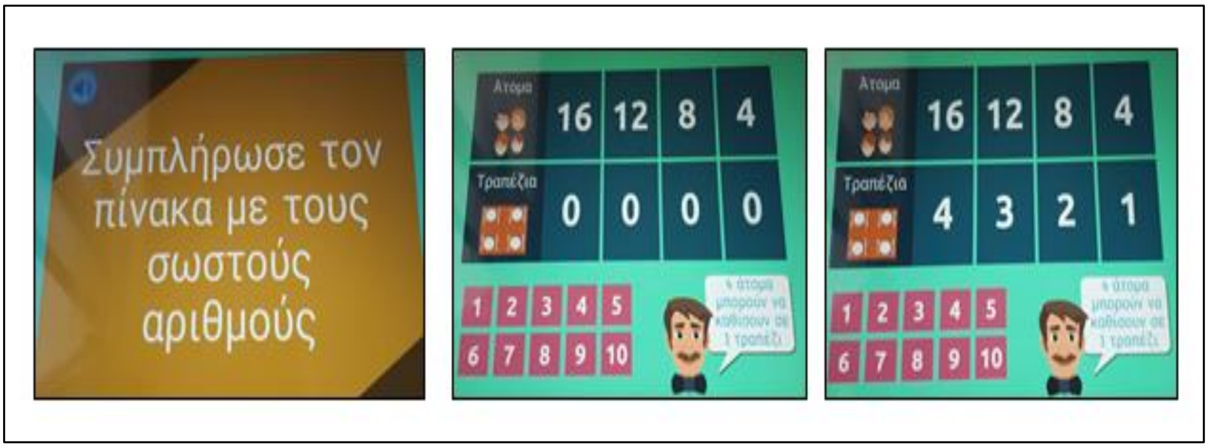
Διάγραμμα 23

2ο Εφαρμογίδιο: Μείωση ποσοτήτων – πίνακας με εικόνες



Διάγραμμα 24

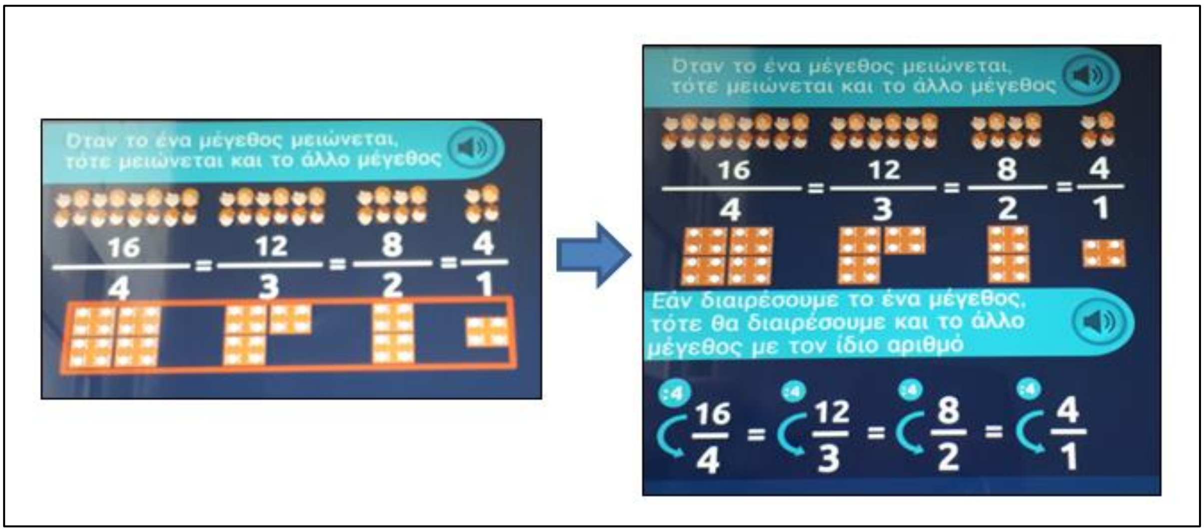
2ο Εφαρμογίδιο: Μείωση ποσοτήτων – πίνακας με αριθμούς



Οπτικοποίηση έννοιας αναλογίας (στη μείωση ποσοτήτων): Πάλι μετά τη συμπλήρωση των δύο πινάκων εμφανίζεται ο ορισμός της έννοιας της αναλογίας με σταδιακή λεκτική και οπτική αναπαράσταση. Κάθε φορά που δίνεται στους μαθητές μια λεκτική επεξήγηση του ορισμού, η αντίστοιχη οπτική αναπαράσταση στην οθόνη τοποθετείται μέσα σε ένα κόκκινο περίγραμμα. Στο τέλος το μαθηματικό σύμβολο της διαίρεσης αναβοσβήνει έτσι ώστε η προσοχή του μαθητή να εστιαστεί στο γεγονός ότι κάθε φορά που μειώνονται οι ποσότητες τις διαιρούμε κατά τον ίδιο αριθμό (Διάγραμμα 25).

Διάγραμμα 25

2ο Εφαρμογίδιο: Μείωση ποσοτήτων – επεξήγηση έννοιας αναλογίας



Ανατροφοδότηση: Τόσο στις δραστηριότητες για κατανόηση της αύξησης ποσοτήτων όσο και στις εργασίες για αντίληψη της μείωσης ποσοτήτων χρησιμοποιείται το στοιχείο της ανατροφοδότησης. Σε περίπτωση κάποιου λάθους του μαθητή (π.χ. λανθασμένη τοποθέτηση των εικόνων πάνω σε ένα πίνακα) το σύστημα δεν προχωράει βοηθώντας τον μαθητή να αντιληφθεί ότι κάπου έχει κάνει κάποιο λάθος. Παράλληλα, εάν συμπληρώσει σωστά τους πίνακες με τους αριθμούς ακούγεται ένα θετικό σχόλιο (π.χ. «μπράβο», «τα κατάφερες», κ.ά.) και εμφανίζεται το βέλος για να μεταβεί στην επόμενη δραστηριότητα. Αντίστοιχα, εάν δεν κατορθώσει να συμπληρώσει σωστά τους πίνακες με τους αριθμούς ακούγεται ένα ενθαρρυντικό σχόλιο (π.χ. «δοκίμασε ξανά», «κάνε ακόμη μια προσπάθεια», κ.ά.) και του δίνεται η ευκαιρία να εντοπίσει το λάθος του και να το διορθώσει.

Μέχρι σ' αυτό το σημείο οι πιο πάνω περιγραφόμενες δραστηριότητες και τα εργαλεία υποστήριξης μάθησης αφορούσαν την οθόνη ανακάλυψης που όπως ήδη αναφέρθηκε περιλάμβανε δραστηριότητες για κατανόηση έννοιας αναλογίας. Πιο κάτω ακολουθεί η περιγραφή των δραστηριοτήτων στην οθόνη εμπέδωσης όπου δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εξασκηθούν ενεργά με διάφορα προβλήματα άγνωστης αξίας και να μάθουν να εντοπίζουν άγνωστες τιμές ποσοτήτων που οδηγούν στη δημιουργία αναλογικών σχέσεων. Και σε αυτή την οθόνη έχουν ενσωματωθεί κατάλληλα εργαλεία υποστήριξης της μάθησης.

Οθόνη εμπέδωσης: Η οθόνη της «εμπέδωσης» χωρίζεται σε τρία στάδια. Κάθε στάδιο περιλαμβάνει πέντε προβλήματα άγνωστης αξίας (τρία προβλήματα όπου οι δύο ποσότητες αυξάνονται και δύο προβλήματα όπου οι ποσότητες μειώνονται). Συνολικά περιλαμβάνονται 15 προβλήματα τα οποία καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα αναλογικών προβλημάτων (π.χ. προβλήματα συσκευασίας-ταξινόμησης, κόστους-αγορά αντικειμένου, υλικά για συνταγή, χρόνος κατασκευής κάποιου αντικειμένου, χιλιόμετρα και χρόνος κάλυψης τους, κ.ά.). Οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν τα προβλήματα συμπληρώνοντας κατάλληλα τους πίνακες λόγων-ποσοτήτων. Χρειάζεται να βρουν με μαθηματική πράξη τους αριθμούς που απουσιάζουν και να τους συμπληρώσουν στον αντίστοιχο πίνακα (Διάγραμμα 26).

Πίνακας λόγων-ποσοτήτων: Σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία ένας τρόπος για να βοηθηθούν οι μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων αναλογίας είναι μέσω της χρήσης πίνακα λόγων-ποσοτήτων. Είναι ένας τρόπος συμβολισμού των μαθηματικών τιμών σε αναλογικές καταστάσεις και ένα υποστηρικτικό εργαλείο που βοηθά στην εξέταση της σχέσης μεταξύ δύο ποσοτήτων. Κατασκευάζεται ώστε να αναπαριστά τις δύο ποσότητες με τις τιμές τους και πως αυτές αυξάνονται ή μειώνονται με τέτοιο τρόπο, ώστε η αναλογική σχέση μεταξύ τους να παραμένει σταθερή και αμετάβλητη (Dole, 2008). Οι μαθητές μπορούν να καθοδηγηθούν για να ανακαλύψουν μοτίβα αριθμών και τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που εμφανίζονται σε κάθε πίνακα μεταξύ των ποσοτήτων.

Τα προβλήματα σε κάθε στάδιο είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας. Τα πρώτα δύο είναι πιο εύκολα από τα υπόλοιπα τρία, καθώς εκεί οι μαθητές ξεκινούν να συμπληρώνουν τον πίνακα από την πρώτη στήλη του, ενώ στα επόμενα τρία ξεκινούν από κάποια μεσαία στήλη.

Διάγραμμα 26

2ο Εφαρμογίδιο: Πίνακας λόγων-ποσοτήτων

Παράλληλα, δίπλα από κάθε πίνακα λόγων-ποσοτήτων εμφανίζονται καθοδηγητικά βέλη μαζί με τα αντίστοιχα μαθηματικά σύμβολα για να κατευθύνουν τους μαθητές ως προς το ποιες πράξεις χρειάζεται να κάνουν. Αν απουσιάζει αριθμός από τη δεύτερη σειρά του πίνακα χρειάζεται να κάνουν πολλαπλασιασμό και αν απουσιάζει αριθμός από την πρώτη σειρά του πίνακα πρέπει να γίνει διαίρεση. Με αυτό τον τρόπο ενισχύεται ο πολλαπλασιαστικός συλλογισμός των μαθητών και κατανοούν ότι σε αυτές τις μαθηματικές πράξεις πρέπει να στηρίζονται όταν καλούνται να επιλύσουν προβλήματα αναλογίας κι όχι σε στρατηγικές πρόσθεσης, μια δυσκολία των μαθητών που είχε εντοπιστεί από άλλες έρευνες οι οποίες διερεύνησαν το συγκεκριμένο θέμα. Επίσης, είναι και ένας τρόπος να οπτικοποιήσουν τη στρατηγική επίλυσης των «εκτός» σχέσεων. Στην κάτω μεριά της οθόνης εμφανίζεται το πληκτρολόγιο με τους αριθμούς, όπου οι μαθητές επιλέγουν πρώτα πάνω στον πίνακα λόγων το κουτί του αριθμού που επιθυμούν να εντοπίσουν και στη συνέχεια τον κατάλληλο αριθμό πάνω στο πληκτρολόγιο (Διάγραμμα 27).

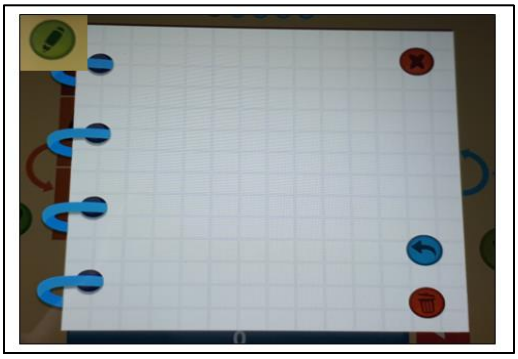
Διάγραμμα 27

2ο Εφαρμογίδιο: Καθοδηγητικά βέλη - πληκτρολόγιο αριθμών

Εργαλεία: Μέσα στο εφαρμογίδιο έχουν ενσωματωθεί τρία εργαλεία υποστήριξης της μάθησης: το σημειωματάριο, μία προτροπή και μία εκπαιδευτική βοήθεια. Το σημειωματάριο μπορούν να το χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να κάνουν κάποια μαθηματική πράξη (Διάγραμμα 28). Η προτροπή αφορά τη στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα και προτρέπει τους μαθητές να σκέφτονται κάθε φορά πόσα χωράνε μέσα σε ένα ή πόσο κοστίζει μόνο το ένα (Διάγραμμα 29). Όσοι μαθητές δυσκολεύονται να κάνουν αναγωγή στη μονάδα και δεν τους βοηθάει η προτροπή που έχει ενσωματωθεί, τότε μπορούν να χρησιμοποιήσουν την εκπαιδευτική βοήθεια, όπου ουσιαστικά εμφανίζεται η εξίσωση που πρέπει να κάνουν, χωρίς όμως να τους αποκαλύπτεται το αποτέλεσμα (Διάγραμμα 30). Το σύστημα του εφαρμογιδίου έχει προγραμματιστεί με τέτοιο τρόπο ώστε πρώτα να εμφανίζεται η προτροπή κι αν υπάρχει ακόμη κάποια δυσκολία τότε να γίνεται χρήση της εκπαιδευτικής βοήθειας. Και τα τρία εργαλεία εμφανίζονται ως αναδυόμενα παράθυρα (pop-up window).

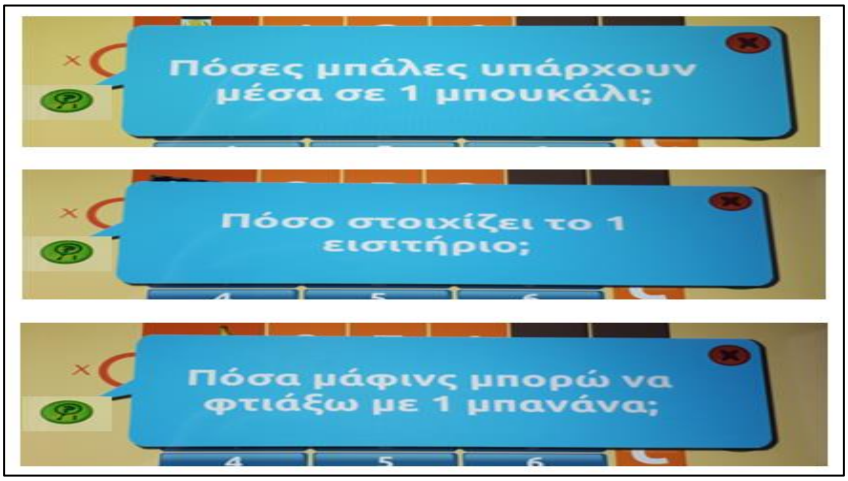
Διάγραμμα 28

2ο Εφαρμογίδιο: Σημειωματάριο



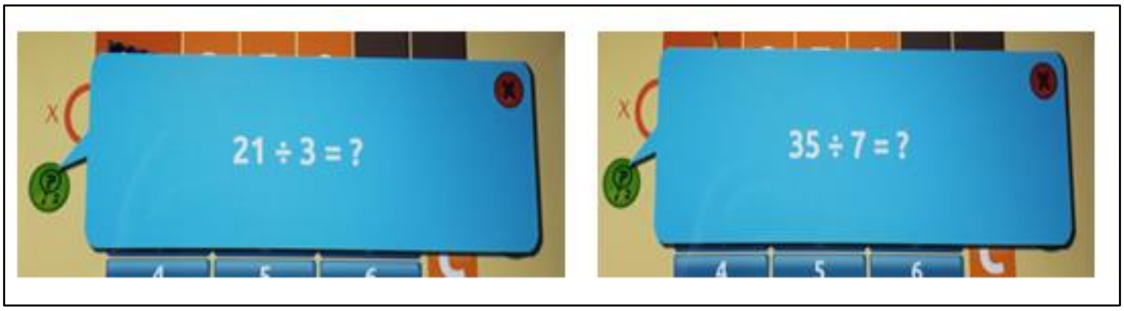
Διάγραμμα 29

2ο Εφαρμογίδιο: Δείγματα προτροπών



Διάγραμμα 30

2ο Εφαρμογίδιο: Δείγματα εκπαιδευτικής βοήθειας



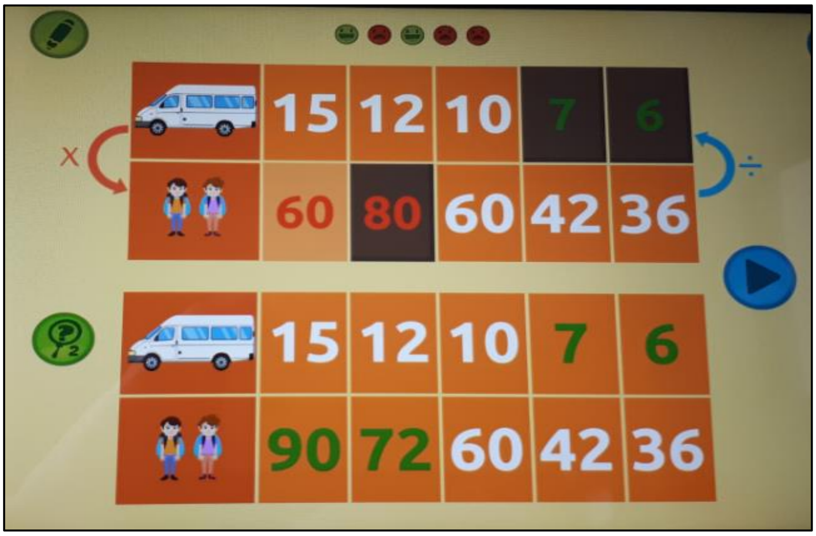
Ανατροφοδότηση: Μετά τη συμπλήρωση του πίνακα λόγων-ποσοτήτων και τον εντοπισμό όλων των αριθμών που απουσιάζουν παρέχεται ανατροφοδότηση. Αν οι μαθητές έχουν συμπληρώσει σωστά τον εκάστοτε πίνακα ακούγεται ένα θετικό σχόλιο (π.χ. «πολύ καλά», «το πέτυχες», κ.ά.), οι αριθμοί που έχει συμπληρώσει ένας μαθητής εμφανίζονται με πράσινο χρώμα και ακολούθως εμφανίζεται το βέλος για να προχωρήσουν στο επόμενο πρόβλημα (Διάγραμμα 31). Αν έχουν συμπληρώσει λανθασμένα τον πίνακα, οι αριθμοί εμφανίζονται με κόκκινο χρώμα και κάτω από τον δικό τους πίνακα εμφανίζεται συμπληρωμένος ο πίνακας με τους σωστούς αριθμούς. Έτσι ο κάθε μαθητής μπορεί να παρατηρήσει που έκανε λάθος και να το αντιληφθεί καλύτερα (Διάγραμμα 32).

Διάγραμμα 31

2ο Εφαρμογίδιο: Ανατροφοδότηση ορθής επίλυσης προβλήματος

Διάγραμμα 32

2ο Εφαρμογίδιο: Ανατροφοδότηση λανθασμένης επίλυσης προβλήματος



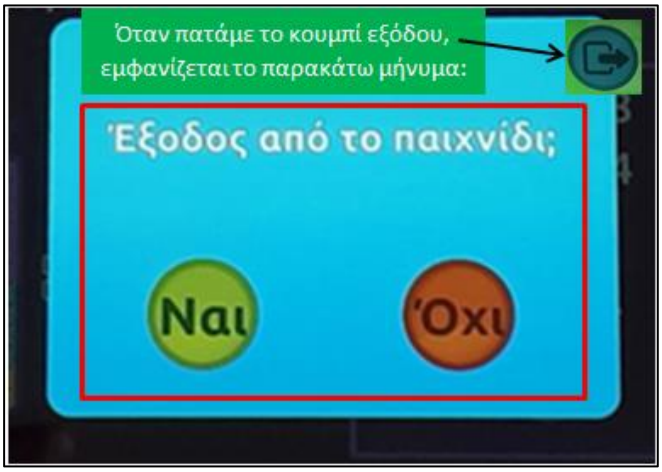
Όταν οι μαθητές επιλύσουν και τα πέντε προβλήματα του πρώτου σταδίου, εμφανίζονται τα τελικά τους αποτελέσματα όπου ενημερώνονται για το πόσα λάθη έκαναν και πόσο χρόνο χρειάστηκαν για την ολοκλήρωση και των πέντε προβλημάτων. Επίσης εμφανίζεται ένα κουμπί επανάληψης (replay button) που τους οδηγεί στο δεύτερο στάδιο (Διάγραμμα 33). Εκεί περιλαμβάνονται άλλα πέντε διαφορετικά προβλήματα, με τον ίδιο όμως τρόπο παρουσίασης, την ίδια δομή, τα ίδια εργαλεία υποστήριξης της μάθησης και την ίδια ανατροφοδότηση. Τα ίδια χαρακτηριστικά ισχύουν και για το τρίτο στάδιο. Τέλος, αν οι μαθητές επιθυμούν σε οποιαδήποτε στιγμή να διακόψουν με το εφαρμογίδιο υπάρχει το κουμπί εξόδου (Διάγραμμα 34).

Διάγραμμα 33

2ο Εφαρμογίδιο: Παρουσίαση τελικών αποτελεσμάτων

Διάγραμμα 34

2ο Εφαρμογίδιο: Κουμπί εξόδου



Σε αυτό το εφαρμογίδιο γίνεται χρήση δύο οθονών για κατανόηση από τους μαθητές ότι αρχικά θα μάθουν για μια νέα έννοια και στη συνέχεια θα εξασκηθούν για να την κατακτήσουν και να την εμπεδώσουν καλύτερα. Στην οθόνη ανακάλυψης γίνεται πρώτα προσπάθεια οικοδόμησης της έννοιας της αναλογίας από τους ίδιους τους μαθητές και στη συνέχεια τους παρέχεται η γνώση για τη νέα έννοια μέσω οπτικού διαγράμματος και κατάλληλης ακουστικής επεξήγησης. Το εφαρμογίδιο έχει προγραμματιστεί ώστε οι μαθητές να τοποθετούν τις αντίστοιχες εικόνες και αριθμούς πάνω στον πίνακα τιμών ακολουθώντας στήλη-στήλη (αυτό ακούγεται και σαν οδηγία προς αυτούς) κι όχι ανακατεμένα όπως θέλουν. Ο προγραμματισμός αυτός υποστηρίζει τη μάθησή τους και τους βοηθάει να κατανοήσουν την έννοια της αναλογίας και της ταυτόχρονης αύξησης ή μείωσης των ποσοτήτων. Επιπλέον αυτό συμβάλλει και στην κατανόηση της στρατηγικής των «εκτός» σχέσεων.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο υποστήριξης της μάθησης είναι το γεγονός πως κατά την επεξήγηση του ορισμού της έννοιας της αναλογίας αναβοσβήνουν τα μαθηματικά σύμβολα πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης (ανάλογα με το αν πρόκειται για αύξηση ή μείωση ποσοτήτων αντίστοιχα) για να δοθεί έμφαση στην πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των αριθμών που αποτελούν μια αναλογική σχέση, αλλά και για να αντιληφθούν οι μαθητές πως οι ποσότητες αυξάνονται ή μειώνονται κατά τον ίδιο αριθμό.

Παράλληλα, στην οθόνη εμπέδωσης έχουν ενσωματωθεί διάφορα προβλήματα διαβαθμισμένης δυσκολίας. Σε κάθε στάδιο τα πρώτα δύο προβλήματα είναι πιο εύκολα από τα υπόλοιπα τρία. Αυτό έγινε σκόπιμα για να προσελκύσει και το ενδιαφέρον των αδύνατων μαθητών, να τους μεταδώσει το συναίσθημα της επιτυχίας και να τους δώσει κίνητρο για να συνεχίσουν την προσπάθεια επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων.

Και στην περίπτωση αυτού του εφαρμογιδίου το μεγαλύτερο εργαλείο υποστήριξης της μάθησης είναι η ανατροφοδότηση που δίνεται στους μαθητές τόσο στην οθόνη ανακάλυψης (όπου προσπαθούν να οικοδομήσουν την έννοια της αναλογίας) όσο και στην οθόνη εμπέδωσης (όπου προσπαθούν να την εμπεδώσουν μέσω της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων). Υπάρχει ανατροφοδότηση προς τους μαθητές σχετικά με την ορθότητα των άγνωστων αριθμών που συμπληρώνουν σε κάθε πρόβλημα και παρουσίασης των σωστών αριθμών σε περίπτωση κάποιου λάθους.

Τέλος στην οθόνη εμπέδωσης έχουν ενσωματωθεί τρία εργαλεία υποστήριξης της μάθησης: το σημειωματάριο, μία προτροπή και μία εκπαιδευτική βοήθεια. Μαθητές που χρειάζονται περισσότερη υποστήριξη από άλλους μπορούν να επωφεληθούν από τα διαθέσιμα εργαλεία. Γι' αυτό το λόγο και εμφανίζονται ως αναδυόμενα παράθυρα (pop-up window) και επαφίεται στην κρίση κάθε μαθητή αν χρειάζεται να τα χρησιμοποιήσει ή όχι με το πάτημα του αντίστοιχου κουμπιού. Σκοπός τους είναι να βοηθήσει τους μαθητές να διαχειριστούν το μαθησιακό έργο, να διατηρήσει το ενδιαφέρον τους και να εστιάσει την προσοχή τους στον ορθό τρόπο επίλυσης κάθε προβλήματος.

5. Μεθοδολογία

Η παρούσα έρευνα είχε ως στόχο την εφαρμογή και αξιολόγηση δύο ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων που σχεδιάστηκαν για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα διερευνήθηκε η επίδραση των δύο αυτών εφαρμογιδίων στη μάθηση και ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης μαθηματικών προβλημάτων αναλογικού συλλογισμού.

Στο κεφάλαιο αυτό επαναφέρονται τα ερευνητικά ερωτήματα και οι συμμετέχοντες στην έρευνα. Στη συνέχεια περιγράφεται η παρεμβατική διαδικασία που ακολουθήθηκε με τα δύο αυτά εφαρμογίδια καθώς και η παραδοσιακή διδασκαλία που έγινε μέσω του βιβλίου μαθηματικών. Μετέπειτα αναφέρονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων.

5.1 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα έχουν ήδη αναφερθεί και προηγουμένως στο κεφάλαιο του θεωρητικού πλαισίου και πιο συγκεκριμένα στην ενότητα όπου αναπτύσσεται η αναγκαιότητα της συγκεκριμένης έρευνας. Για σκοπούς υπενθύμισης αναφέρονται κι εδώ:

1. Σε ποιο βαθμό η χρήση τεχνολογίας μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της επίδοσης μαθητών Δ' τάξης ως προς την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης (1η κατηγορία προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού);
2. Σε ποιο βαθμό η χρήση τεχνολογίας μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της επίδοσης μαθητών Δ' τάξης ως προς την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας (2η κατηγορία προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού);
3. Ποια είναι η επίδραση των δύο ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων στην ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού;

5.2 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν μαθητές που φοιτούσαν στην Δ' τάξη ενός δημοτικού σχολείου της επαρχίας Λεμεσού κατά τη σχολική χρονιά 2019-2020. Το δείγμα της έρευνας μπορεί να θεωρηθεί ως δείγμα ευκολίας, καθώς το συγκεκριμένο σχολείο αποτελεί χώρο εργασίας της ερευνήτριας.

Συγκεκριμένα, το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 42 μαθητές Δ’ τάξης (2 τμήματα, Ν=42), 27 αγόρια και 15 κορίτσια. Τα δύο τμήματα χωρίστηκαν τυχαία σε Α’ συνθήκη: 22 μαθητές (διδασκαλία μέσω των δύο εφαρμογιδίων) και σε Β’ συνθήκη: 20 μαθητές (παραδοσιακή διδασκαλία). Υπήρξε συνεργασία της ερευνήτριας με τους υπεύθυνους εκπαιδευτικούς των τμημάτων αυτών (ένας άνδρας και μια γυναίκα) για σωστή εφαρμογή της αντίστοιχης παρέμβασης σε κάθε τμήμα.

5.3 Διδασκαλία μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω των δύο εφαρμογιδίων

Η διδασκαλία του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω των δύο ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων πραγματοποιήθηκε με τους μαθητές της Α’ συνθήκης (n=22). Τα μαθήματα πραγματοποίησε η υπεύθυνη εκπαιδευτικός του τμήματος. Ο ρόλος της ήταν καθοδηγητικός και υποστηρικτικός. Υπήρξε συνεργασία εκπαιδευτικού και ερευνήτριας ως προς την ετοιμασία των σχεδίων μαθημάτων και των αντίστοιχων παρουσιάσεων σε Power Point με σχετικές οδηγίες προς τους μαθητές (επεξήγηση τρόπου λειτουργίας κάθε εφαρμογιδίου και οδηγίες για τρόπο εργασίας σε κάθε φάση μάθησης).

Ο κάθε μαθητής είχε τη δική του οθόνη αφής όπου είχαν από πριν εγκατασταθεί τα δύο εφαρμογίδια. Αφιερώθηκαν τέσσερις διδακτικές περίοδοι (δύο περίοδοι = 80 λεπτά για κάθε εφαρμογίδιο, δηλαδή συνολικά 160 λεπτά). Τα σχέδια μαθήματος που ακολουθήθηκαν για κάθε εφαρμογίδιο εντοπίζονται στα Παραρτήματα 1 και 2 αντίστοιχα. Και στα δύο εφαρμογίδια η διαδικασία μάθησης ήταν χωρισμένη σε τρεις φάσεις: διερεύνηση, οικοδόμηση γνώσης και εμπέδωση όπως ακριβώς ακολουθείται και στο βιβλίο μαθηματικών σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών.

Κατά τη φάση διερεύνησης οι μαθητές εργάστηκαν μόνοι τους με το εφαρμογίδιο (την πρώτη μέρα με το 1^{ο} εφαρμογίδιο και τη 2^{η} μέρα με το 2^{ο} εφαρμογίδιο). Όταν ολοκληρώθηκαν οι δραστηριότητες της διερευνητικής φάσης από όλους τους μαθητές, ακολούθησε συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης σχετικά με τις παρατηρήσεις τους, με την εκπαιδευτικό να βοηθάει τη συζήτηση θέτοντας υποστηρικτικές ερωτήσεις. Το κάθε εφαρμογίδιο στόχευε στην ανάπτυξη κοινών αλλά και διαφορετικών δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Στη φάση οικοδόμησης της γνώσης οι δραστηριότητες των εφαρμογιδίων πραγματοποιήθηκαν σε επίπεδο τάξης. Υπήρξε συνδυασμός εργασίας στα εφαρμογίδια με καθοδηγητικά φύλλα εργασίας για εστίαση της προσοχής των μαθητών στις συγκεκριμένες δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που στόχευε το κάθε εφαρμογίδιο (βλ. Παράρτημα 1 και 2).

Τέλος, κατά τη φάση εμπέδωσης οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά με τα εφαρμογίδια χωρίς τη βοήθεια της εκπαιδευτικού και χωρίς καθοδηγητικά φυλλάδια. Τους δόθηκαν κάποια φυλλάδια για συμπλήρωση, τα οποία δεν ήταν καθοδηγητικά. Σκοπός των συγκεκριμένων φυλλαδίων εδώ ήταν ο έλεγχος των απαντήσεων των μαθητών σε κάθε εφαρμογίδιο.

5.4 Παραδοσιακή διδασκαλία στην τάξη

Η παραδοσιακή διδασκαλία του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού πραγματοποιήθηκε με τους μαθητές της Β' συνθήκης (n=20). Τα μαθήματα πραγματοποίησε ο υπεύθυνος εκπαιδευτικός του τμήματος. Διεξήγαγε τη διδασκαλία μέσω του βιβλίου μαθηματικών και επιπρόσθετη εξάσκηση των μαθητών στον πίνακα της σχολικής αίθουσας και στο προσωπικό τους τετράδιο μαθηματικών. Υπήρξε συντονισμός εκπαιδευτικού και ερευνήτριας ως προς τα είδη προβλημάτων και τις τρεις στρατηγικές που έπρεπε να διδάξει στους μαθητές: τη στρατηγική των «εντός» σχέσεων, τη στρατηγική των «εκτός» σχέσεων και την αναγωγή στη μονάδα.

Και σε αυτή την περίπτωση αφιερώθηκαν τέσσερις διδακτικές περίοδοι (δύο περίοδοι για κάθε μάθημα). Στο 1^{ο} μάθημα (80 λεπτά) δόθηκε έμφαση σε προβλήματα σύγκρισης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και στο 2^{ο} μάθημα (80 λεπτά) δόθηκε έμφαση σε προβλήματα άγνωστης αξίας. Και εδώ η διαδικασία μάθησης ήταν χωρισμένη σε τρεις φάσεις: διερεύνηση, οικοδόμηση γνώσης και εμπέδωση.

5.5 Συλλογή δεδομένων

Για τη συλλογή δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένα διαγνωστικό δοκίμιο το οποίο περιλάμβανε διάφορες καταστάσεις / προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, καθώς και συνεντεύξεις με μαθητές.

Προ-διαγνωστικό και μετα-διαγνωστικό δοκίμιο

Το διαγνωστικό δοκίμιο δόθηκε στους μαθητές και των δύο συνθηκών (διδασκαλία μέσω εφαρμογιδίων και παραδοσιακή διδασκαλία) πριν από κάθε παρέμβαση και μετά την ολοκλήρωσή τους. Δόθηκε το ίδιο διαγνωστικό δοκίμιο στην αρχή και στο τέλος, έτσι ώστε να διαπιστωθεί η αλλαγή που θα παρουσίαζαν οι μαθητές στην κάθε συνθήκη πριν και μετά την αντίστοιχη παρέμβαση. Παράλληλα, αυτό βοήθησε στη σύγκριση ως προς την εννοιολογική κατανόηση ανάμεσα στους μαθητές των δύο συνθηκών.

Το διαγνωστικό δοκίμιο διαμορφώθηκε από την ερευνήτρια και στηρίχθηκε σε τρεις άξονες: α) στους γνωστικούς στόχους του υπό διδασκαλία θέματος όπως αυτοί αναφέρονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών (ΥΠΠΑΝ, 2016) β) σε προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που χρησιμοποίησαν άλλοι ερευνητές σε δικές τους έρευνες (Noelting, 1980; Christou & Philippou, 2001; Misailidou & Williams, 2003; Hilton et al., 2013) καθώς και γ) σε προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που εντοπίζονται στη διεθνή έρευνα για τα μαθηματικά TIMSS (αποδεσμευμένο υλικό στην ελληνική γλώσσα έρευνας TIMSS 2003 και 2011). Στο Παράρτημα 3 παρουσιάζονται οι βιβλιογραφικές πηγές πάνω στις οποίες στηρίχθηκε το κάθε πρόβλημα που περιλαμβάνει το διαγνωστικό δοκίμιο. Παράλληλα, δοκιμάστηκε πρώτα πιλοτικά σε ένα τμήμα μαθητών Δ’ τάξης ενός άλλου σχολείου (18 μαθητές) και τροποποιήθηκε ανάλογα με τα αποτελέσματα αυτής της δοκιμής.

Το συγκεκριμένο δοκίμιο ήταν χωρισμένο σε δύο μέρη. Το μέρος Α περιλάμβανε προβλήματα/καταστάσεις σύγκρισης και το μέρος Β περιείχε προβλήματα/καταστάσεις άγνωστης αξίας. Οι δύο αυτές κατηγορίες προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού έχουν ήδη επεξηγηθεί εκτενέστερα στο κεφάλαιο του θεωρητικού πλαισίου της παρούσας μελέτης. Και στα δύο μέρη περιλαμβάνονταν διαβαθμισμένες ερωτήσεις, όπως πολλαπλής επιλογής, ερωτήσεις τύπου σωστό/λάθος, ανοικτού τύπου ερωτήσεις, εκτέλεση μαθηματικών πράξεων και δημιουργία σχεδίου ή κάποιου πίνακα. Στηρίζεται στις στρατηγικές επίλυσης που εντοπίστηκαν στη βιβλιογραφία, οι οποίες όμως αναφέρονται και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών (στρατηγική «εντός» σχέσεων, στρατηγική «εκτός» σχέσεων και στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα). Στο Παράρτημα 4 εντοπίζεται αυτούσιο το συγκεκριμένο δοκίμιο. Η μέγιστη βαθμολογία για τους μαθητές στο διαγνωστικό δοκίμιο ήταν 30 μονάδες (10 μονάδες για το μέρος Α και 20 μονάδες για το μέρος Β). Ο Πίνακας 5 παρουσιάζει πιο αναλυτικά το εν λόγω διαγνωστικό.

Πίνακας 5

Διαγνωστικό δοκίμιο (περιγραφή των προβλημάτων & στρατηγικές επίλυσής τους)

Μέρος Α - προβλήματα / καταστάσεις σύγκρισης (σύγκριση ζευγαριών ποσοτήτων)	
1^{o} πρόβλημα: πορτοκαλάδες (ποσότητα νερού-ποσότητα χυμού πορτοκάλι)	Επιλογή μιας από τις τρεις δοθείσες απαντήσεις και επεξήγηση από τον μαθητή της επιλεγμένης απάντησης (στρατηγική εντός σχέσεων – τριπλασιασμός ποσοτήτων)
2^{o} πρόβλημα: φρουτοσαλάτα (ποσότητα μήλων-ποσότητα μπανανών)	Επιλογή Σωστό/Λάθος και επεξήγηση από τον μαθητή της επιλεγμένης απάντησης (στρατηγική εκτός σχέσεων – διπλασιασμός ποσοτήτων)
3^{o} πρόβλημα: βραχιόλια (ποσότητα μπλε χαντρών-ποσότητα πράσινων χαντρών)	Επιλογή Σωστό/Λάθος και επεξήγηση από τον μαθητή της επιλεγμένης απάντησης (στρατηγική εντός σχέσεων – άνισες ποσότητες)
4^{o} πρόβλημα: λουκουμάδες (ποσότητα νερού-ποσότητα ζάχαρης)	Επιλογή Σωστό/Λάθος και επεξήγηση από τον μαθητή της επιλεγμένης απάντησης (στρατηγική εντός σχέσεων – μείωση ποσοτήτων στη μέση)
5^{o} πρόβλημα: κουλούρια (ποσότητα κουλουριών-τιμή κάθε ποσότητας)	Επιλογή μιας από τις τρεις δοθείσες απαντήσεις και επεξήγηση από τον μαθητή για την επιλογή (στρατηγική εκτός σχέσεων – πενταπλασιασμός ποσοτήτων)
Μέγιστος βαθμός σ' αυτό το μέρος: 10 βαθμοί (5 προβλήματα x 2 βαθμοί = 10) *Ελάχιστος βαθμός σ' αυτό το μέρος: 0 βαθμοί (5 προβλήματα x 0 βαθμοί = 0)*	
Μέρος Β – προβλήματα / καταστάσεις άγνωστης αξίας (εντοπισμός άγνωστων αριθμών)	
1^{o} πρόβλημα: πρόβλημα με καθάρισμα παραθύρων (αριθμός παραθύρων-χρόνος που χρειάζεται)	Περιείχε δύο ερωτήματα και χρειαζόταν επεξήγηση από το μαθητή με κάποιο τρόπο: γραπτό λόγο, εξισώσεις, πίνακα ή κάτι άλλο (στρατηγική εκτός σχέσεων – αύξηση ποσοτήτων)
2^{o} πρόβλημα: πρόβλημα με αγόρια που τρέχουν (αριθμός χιλιομέτρων-σύνολο που έτρεξαν)	Περιείχε ένα ερώτημα και χρειαζόταν επεξήγηση από το μαθητή (στρατηγική εντός σχέσεων – αύξηση ποσοτήτων)
3^{o} πρόβλημα: συνταγή για κρεμμυδόσουπα (ποσότητες στα υλικά – αριθμός ατόμων)	Περιείχε τρία ερωτήματα χωρίς επεξήγηση, αλλά χρειαζόταν οι μαθητές να αντιληφθούν τις εντός σχέσεις (στρατηγική εντός σχέσεων – μείωση ποσοτήτων)

4^o **πρόβλημα:** εκτυπωτής (λεπτά εκτύπωσης-σελίδες που εκτυπώνει)	Περιείχε ένα ερώτημα και χρειαζόταν επεξήγηση από το μαθητή (αναγωγή στη μονάδα – πολλαπλασιασμός και διαίρεση)
5^o **πρόβλημα:** αγορά μπαλονιών (ποσότητα μπαλονιών-κόστος κάθε φορά)	Περιείχε τρία ερωτήματα χωρίς επεξήγηση, αλλά χρειαζόταν οι μαθητές να αντιληφθούν τις εκτός σχέσεις (στρατηγική εκτός σχέσεων – πολλαπλασιασμός και διαίρεση)
Μέγιστος βαθμός σ' αυτό το μέρος: 20 βαθμοί (5 προβλήματα x 4 βαθμοί = 20) *Ελάχιστος βαθμός σ' αυτό το μέρος: 0 βαθμοί (5 προβλήματα x 0 βαθμοί = 0)*	
Συνολικός μέγιστος βαθμός: 30 βαθμοί **Συνολικός ελάχιστος βαθμός:** 0 βαθμοί	

Συνεντεύξεις

Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν μόνο με τους μαθητές της Α' συνθήκης (διδασκαλία μέσω εφαρμογιδίων) πριν και μετά την παρέμβαση. Πρόκειται για ατομικές συνεντεύξεις που στηρίζονταν στην επίλυση προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Πραγματοποιήθηκαν με όλους τους μαθητές της Α' συνθήκης (n=22) για μια ολοκληρωμένη διερεύνηση της επίδρασης των δύο εφαρμογιδίων στη μάθηση και στην εννοιολογική κατανόηση του συγκεκριμένου συλλογισμού. Οι συνεντεύξεις έγιναν σε σχολικό χρόνο σε μια ήσυχη και απομονωμένη αίθουσα, ηχογραφήθηκαν και το κείμενο που προέκυψε από την απομαγνητοφώνηση αναλύθηκε για εις βάθος διερεύνηση της μεταβολής που παρουσίασαν οι μαθητές μετά την παρέμβαση στο επίπεδο της εννοιολογικής κατανόησης.

Οι συνεντεύξεις που στηρίζονται σε μαθηματικά έργα/προβλήματα (task-based interviews in mathematics) μπορούν να αποτελέσουν αποτελεσματικά ερευνητικά μέσα που εστιάζουν την προσοχή της έρευνας στη γνωστική διαδικασία με την οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, κι όχι σε μοτίβα σωστών και λανθασμένων απαντήσεων. Μέσω τέτοιων συνεντεύξεων μπορούν να διερευνηθούν καλύτερα σε βάθος πολύπλοκοι γνωστικοί μηχανισμοί που σχετίζονται με τη μάθηση των μαθηματικών. Επομένως, για τη συλλογή δεδομένων εφαρμόστηκε η συνέντευξη που βασίζεται σε μαθηματικό έργο/πρόβλημα σε συνδυασμό με τη μέθοδο ''Think aloud''. Η μέθοδος αυτή προήλθε από τη γνωστική ψυχολογία. Πρόκειται για μια ερευνητική μέθοδο κατά την οποία τα άτομα εξωτερικεύουν τις σκέψεις τους δυνατά κατά τη διάρκεια εκτέλεσης κάποιας δραστηριότητας. Στόχος της μεθόδου αυτής είναι να δώσει στον ερευνητή πληροφορίες για τη διαδικασία της εργαζόμενης μνήμης και είναι από τους πιο αποτελεσματικούς τρόπους πρόσβασης σε διαδικασίες σκέψης ανώτερου επιπέδου (Charters, 2003). Παράλληλα, ο ερευνητής παίρνει ανατροφοδότηση σε πραγματικό χρόνο καθώς ο συμμετέχοντας ασχολείται με μια δραστηριότητα (Boren & Ramey, 2000).

Στην προκειμένη περίπτωση, δόθηκαν διαφορετικά προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (σύγκρισης και άγνωστης αξίας) και ζητήθηκε από τον εκάστοτε μαθητή να τα επιλύσει, εκφράζοντας δυνατά τις σκέψεις του για τη στρατηγική επίλυσης που ακολουθεί και δικαιολογώντας τις απαντήσεις του. Το πρωτόκολλο της συνέντευξης διαμορφώθηκε από την ερευνήτρια (βλ. Παράρτημα 5) και περιλάμβανε:

1) Ένα πρόβλημα σύγκρισης για έλεγχο της απόκτησης γνώσης από το 1^{ο} εφαρμογίδιο: σύγκριση ποσοτήτων, το οποίο αποτελείτο από τέσσερα στάδια (Noelting, 1980).

2) Τρία προβλήματα άγνωστης αξίας για έλεγχο της απόκτησης γνώσης από το 2^{ο} εφαρμογίδιο: αναλογίες (Burgos & Godino, 2019; Ιστοσελίδα Παιδαγωγικού Ινστιτούτου Κύπρου; Singh, 1998; Misailidou & Williams, 2003).

3) Ερωτήσεις που εξέταζαν την εννοιολογική κατανόηση (Lamon, 1999; Lamon, 2012).

4) Προτροπές προς τους μαθητές για εξωτερίκευση των σκέψεων τους (Hunting, 1997).

Μέσω των πιο πάνω προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού πάνω στα οποία στηρίχθηκαν οι συνεντεύξεις με τους μαθητές, έγινε προσπάθεια να υπάρξει ένας συνδυασμός των γνώσεων που οι μαθητές διδάχθηκαν μέσω των εφαρμογιδίων (π.χ. αύξηση των ποσοτήτων κατά διάφορους αριθμούς, μείωση των ποσοτήτων, άνισες ποσότητες, στρατηγική εντός σχέσεων, στρατηγική εκτός σχέσεων). Τα συγκεκριμένα προβλήματα που δόθηκαν στους μαθητές κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων εντοπίζονται στο Παράρτημα 6.

Η διάρκεια των συνεντεύξεων πριν από την παρέμβαση κυμάνθηκε κατά μέσο όρο 8 λεπτά, ενώ μετά την παρέμβαση η διάρκεια τους κυμάνθηκε κατά μέσο όρο 15 λεπτά. Η πρώτη σειρά συνεντεύξεων έγινε μετά τη χορήγηση του προ-διαγνωστικού δοκιμίου και η δεύτερη σειρά μετά τη χορήγηση του μετα-διαγνωστικού.

5.6 Διδακτική παρέμβαση

Αρχικά τα δύο εφαρμογίδια δοκιμάστηκαν πιλοτικά ατομικά σε τρεις μαθητές και ακολούθως διαμορφώθηκε κατάλληλα το σχέδιο μαθήματος για κάθε εφαρμογίδιο. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε η παρέμβαση στις δύο συνθήκες (Α' συνθήκη – διδασκαλία μέσω εφαρμογιδίων και Β' συνθήκη – παραδοσιακή διδασκαλία). Οι παρεμβάσεις στα δύο τμήματα πραγματοποιήθηκαν σε ξεχωριστές μέρες και σχολικές περιόδους για πρακτικούς λόγους. Ωστόσο, η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν σχεδόν παρόμοια.

Στους μαθητές της Α' συνθήκης δόθηκε το διαγνωστικό δοκίμιο και ακολούθως πραγματοποιήθηκαν ατομικές συνεντεύξεις με κάθε μαθητή. Στη συνέχεια έγινε η διδασκαλία μέσω των εφαρμογιδίων. Ο κάθε μαθητής είχε τη δική του οθόνη αφής όπου είχαν από πριν εγκατασταθεί τα δύο εφαρμογίδια. Αφιερώθηκαν τέσσερις διδακτικές περίοδοι, συνολικής διάρκειας 160 λεπτών (δύο περίοδοι = 80 λεπτά για το κάθε εφαρμογίδιο). Στα Παραρτήματα 1 και 2 εντοπίζονται τα σχέδια μαθήματος που ακολουθήθηκαν για κάθε εφαρμογίδιο αντίστοιχα. Στο τέλος δόθηκε το μετα-διαγνωστικό δοκίμιο και η έρευνα ολοκληρώθηκε με ατομικές συνεντεύξεις με κάθε μαθητή ξεχωριστά.

Στους μαθητές της Β' συνθήκης δόθηκε αρχικά το διαγνωστικό δοκίμιο, αλλά δεν πραγματοποιήθηκαν ατομικές συνεντεύξεις λόγω έλλειψης χρόνου. Μετά πραγματοποιήθηκε η διδασκαλία μέσω του βιβλίου μαθηματικών. Και σε αυτή την περίπτωση αφιερώθηκαν τέσσερις διδακτικές περίοδοι συνολικής διάρκειας 160 λεπτών (δύο περίοδοι για κάθε μάθημα). Ο Πίνακας 6 περιγράφει συνοπτικά τη διαδικασία που ακολουθήθηκε σε κάθε συνθήκη.

Πίνακας 6

Διδακτική παρέμβαση ανά συνθήκη

Α’ Συνθήκη (διδασκαλία μέσω εφαρμογιδίων)	Β’ Συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία)
• Προ-διαγνωστικό δοκίμιο (1 διδακτική περίοδος: 40 λεπτά) • Ατομικές συνεντεύξεις πριν την παρέμβαση (5-10 λεπτά κάθε μαθητής) • Μάθημα με το 1ο εφαρμογίδιο-σύγκριση ποσοτήτων (2 διδακτικές περίοδοι: 80 λεπτά) • Μάθημα με το 2ο εφαρμογίδιο-αναλογίες (2 διδακτικές περίοδοι: 80 λεπτά) • Μετά-διαγνωστικό δοκίμιο (1 διδακτική περίοδος: 40 λεπτά) • Ατομικές συνεντεύξεις μετά την παρέμβαση (10-15 λεπτά κάθε μαθητής)	• Προ-διαγνωστικό δοκίμιο (1 διδακτική περίοδος: 40 λεπτά) • 1ο μάθημα παραδοσιακής διδασκαλίας (2 διδακτικές περίοδοι: 80 λεπτά) • 2ο μάθημα παραδοσιακής διδασκαλίας (2 διδακτικές περίοδοι: 80 λεπτά) • Μετά-διαγνωστικό δοκίμιο (1 διδακτική περίοδος: 40 λεπτά)

5.7 Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε ποσοτική ανάλυση των διαγνωστικών δοκιμίων και ποιοτική ανάλυση από τα δεδομένα των συνεντεύξεων με τους μαθητές.

5.7.1 Ποσοτική ανάλυση δεδομένων

Η αξιολόγηση και βαθμολόγηση των διαγνωστικών δοκιμίων (προ- και μετα-πειραματικών) στηρίχθηκε σε κάποια κριτήρια αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκαν αρχικά στην έρευνα του Allain (2000) και μετέπειτα στην έρευνα των Özgün-Koca & Altay (2009). Τα κριτήρια αυτά τροποποιήθηκαν ανάλογα με το παρόν διαγνωστικό δοκίμιο (προ & μετά) που δόθηκε στους μαθητές της συγκεκριμένης έρευνας. Ο Πίνακας 7 παρουσιάζει τα κριτήρια πάνω στα οποία βασίστηκε η αξιολόγηση του μέρους Α’ των διαγνωστικών δοκιμίων όπου υπήρχαν προβλήματα σύγκρισης και ο Πίνακας 8 περιέχει τα κριτήρια για την αξιολόγηση του μέρους Β’ με τα προβλήματα άγνωστης αξίας.

Πίνακας 7

Κριτήρια αξιολόγησης για Μέρος Α' – προβλήματα σύγκρισης (3-point rubric)

2	Επιλογή σωστής απάντησης με γραπτή δικαιολόγηση ή με κάποιου άλλου είδους επεξήγηση (π.χ. εξίσωση/σχέδιο/πίνακα) και εφαρμογή σωστής στρατηγικής.
1	Επιλογή σωστής απάντησης «τυχαία» εφαρμόζοντας λανθασμένη στρατηγική. Επιλογή σωστής απάντησης με γραπτή επεξήγηση ατέλειωτη ή μη ολοκληρωμένη (π.χ. δεν χρησιμοποιεί λεξιλόγιο σε σχέση με τη σύγκριση ποσοτήτων: ίσες ποσότητες, άνισες ποσότητες, τριπλασιασμός ποσοτήτων, κ.ά.).
0	Καθόλου επιλογή απάντησης. Λανθασμένη επιλογή απάντησης. Επιλογή σωστής απάντησης χωρίς ωστόσο κάποια επεξήγηση ή λανθασμένη επεξήγηση / χρήση λανθασμένης στρατηγικής.
Μέγιστος βαθμός σ' αυτό το μέρος: 10 βαθμοί (5 προβλήματα x 2 βαθμοί = 10) Ελάχιστος βαθμός σ' αυτό το μέρος: 0 βαθμοί (5 προβλήματα x 0 βαθμοί = 0)	

Πίνακας 8

Κριτήρια αξιολόγησης για Μέρος Β' – προβλήματα άγνωστης αξίας (5-point rubric)

4	Παροχή σωστής απάντησης με γραπτή δικαιολόγηση ή με κάποιου άλλου είδους επεξήγηση (π.χ. εξίσωση/σχέδιο/πίνακα) και εφαρμογή σωστής στρατηγικής.
3	Κατανόηση σε κάποιο βαθμό της έννοιας και εφαρμογή σωστής στρατηγικής, αλλά παροχή λάθος απάντησης πιθανόν λόγω λανθασμένων υπολογισμών.
2	Παροχή σωστής απάντησης με μη ολοκληρωμένη επεξήγηση ή χωρίς κάποια επεξήγηση (π.χ. εξίσωση/σχέδιο/πίνακα).
1	Παροχή σωστής απάντησης «τυχαία» εφαρμόζοντας λανθασμένη στρατηγική.
0	Καθόλου απάντηση. Λάθος απάντηση με χρήση λανθασμένης στρατηγικής. Λάθος απάντηση με χρήση λανθασμένης πράξης. Λάθος απάντηση χωρίς κάποια επεξήγηση.
Μέγιστος βαθμός σ' αυτό το μέρος: 20 βαθμοί (5 προβλήματα x 4 βαθμοί = 20) Ελάχιστος βαθμός σ' αυτό το μέρος: 0 βαθμοί (5 προβλήματα x 0 βαθμοί = 0)	

Τα διαγνωστικά δοκίμια των μαθητών και από τις δύο συνθήκες (προ-διαγνωστικά και μετα-διαγνωστικά) βαθμολογήθηκαν με βάση τα πιο πάνω κριτήρια. Μετά τη βαθμολόγηση τα δεδομένα που συλλέχθηκαν και αφορούσαν την επίδοση των μαθητών ανά συνθήκη, κωδικοποιήθηκαν και αναλύθηκαν. Συγκεκριμένα, τα δεδομένα αυτά αφορούσαν τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας: (α) την επίδοση των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και (β) την επίδοση των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας.

Για την ανάλυση των δεδομένων των προ-διαγνωστικών και μετα-διαγνωστικών δοκιμίων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο Κοινωνικών Επιστημών SPSS. Αρχικά εξετάστηκε κατά πόσον τα δεδομένα κάθε μεταβλητής που θα χρησιμοποιούνταν στους στατιστικούς ελέγχους ακολουθούσαν ή όχι κανονική κατανομή, για σκοπούς μεγιστοποίησης της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων της έρευνας τόσο για το προ-διαγνωστικό όσο και για το μετα-διαγνωστικό δοκίμιο. Παρά το μικρό δείγμα της έρευνας (Ν=42) χρησιμοποιήθηκαν παραμετρικοί στατιστικοί έλεγχοι, καθώς τα δεδομένα στις υπό διερεύνηση μεταβλητές ακολουθούσαν κανονική κατανομή.

Ακολούθως, πραγματοποιήθηκε ο παραμετρικός έλεγχος t-test για εξαρτημένα δείγματα (Paired Samples T Test) για διερεύνηση της διαφοροποίησης της επίδοσης των μαθητών σε καθεμιά από τις δύο συνθήκες κατά το διάστημα της αντίστοιχης παρέμβασης. Τέλος, για διερεύνηση της διαφοροποίησης της επίδοσης των μαθητών ανάμεσα στους μαθητές των δύο διαφορετικών συνθηκών χρησιμοποιήθηκε ο παραμετρικός έλεγχος t-test για ανεξάρτητα δείγματα (Independent Samples T Test). Το επίπεδο σημαντικότητας α ορίστηκε σε όλες τις περιπτώσεις στο 0.05.

5.7.2 Ποιοτική ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση των συνεντεύξεων αποσκοπούσε στη βαθύτερη διερεύνηση της επίδρασης που είχαν τα δύο εφαρμογίδια στη μάθηση και εννοιολογική κατανόηση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Αρχικά έγινε απομαγνητοφώνηση όλων των συνεντεύξεων και η ανάλυση των δεδομένων έγινε μέσω μεικτής κωδικοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, για να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό υπήρξε επίδραση στη μάθηση από τα δύο εφαρμογίδια που δοκιμάστηκαν, καταγράφηκαν στην αρχή κάποιες βοηθητικές ερωτήσεις:

- Οι μαθητές έμαθαν να αναγνωρίζουν την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των αριθμών;
- Εντοπίζουν ίσα και άνισα ζευγάρια ποσοτήτων;
- Αντιλαμβάνονται την αύξηση ή τη μείωση σε ζευγάρια ποσοτήτων; Και κατά ποιον αριθμό αυξάνονται ή μειώνονται;
- Αναγνωρίζουν τις «εντός» σχέσεις μεταξύ των αριθμών;
- Αναγνωρίζουν τις «εκτός» σχέσεις μεταξύ των αριθμών;
- Μπορούν να χρησιμοποιούν και τις δύο στρατηγικές που διδάχθηκαν μέσω των εφαρμογιδίων;
- Έμαθαν να φτιάχνουν και να χρησιμοποιούν πίνακα λόγων-ποσοτήτων;
- Κατανοούν και επεξηγούν ορισμούς (όπως ίσα ζευγάρια ποσοτήτων, άνισα ζευγάρια ποσοτήτων, αναλογία) χρησιμοποιώντας κατάλληλο μαθηματικό λεξιλόγιο;

Από τις πιο πάνω ερωτήσεις δημιουργήθηκαν κώδικες ανάλυσης που προέκυψαν από τα λεκτικά δεδομένα των συνεντεύξεων και οι οποίοι εμπίπτουν στην έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (π.χ. στρατηγική «εντός» σχέσεων, στρατηγική «εκτός» σχέσεων, επεξήγηση ορισμών, χρήση κατάλληλου μαθηματικού λεξιλογίου, κ.ά.).

Στη συνέχεια το υλικό που καταγράφηκε από τις συνεντεύξεις κωδικοποιήθηκε σύμφωνα με τα αναπτυξιακά στάδια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού των Langrall και Swafford (2000): επίπεδο 0 (απουσία αναλογικού συλλογισμού), επίπεδο 1 (άτυπος αναλογικός συλλογισμός), επίπεδο 2 (ποσοτικός αναλογικός συλλογισμός) και επίπεδο 3 (επίσημος αναλογικός συλλογισμός). Σε αυτά τα αναπτυξιακά επίπεδα προστέθηκαν οι επιπρόσθετοι κώδικες ανάλυσης που προέκυψαν από τις πιο πάνω βοηθητικές ερωτήσεις. Γι' αυτό και η ανάλυση των δεδομένων έγινε μέσω μεικτής κωδικοποίησης.

Παρακάτω παρατίθενται δύο παραδείγματα κωδικοποίησης των συνεντεύξεων (ένα παράδειγμα από πρόβλημα σύγκρισης και ένα παράδειγμα από πρόβλημα άγνωστης αξίας). Τα συγκεκριμένα δύο παραδείγματα παρατίθενται για σκοπούς επεξήγησης του τρόπου κωδικοποίησης. Θα ακολουθήσουν στη συνέχεια άλλα παραδείγματα επεξήγησης του τρόπου ανάλυσης των δεδομένων από τις συνεντεύξεις και τοποθέτησής τους στα αντίστοιχα επίπεδα εννοιολογικής κατανόησης.

Παράδειγμα κωδικοποίησης από πρόβλημα σύγκρισης:

Ερευνήτρια: Πώς θα το λύσεις; Έχεις κάποιο τρόπο;

Αλέξης: Ναι, θα κάνω τη στρατηγική. ***(επίδραση εφαρμογιδίων)***

Ε: Δείξε μου στο χαρτί να δω.

Α: Θα κάνω την κάθετη στρατηγική που θα κοιτάξω πόσο απέχει τα 2 ποτήρια χυμό από τα ποτήρια νερό (δείχνει την πορτοκαλάδα του 1ου παιδιού). ***(στρατηγική εκτός σχέσεων / παρατήρηση σχέσης αριθμών)***

Ε: Μπορείς να μου γράψεις τον αριθμό δίπλα;

Α: Βλέπω ότι είναι διπλάσια. ***(αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης)***

Ε: Άρα διπλασιάστηκαν. Τι άλλο θα γίνει;

Α: Εδώ (δείχνει την πορτοκαλάδα του 2ου παιδιού) θα δω ξανά το ίδιο πράγμα ***(στρατηγική εκτός σχέσεων / παρατήρηση σχέσεων αριθμών)*** *και επειδή και τούτα διπλασιάστηκαν* ***(αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης)*** *σημαίνει ότι οι ποσότητες μας είναι ίσες.* ***(αναγνώριση αναλογίας)***

Ε: Τι σημαίνει ίσες;

Α: Ότι και στις δύο πορτοκαλάδες υπάρχει η ίδια ποσότητα. ***(ορθή επεξήγηση ορισμού)***

Παράδειγμα κωδικοποίησης από πρόβλημα άγνωστης αξίας:

Ερευνήτρια: Διάβασε αυτό το πρόβλημα τώρα και εξήγησε μου με ποιο τρόπο σκέφτεσαι να το λύσεις;

(ο μαθητής διαβάζει μεγαλόφωνα το πρόβλημα)

Αλέξης: Μάλιστα. Νομίζω θα κάνω πίνακα ***(χρήση πίνακα λόγων-ποσοτήτων)*** *Εδώ βλέπω το 2 με το 4 ότι διπλασιάζονται ή αυξάνονται κατά τρεις φορές.* ***(αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης / χρήση κατάλληλου μαθηματικού λεξιλογίου)***

Ε: Πολύ ωραία.

Α: Άρα άμα υπάρχουν 6 μπλε χάντρες, θα τις αυξήσω κατά 2 φορές και θα μου κάνει 12 πράσινες χάντρες. ***(στρατηγική εκτός σχέσεων / ορθή επεξήγηση για μαθηματική πράξη / ορθός μαθηματικός υπολογισμός)***

Ε: Πολύ καλά. Μετά;

Α: Εδώ βλέπω ότι άμα υπάρχουν 18 χάντρες, θα σκεφτώ το 18 άμα διπλασιαστεί ποιον αριθμό θα μου δώσει; 18 επί 2 που μου κάνει 36. ***(στρατηγική εκτός σχέσεων / ορθή επεξήγηση για μαθηματική πράξη / ορθός μαθηματικός υπολογισμός)***

Μετά την κωδικοποίηση των δεδομένων, δημιουργήθηκε το σχήμα κωδικοποίησης το οποίο περιλάμβανε τέσσερα επίπεδα εννοιολογικής κατανόησης. Στο σχήμα συμπεριλήφθηκαν χαρακτηριστικά από τα αναπτυξιακά στάδια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού των Langrall και Swafford (2000) καθώς και επιπρόσθετα χαρακτηριστικά που προέκυψαν από τα λεκτικά δεδομένα των συνεντεύξεων και τα οποία εμπίπτουν στην έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Ο Πίνακας 9 παρουσιάζει το σχήμα κωδικοποίησης μαζί με αυτούσια παραδείγματα από τις συνεντεύξεις. Να αναφερθεί ότι στον πίνακα χρησιμοποιούνται ψευδώνυμα για προστασία προσωπικών δεδομένων των μαθητών.

Πίνακας 9

Σχήμα κωδικοποίησης συνεντεύξεων

Επίπεδα Εννοιολογικής Κατανόησης Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού		
Επίπεδα	Ενδείξεις	Αυτούσια παραδείγματα
Επίπεδο 0 (απουσία αναλογικού συλλογισμού)	-καμία ή λανθασμένη απάντηση -αδυναμία αναγνώρισης πολλαπλασιαστικής σχέσης -λανθασμένες στρατηγικές πρόσθεσης -τυχαία χρήση αριθμών και πράξεων -αδυναμία κατανόησης ισότητας (αναλογία)	Ερευνήτρια: Θα λύσουμε κάποια προβλήματα για να δω τον τρόπο σκέψης σου. Λοιπόν διαβάζω εδώ (διαβάζω μεγαλόφωνα το 1ο πρόβλημα σύγκρισης και δείχνω τις ποσότητες κάθε παιδιού στο φυλλάδιο). Πώς σκέφτεσαι να συγκρίνεις τις δύο πορτοκαλάδες; Σιωπή Ερευνήτρια: Θα παρατηρήσεις κάτι; **(βοηθητική ερώτηση)** Για να δω πώς θα το λύσεις; Σιωπή Άννα: Νομίζω ότι θα προσθέσω το 2 με το 4 ίσον 6 (αναφέρεται στις ποσότητες της 1ης πορτοκαλάδας) και μετά θα προσθέσω 4 και 8 ίσον 12 (αναφέρεται στις ποσότητες 2ης πορτοκαλάδας). **(λανθασμένη στρατηγική πρόσθεσης)** Ερευνήτρια: Και; Άννα: Δηλαδή της Μαρίας θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού. **(λάθος απάντηση / αδυναμία κατανόησης της ισότητας)** Ερευνήτρια: Γιατί; Άννα: Επειδή έχει μεγαλύτερο αριθμό (αναφέρεται στο άθροισμα 12 που είπε πιο πάνω). **(λανθασμένη επεξήγηση)** Ερευνήτρια: Άρα είναι ίσες οι ποσότητες τους ή είναι άνισες; Άννα: Άνισες. **(λανθασμένη απάντηση)**

Επίπεδο 1 (άτυπος αναλογικός συλλογισμός)	-παρατήρηση κάποιας σχέσης ανάμεσα στα ζευγάρια ποσοτήτων -σωστές απαντήσεις με τη χρήση διαισθητικών στρατηγικών ή τη χρήση σχεδίων -ποιοτική σύγκριση (ο μαθητής δηλαδή εστιάζεται μόνο στις ποσότητες, αν είναι περισσότερες ή λιγότερες, χωρίς να παρατηρεί και τη σχέση μεταξύ των αριθμών)	Ερευνήτρια: Ας δούμε το τελευταίο πρόβλημα, όπου δύο παιδιά θα φτιάξουν δύο πορτοκαλάδες χρησιμοποιώντας διαφορετικές ποσότητες στα υλικά τους. Ο Ιωάννης θα βάλει 9 ποτήρια χυμό πορτοκάλι και 3 ποτήρια νερό. Η Μαρία θα βάλει 3 ποτήρια χυμό και 1 ποτήρι νερό. Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού; Βικτώρια: Νομίζω ότι θα είναι το ίδιο. **(σωστή απάντηση)** Ερευνήτρια: Πώς το σκέφτηκες αυτό; Βικτώρια: Επειδή και οι δύο έχουν βάλει πιο πολύ χυμό πορτοκαλιού. **(ποιοτική σύγκριση)** Ερευνήτρια: Τι εννοείς πιο πολύ; Βικτώρια: Δηλαδή περισσότερο χυμό και λιγότερο νερό. **(ποιοτική σύγκριση)** Ερευνήτρια: Παρατηρείς κάτι άλλο; Βικτώρια: Τι άλλο; Ερευνήτρια: Οι αριθμοί στις ποσότητες των υλικών παθαίνουν κάτι; Βικτώρια: Ναι οι αριθμοί στο χυμό είναι μεγαλύτεροι. **(παρατήρηση μόνο ενός ζευγαριού ποσοτήτων / περιθωριοποίηση του άλλου ζευγαριού)** Ερευνήτρια: Οι δύο πορτοκαλάδες θα είναι ίδιες ή διαφορετικές; Βικτώρια: Θα είναι ίδιες. **(αναγνώριση ισότητας)** Ερευνήτρια: Γιατί; Βικτώρια: Γιατί και τα δύο παιδιά βάζουν πιο πολύ χυμό πορτοκαλιού. **(σωστή απάντηση, χωρίς ορθή επεξήγηση)**
Επίπεδο 2 (ποσοτικός αναλογικός συλλογισμός)	-παρατήρηση και αναπαραγωγή ενός μοτίβου ή μιας σχέσης μεταξύ των αριθμών -αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης -χρήση ποσοτικού αναστοχασμού (δηλαδή ο μαθητής αιτιολογεί ποσοτικά και συνδέει τις ποσότητες με αριθμητικούς υπολογισμούς) -σωστές μαθηματικές	Ερευνήτρια: Πάμε τώρα στο Β' μέρος που έχει τρία προβλήματα. Διάβασε δυνατά το 1° πρόβλημα. Ξενοφών: Η Ειρήνη φτιάχνει βραχιόλια χρησιμοποιώντας μπλε και πράσινες χάντρες. Για κάθε 2 μπλε χάντρες χρησιμοποιεί 4 πράσινες χάντρες. Πόσες πράσινες χάντρες χρειάζεται αν υπάρχουν 6 μπλε; Ερευνήτρια: Ωραία. Πώς σκέφτεσαι να το λύσεις; Ξενοφών: Θα γίνουν 12 πράσινες. **(ορθός μαθηματικός υπολογισμός)** Ερευνήτρια: Πώς το σκέφτηκες; Ξενοφών: Επειδή για κάθε 2 μπλε υπάρχουν 4 πράσινες. **(προσπάθεια επεξήγησης)** Ερευνήτρια: Άρα; Ξενοφών: Σκέφτηκα ότι 4 διά 2 μας κάνουν 2. **(ποσοτικός**

	πράξεις / ορθοί μαθηματικοί υπολογισμοί χωρίς όμως κάποια επεξήγηση -εντοπισμός των «εντός» ή των «εκτός» σχέσεων (μία εκ των δύο)	**αναστοχασμός/στρατηγική αναγωγή στη μονάδα)** Ερευνήτρια: Μετά το πρόβλημα ρωτάει πόσες πράσινες χάντρες, χρειάζεται αν υπάρχουν 18 μπλε; Ξενοφών: Τώρα θα γίνουν 36 πράσινες. **(ορθός μαθηματικός υπολογισμός)** Ερευνήτρια: Εδώ πώς το βρήκες; Ξενοφών: Επειδή κάθε φορά κάνω φορές δύο. **(παρατήρηση και αναπαραγωγή μοτίβου)** Ερευνήτρια: Στη συνέχεια το πρόβλημα μας ρωτάει πόσες μπλε χρειάζεται, αν υπάρχουν 44 πράσινες χάντρες; Ξενοφών: Θα κάνω 44 διά 2. **(ορθή σκέψη για μαθηματική πράξη)** Ερευνήτρια: Ναι; Ξενοφών: Που μας κάνουν 11 μπλε. **(ορθός μαθηματικός υπολογισμός)** Ερευνήτρια: Δηλαδή τι καταλαβαίνεις; Ξενοφών: Ότι κάθε φορά θα κάνω φορές δύο ή διά δύο. **(παρατήρηση και αναπαραγωγή μοτίβου)**
Επίπεδο 3 (επίσημος αναλογικός συλλογισμός)	-πλήρης αντίληψη και κατανόηση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των αριθμών -χρήση διάφορων στρατηγικών (εντός σχέσεις, εκτός σχέσεις, αναγωγή στη μονάδα) -δημιουργία και χρήση πίνακα λόγων-ποσοτήτων χωρίς βοήθεια/καθοδήγηση -ορθή επεξήγηση για μαθηματικές πράξεις -κατανόηση έννοιας αναλογίας -αναγνώριση ισότητας / ανισότητας	Ερευνήτρια: Θα λύσουμε κάποια προβλήματα. Διαβάζω εδώ το 1ο (διαβάζω μεγαλόφωνα το 1ο πρόβλημα). Εδώ είναι τα υλικά του Ιωάννη (1η πορτοκαλάδα) κι εδώ τα υλικά της Μαρίας (2η πορτοκαλάδα). Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού; Ηλίας: Οι δύο πορτοκαλάδες είναι ίδιες. **(σωστή απάντηση)** Ερευνήτρια: Πώς το σκέφτηκες; Ηλίας: Εμ… Καταρχήν βλέπω ότι ο Ιωάννης έχει 2 ποτήρια χυμό πορτοκάλι και η Μαρία έχει 4 ποτήρια χυμό. Μετά ο Ιωάννης έχει 4 ποτήρια νερό και η Μαρία έχει 8 ποτήρια νερό (χρησιμοποιεί τη στρατηγική για τις εντός σχέσεις). **(παρατήρηση σχέσης αριθμών / στρατηγική εντός σχέσεων)** Ερευνήτρια: Άρα υπάρχει κάποια σχέση; Ηλίας: Ναι. Ερευνήτρια: Τι σχέση; Ηλίας: Μεταξύ τους διπλασιάστηκαν οι ποσότητες. **(αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης)** Ερευνήτρια: Μπορείς να αναπαραστήσεις τη σχέση τους με κάποιο τοξάκι; Και να βάλεις και τον αριθμό που έχουν αλλάξει οι ποσότητες;

	-σωστή και ολοκληρωμένη επεξήγηση με κατάλληλο μαθηματικό λεξιλόγιο (π.χ. διπλασιασμός ποσοτήτων, μείωση ποσοτήτων κατά 3 φορές, κ.ά.)	(ο μαθητής σχεδιάζει τα τοξάκια πρώτα πάνω από την $1^{η}$ ποσότητα: χυμός και μετά πάνω από τη $2^{η}$ ποσότητα: νερό και γράφει και στις δύο ποσότητες επί 2) **(στρατηγική εντός σχέσεων)** Ερευνήτρια: Άρα τι σημαίνει αυτό; Ηλίας: Και οι δύο πορτοκαλάδες θα είναι ίδιες επειδή απλά διπλασιάστηκαν οι ποσότητες τους. **(αναγνώριση ισότητας / ορθή επεξήγηση)** Ερευνήτρια: Υπάρχει κάποιος άλλος τρόπος που μπορούμε να το λύσουμε, αν δεν θέλω να συγκρίνω τον Ιωάννη και τη Μαρία; Ηλίας: Νομίζω πως ναι, γιατί έχουμε μάθει δύο στρατηγικές. **(επίδραση εφαρμογιδίων)** Ερευνήτρια: Ποιες; Ηλίας: Την κάθετη και την οριζόντια. **(επίδραση εφαρμογιδίων)** Ερευνήτρια: Άρα πριν ποια στρατηγική χρησιμοποίησες; Ηλίας: Την οριζόντια. **(στρατηγική εντός σχέσεων)** Ερευνήτρια: Και τώρα; Ηλίας: Βλέπω όμως ότι και στην οριζόντια και στην κάθετη πάλι διπλασιάστηκαν οι ποσότητες. **(αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης / χρήση και των δύο στρατηγικών)** Ερευνήτρια: Μπορείς να κάνεις κάποιο τοξάκι πάλι; (ο μαθητής σχεδιάζει τη στρατηγική εκτός σχέσεις και γράφει x2) **(στρατηγική εκτός σχέσεων)** Ερευνήτρια: Ποιον από τους δύο τρόπους προτιμάς; Αυτή τη στρατηγική (δείχνω τις εκτός σχέσεις) ή την άλλη στρατηγική (δείχνω τις εντός σχέσεις); Ηλίας: Την οριζόντια (εντός σχέσεις). **(προτίμηση στρατηγικής εντός σχέσεων)** Ερευνήτρια: Για ποιο λόγο; Ηλίας: Επειδή στην οριζόντια συγκρίνω δύο ίδια υλικά ενώ στην κάθετη συγκρίνω δύο διαφορετικά υλικά. **(ορθή επεξήγηση)** Ερευνήτρια: Άρα κάποια πορτοκαλάδα θα έχει πιο έντονη γεύση χυμού; Ηλίας: Ε… όχι. Ερευνήτρια: Τι θα είναι; Ηλίας: Το ίδιο. **(αναγνώριση ισότητας)** Ερευνήτρια: Ωραία. Αυτές οι ποσότητες είναι ίσες λέμε. Τι

		σημαίνει ίσες; Ηλίας: Ότι έχουν τις ίδιες ποσότητες. **(ορθή επεξήγηση)**

*Στο επίπεδο 3 κατά τους Langrall και Swafford (2000) περιλαμβάνεται και η χρήση της στρατηγικής του εσωτερικού γινομένου – «χιαστή». Στην παρούσα όμως έρευνα δεν υπολογίστηκε καθώς σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών είναι κάτι που διδάσκεται στη ΣΤ' τάξη δημοτικού.

Η διαδικασία κωδικοποίησης των συνεντεύξεων καθώς και η τοποθέτηση των μαθητών στο αντίστοιχο επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης (πριν και μετά την παρέμβαση) πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια καθώς και από ένα δεύτερο ανεξάρτητο άτομο για επίτευξη του βαθμού διαβαθμολογικής αξιοπιστίας. Το άτομο αυτό κωδικοποίησε τα δεδομένα 20% των συνεντεύξεων (10 συνεντεύξεις). Κάθε συνέντευξη περιλάμβανε τέσσερα προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Οπότε το δεύτερο άτομο κωδικοποίησε συνολικά 40 προβλήματα (10 συνεντεύξεις επί 4 προβλήματα καθεμία). Υπήρξε συμφωνία μεταξύ των δύο ατόμων σε 35 προβλήματα και ασυμφωνία σε 5 προβλήματα. Επομένως, το ποσοστό συμφωνίας μεταξύ τους ήταν περίπου στο 80%.

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν δύο μέθοδοι ανάλυσης, η ανάλυση περίπτωσης η οποία ανέλυσε τον κάθε μαθητή ξεχωριστά και μια διασταυρωμένη ανάλυση, η οποία έψαξε για κοινά μοτίβα ανάμεσα στους μαθητές. Δηλαδή, έγινε σύγκριση των δεδομένων ξεχωριστά για κάθε μαθητή (πριν και μετά την παρέμβαση) για να εξακριβωθεί αν υπήρξε μεταβολή σε κάποιο στάδιο και σε ποιο βαθμό επηρεάστηκε από τη διδασκαλία μέσω των εφαρμογιδίων. Παράλληλα, έγινε προσπάθεια εντοπισμού κοινών μοτίβων που παρουσίασαν οι μαθητές για βαθύτερη διερεύνηση του βαθμού επίδρασης των δύο εφαρμογιδίων.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ποσοτικής και ποιοτικής ανάλυσης των δεδομένων.

6. Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την ανάλυση των διαγνωστικών δοκιμίων των μαθητών και των δύο συνθηκών, καθώς και τα αποτελέσματα από την ανάλυση των συνεντεύξεων με τους μαθητές της Α' συνθήκης.

6.1 Αποτελέσματα ποσοτικής ανάλυσης

Όπως ήδη αναφέρθηκε, πραγματοποιήθηκαν δύο ειδών στατιστικοί έλεγχοι. Αρχικά έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων των διαγνωστικών δοκιμίων (πριν και μετά από κάθε παρέμβαση) ξεχωριστά για κάθε συνθήκη, για να εξακριβωθεί αν είχε βελτιωθεί η επίδοση των μαθητών και των δύο συνθηκών στα προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Στη συνέχεια έγινε σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων της επίδοσης των μαθητών και των δύο συνθηκών τόσο πριν όσο και μετά τη διδακτική παρέμβαση, για να διαπιστωθεί αν υπήρξε κάποια διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων.

Τα αποτελέσματα αυτών των στατιστικών ελέγχων παρουσιάζονται πιο κάτω, αρχικά ως προς την επίδοση των μαθητών στα προβλήματα σύγκρισης και μετέπειτα ως προς την επίδοσή τους στα προβλήματα άγνωστης αξίας. Παρουσιάζεται επίσης και το μέγεθος επίδρασης (effect size) που υπολογίστηκε σε κάθε στατιστικό έλεγχο επαγωγικής στατιστικής. Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης έρευνας, υιοθετήθηκαν τα προτεινόμενα σημεία αναφοράς του Hattie (2009) ως προς την επεξήγηση του μεγέθους επίδρασης ως εξής: μικρή επίδραση: $d=0.20$, μέτρια επίδραση: $d=0.40$ και μεγάλη επίδραση: $d=0.60$ και πάνω.

6.1.1 Αξιολόγηση επίδοσης μαθητών σε προβλήματα σύγκρισης

Συγκρίνοντας την επίδοση των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης πριν και μετά από κάθε διδακτική παρέμβαση, οι μαθητές είχαν υψηλότερη επίδοση μετά από τη διδακτική παρέμβαση και στις δύο συνθήκες. Η διαφορά αυτή ήταν στατιστικά σημαντική τόσο για την Α' συνθήκη (εφαρμογίδια-οθόνες αφής) ($t=8.28$, $p<.05$, $d=1.765$), όσο και για τη Β' συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία-βιβλίο) ($t=4.38$, $p<.05$, $d=0.979$). Επομένως, οι μαθητές και στις δύο συνθήκες παρουσίασαν βελτίωση μετά το αντίστοιχο παρεμβατικό πρόγραμμα.

Το μέγεθος επίδρασης και στις δύο συνθήκες ήταν πάνω από 0.60, οπότε θεωρείται ότι η κάθε παρέμβαση είχε αντίστοιχη ισχυρή επίδραση σε κάθε συνθήκη. Ωστόσο παρατηρήθηκε ότι το μέγεθος επίδρασης ήταν μεγαλύτερο στην Α' συνθήκη (εφαρμογίδια), συνεπώς η παρέμβαση με τα εφαρμογίδια είχε μεγαλύτερη επίδραση στην επίδοση των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης.

Πιο αναλυτικά στην Α' συνθήκη (n=22) 21 μαθητές παρουσίασαν βελτίωση, ενώ μόνο 1 μαθητής είχε την ίδια επίδοση πριν και μετά την παρέμβαση με τα εφαρμογίδια. Αντίστοιχα, στη Β' συνθήκη (n=20) 11 μαθητές παρουσίασαν βελτίωση, αλλά 9 μαθητές είχαν την ίδια επίδοση πριν και μετά την παρέμβαση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Οι παρακάτω Πίνακες 10 και 11 παρουσιάζουν συνοπτικά τη διαφορά πριν και μετά από κάθε παρέμβαση στις δύο συνθήκες.

Πίνακας 10

Σύγκριση επίδοσης στα προβλήματα σύγκρισης για Α' συνθήκη (εφαρμογίδια)

	N	Mean	SD	t	p-value
Πριν την παρέμβαση	22	3.64	3.032	8.280	.000
Μετά την παρέμβαση	22	7.50	2.650		

Πίνακας 11

Σύγκριση επίδοσης στα προβλήματα σύγκρισης για Β' συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία)

	N	Mean	SD	t	p-value
Πριν την παρέμβαση	20	2.05	2.282	4.376	.000
Μετά την παρέμβαση	20	3.65	2.961		

Στη συνέχεια, συγκρίνοντας την αρχική επίδοση των μαθητών ανάμεσα στις δύο συνθήκες διαπιστώθηκε ότι οι δύο ομάδες ήταν ισοδύναμες πριν την έναρξη της παρέμβασης και βρίσκονταν στο ίδιο επίπεδο (p=.065, d=0.587). Ο Πίνακας 12 παρουσιάζει την αρχική επίδοση πριν την αντίστοιχη παρέμβαση μεταξύ των μαθητών στις δύο συνθήκες.

Πίνακας 12

Σύγκριση αρχικής επίδοσης στα προβλήματα σύγκρισης των μαθητών μεταξύ των δύο συνθηκών (πριν την παρέμβαση)

	N	Mean	SD	t	p-value
Α' συνθήκη (εφαρμογίδια)	22	3.64	3.032	1.926	.065
Β' συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία)	20	2.05	2.282		

Τέλος, συγκρίνοντας την τελική επίδοση των μαθητών ανάμεσα στις δύο συνθήκες διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές στην Α' συνθήκη (εφαρμογίδια) εξασφάλισαν υψηλότερες βαθμολογίες από τους μαθητές της Β' συνθήκης (παραδοσιακή διδασκαλία) και οι διαφορές αυτές ήταν στατιστικά σημαντικές (t=4.42, p<.05, d=1.374). Το μέγεθος επίδρασης εδώ ήταν πάνω από 0.60, οπότε ερμηνεύεται ως μεγάλη η επίδραση. Ο Πίνακας 13 παρουσιάζει την τελική επίδοση μετά την αντίστοιχη παρέμβαση μεταξύ των μαθητών στις δύο συνθήκες.

Πίνακας 13

Σύγκριση τελικής επίδοσης στα προβλήματα σύγκρισης των μαθητών μεταξύ των δύο συνθηκών (μετά την παρέμβαση)

	N	Mean	SD	t	p-value
Α' συνθήκη (εφαρμογίδια)	22	7.50	2.650	4.423	.000
Β' συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία)	20	3.65	2.961		

6.1.2 Αξιολόγηση επίδοσης μαθητών σε προβλήματα άγνωστης αξίας

Συγκρίνοντας την επίδοση των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας πριν και μετά από κάθε διδακτική παρέμβαση, οι μαθητές είχαν υψηλότερη επίδοση μετά από τη διδακτική παρέμβαση και στις δύο συνθήκες. Η διαφορά αυτή ήταν στατιστικά σημαντική τόσο για την Α’ συνθήκη (εφαρμογίδια-οθόνες αφής) ($t= 5.39$, $p<.05$, $d=1.149$), όσο και για τη Β’ συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία-βιβλίο) ($t=6.93$, $p<.05$, $d=1.549$). Επομένως, οι μαθητές και στις δύο συνθήκες παρουσίασαν βελτίωση μετά το αντίστοιχο παρεμβατικό πρόγραμμα.

Το μέγεθος επίδρασης και στις δύο συνθήκες ήταν πάνω από 0.60, οπότε θεωρείται ότι η κάθε παρέμβαση είχε αντίστοιχη ισχυρή επίδραση σε κάθε συνθήκη. Ωστόσο, στη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρήθηκε ότι το μέγεθος επίδρασης και στις δύο συνθήκες ήταν σχεδόν παρόμοιο. Συνεπώς και οι δύο διδακτικές παρεμβάσεις είχαν μεγάλη επίδραση στην επίδοση των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας.

Πιο αναλυτικά στην Α’ συνθήκη (n=22) 19 μαθητές παρουσίασαν βελτίωση, 2 μαθητές είχαν την ίδια επίδοση πριν και μετά την παρέμβαση με τα εφαρμογίδια και 1 μαθητής δεν παρουσίασε βελτίωση. Αντίστοιχα, στη Β’ συνθήκη (n=20) 19 μαθητές παρουσίασαν βελτίωση και μόνο 1 μαθητής δεν παρουσίασε βελτίωση. Οι Πίνακες 14 και 15 παρουσιάζουν συνοπτικά τη διαφορά πριν και μετά από κάθε παρέμβαση στις δύο συνθήκες ως προς την επίδοση των μαθητών στα προβλήματα άγνωστης αξίας.

Πίνακας 14

Σύγκριση επίδοσης στα προβλήματα άγνωστης αξίας για Α’ συνθήκη (εφαρμογίδια)

	N	Mean	SD	t	p-value
Πριν την παρέμβαση	22	11.00	5.944	5.388	.000
Μετά την παρέμβαση	22	15.32	4.864		

Πίνακας 15

Σύγκριση επίδοσης στα προβλήματα άγνωστης αξίας για Β' συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία)

	N	Mean	SD	t	p-value
Πριν την παρέμβαση	20	9.80	5.278	6.929	.000
Μετά την παρέμβαση	20	15.15	4.534		

Ακολούθως, συγκρίνοντας την αρχική επίδοση των μαθητών ανάμεσα στις δύο συνθήκες διαπιστώθηκε πως οι δύο ομάδες ήταν ισοδύναμες πριν την έναρξη της παρέμβασης και βρίσκονταν στο ίδιο επίπεδο (p=.495, d=0.213). Ο Πίνακας 16 παρουσιάζει την αρχική επίδοση πριν την αντίστοιχη παρέμβαση μεταξύ των μαθητών στις δύο συνθήκες.

Πίνακας 16

Σύγκριση αρχικής επίδοσης στα προβλήματα άγνωστης αξίας των μαθητών μεταξύ των δύο συνθηκών (πριν την παρέμβαση)

	N	Mean	SD	t	p-value
Α' συνθήκη (εφαρμογίδια)	22	11.00	5.944	0.693	.495
Β' συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία)	20	9.80	5.278		

Τέλος, συγκρίνοντας την τελική επίδοση των μαθητών ανάμεσα στις δύο συνθήκες διαπιστώθηκε πως οι δύο ομάδες ήταν πάλι ισοδύναμες και μετά το τέλος της παρέμβασης. Τόσο οι μαθητές στην Α' συνθήκη (εφαρμογίδια) όσο και οι μαθητές της Β' συνθήκης (παραδοσιακή διδασκαλία) τα πήγαν εξίσου καλά στο μετα-διαγνωστικό δοκίμιο και οι διαφορές τους δεν ήταν στατιστικά σημαντικές (, p=.909, d=0.036). Το μέγεθος επίδρασης εδώ ήταν πάνω από 0.20, οπότε ερμηνεύεται ως μικρή η συγκεκριμένη επίδραση. Ο Πίνακας 17 παρουσιάζει την τελική επίδοση μετά την αντίστοιχη παρέμβαση μεταξύ των μαθητών στις δύο συνθήκες.

Πίνακας 17

Σύγκριση τελικής επίδοσης στα προβλήματα άγνωστης αξίας των μαθητών μεταξύ των δύο συνθηκών (μετά την παρέμβαση)

	N	Mean	SD	t	p-value
Α' συνθήκη (εφαρμογίδια)	22	15.32	4.864	0.116	.909
Β' συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία)	20	15.15	4.534		

6.2 Αποτελέσματα ποιοτικής ανάλυσης

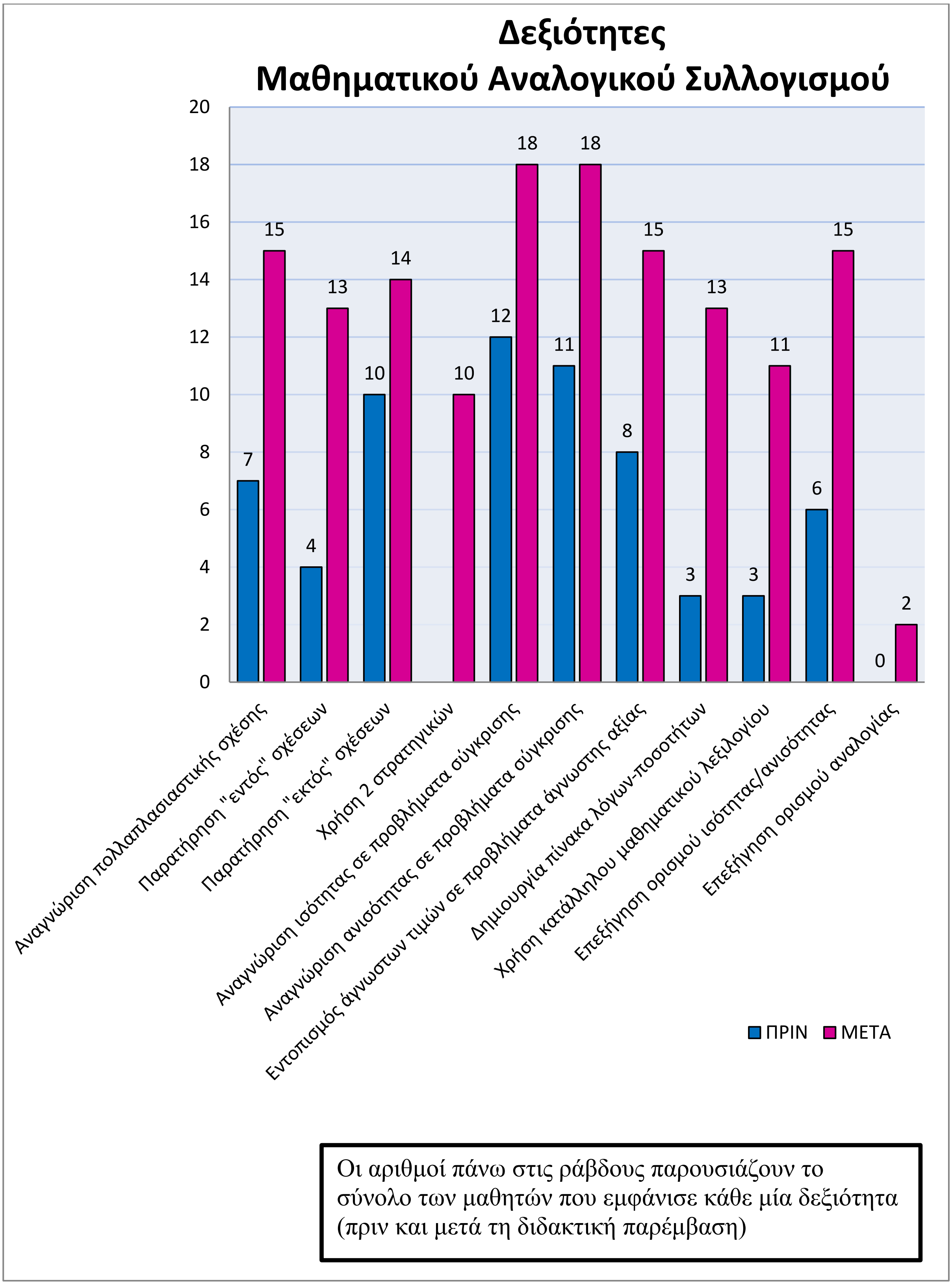
Η ανάλυση των συνεντεύξεων όπως ήδη αναφέρθηκε αποσκοπούσε στη βαθύτερη διερεύνηση της επίδρασης που είχαν τα δύο εφαρμογίδια στη μάθηση και εννοιολογική κατανόηση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού στους μαθητές της Α' συνθήκης. Γι' αυτό το λόγο πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με όλους τους μαθητές πριν και μετά την παρέμβαση. Επίσης σκοπός της ανάλυσης ήταν και η διερεύνηση του βαθμού επίδρασης που είχε στη μάθηση το καθένα από τα δύο εφαρμογίδια ξεχωριστά.

Αρχικά παρουσιάζεται ο βαθμός επίδρασης και των δύο εφαρμογιδίων συνδυαστικά στην ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και στη συνέχεια ο βαθμός επίδρασης του κάθε εφαρμογιδίου ξεχωριστά, πρώτα του 1^{ου} εφαρμογιδίου: *σύγκριση ποσοτήτων* ως προς την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης κι ακολούθως του 2^{ου} εφαρμογιδίου: *αναλογίες* ως προς την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας.

Το Διάγραμμα 35 αναφέρει κάποιες συγκεκριμένες δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία και οι οποίες προωθήθηκαν μέσω των δύο εφαρμογιδίων. Παράλληλα, παρουσιάζει πόσοι συνολικά μαθητές εμφάνισαν σε κάποιο βαθμό τις συγκεκριμένες δεξιότητες πριν τη διδακτική παρέμβαση καθώς και πόσοι μαθητές κατόρθωσαν να τις αναπτύξουν μέσω της συγκεκριμένης παρέμβασης.

Διάγραμμα 35

Δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού



Όπως παρατηρείται και πιο πάνω, στο Διάγραμμα 35 περιλαμβάνονται έντεκα δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Κάποιες από αυτές πριν την παρέμβαση είχαν εμφανιστεί από μερικούς μαθητές κατά τη διάρκεια των ατομικών συνεντεύξεων. Μέσω της διδακτικής παρέμβασης με τα ψηφιακά εφαρμογίδια και οι έντεκα αναφερόμενες δεξιότητες καλλιεργήθηκαν πιο στοχευμένα και εμφανίστηκαν σε μεγαλύτερη μερίδα μαθητών στις συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν με το τέλος της παρέμβασης. Πιο συγκεκριμένα:

1. **Αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης μεταξύ αριθμών:** Πριν την παρέμβαση εφτά (7) μαθητές από τους 22 είχαν εμφανίσει τη συγκεκριμένη δεξιότητα. Οι περισσότεροι είτε δυσκολεύονταν να αντιληφθούν ότι υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των αριθμητικών στοιχείων σε μια αναλογία, είτε θεωρούσαν ότι η σχέση που υπήρχε μεταξύ τους ήταν προσθετική παρά πολλαπλασιαστική (πιο συγκεκριμένα προ παρέμβασης εφτά μαθητές δεν αντιλήφθηκαν τη σχέση, ενώ οκτώ μαθητές παρατήρησαν λανθασμένα μια προσθετική σχέση). Μετά την παρέμβαση η πλειοψηφία των μαθητών (15 από τους 22) κατόρθωσε να καλλιεργήσει μέσω των εφαρμογιδίων την πολλαπλασιαστική ή αλλιώς συσχετιστική σκέψη. Οι συγκεκριμένοι μαθητές έμαθαν να παρατηρούν τη σχέση μεταξύ των αριθμών τόσο στα προβλήματα σύγκρισης όσο και στα προβλήματα άγνωστης αξίας που είχαν να επιλύσουν και να εντοπίζουν την πολλαπλασιαστική σχέση που υπήρχε.

2. **Παρατήρηση «εντός» σχέσεων:** Πριν την παρέμβαση μόνο τέσσερις (4) μαθητές μπορούσαν να παρατηρούν τις «εντός» σχέσεις μεταξύ των αριθμών, δηλαδή τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων του ίδιου είδους. Αντίθετα, μετά την παρέμβαση ο αριθμός των μαθητών που καλλιέργησε αυτή τη δεξιότητα και έμαθε να χρησιμοποιεί τη στρατηγική επίλυσης που αφορά τις «εντός» σχέσεις αυξήθηκε στους 13.

3. **Παρατήρηση «εκτός» σχέσεων:** Η δεξιότητα αυτή εμφάνισε βελτίωση στους μαθητές, αλλά όχι την αναμενόμενη. Πριν την παρέμβαση ήδη δέκα (10) μαθητές από τους 22 μπορούσαν να παρατηρούν τις «εκτός» σχέσεις μεταξύ των αριθμών, δηλαδή τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων διαφορετικού είδους. Αντίθετα, μετά την παρέμβαση ο αριθμός των μαθητών που καλλιέργησε αυτή τη δεξιότητα και συνεπώς έμαθε να χρησιμοποιεί τη στρατηγική επίλυσης που αφορά τις «εκτός» σχέσεις αυξήθηκε στους 14. Δηλαδή μόνο τέσσερις (4) επιπρόσθετοι μαθητές είχαν επηρεαστεί από τα εφαρμογίδια ως προς την ανάπτυξη της συγκεκριμένης δεξιότητας.

4. **Χρήση και των δύο στρατηγικών («εντός» και «εκτός» σχέσεων):** Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι πριν την παρέμβαση κανένας μαθητής δεν εφάρμοσε σε ένα πρόβλημα που του δόθηκε και τις δύο στρατηγικές επίλυσης (δηλαδή τις στρατηγικές των «εκτός» και των «εντός» σχέσεων). Από την άλλη, μετά την παρέμβαση δέκα (10) μαθητές έμαθαν να χρησιμοποιούν ευέλικτα και τις δύο στρατηγικές, όπου ήταν εφικτό. Κατανόησαν ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μπορούν να επιλυθούν με περισσότερες από μία στρατηγικές και ότι από αυτές πρέπει να επιλέγεται η πιο κατάλληλη.

5. **Αναγνώριση ισότητας σε προβλήματα σύγκρισης:**

6. **Αναγνώριση ανισότητας σε προβλήματα σύγκρισης:**

Οι πιο σημαντικές δεξιότητες που παρατηρείται να έχει αναπτύξει η πλειοψηφία των μαθητών (18 μαθητές από τους 22) είναι η αναγνώριση ισότητας ή ανισότητας μεταξύ ζευγαριών ποσοτήτων, κάτι που διδάχθηκαν μέσω του 1ου εφαρμογιδίου το οποίο αφορούσε προβλήματα σύγκρισης. Πιο συγκεκριμένα προ παρέμβασης 12 μαθητές μπορούσαν να εντοπίσουν και να αναγνωρίσουν την ισότητα ζευγαριών ποσοτήτων σε ένα πρόβλημα σύγκρισης, ενώ 11 μαθητές μπορούσαν να εντοπίσουν την ανισότητα. Μετά τη διδακτική παρέμβαση ο αριθμός τους και στις δύο περιπτώσεις αυξήθηκε στους 18. Η πιο σημαντική όμως διαφορά σε αυτές τις δύο δεξιότητες μεταξύ πριν και μετά παρέμβασης ήταν ότι πριν την παρέμβαση οι μαθητές αναγνώριζαν περιπτώσεις ισότητας / ανισότητας, όμως δυσκολεύονταν να δώσουν μια σαφή επεξήγηση (για πιο λόγο ήταν ίσα ζευγάρια ποσοτήτων ή άνισα). Αντίθετα μετά την παρέμβαση παρατηρήθηκε ότι και οι 18 μαθητές που καλλιέργησαν σε βάθος αυτή τη δεξιότητα έμαθαν να παρέχουν και κατάλληλες επεξηγήσεις.

7. **Εντοπισμός άγνωστων τιμών σε προβλήματα άγνωστης αξίας:** Στην περίπτωση αυτής της δεξιότητας προ παρέμβασης οκτώ (8) μαθητές μπορούσαν να βρουν τις άγνωστες τιμές ποσοτήτων που απουσίαζαν σε προβλήματα άγνωστης αξίας. Ωστόσο παρατηρήθηκε ότι μπορούσαν να βρουν τους άγνωστους αριθμούς μέσω της στρατηγικής της αναγωγής στη μονάδα, μια στρατηγική που ήδη γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν στην επίλυση απλών προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Βασίστηκαν δηλαδή σε προηγούμενες εμπειρίες τους. Αντίθετα, μετά την παρέμβαση εκτός του ότι ο αριθμός των μαθητών που καλλιέργησε αυτή τη δεξιότητα

αυξήθηκε (15 μαθητές), οι συγκεκριμένοι μαθητές χρησιμοποίησαν τις δύο στρατηγικές που είχαν διδαχθεί μέσω των εφαρμογιδίων για να εντοπίσουν και να υπολογίζουν άγνωστους αριθμούς σε προβλήματα άγνωστης αξίας.

8. **Δημιουργία πίνακα λόγων-ποσοτήτων:** Μια σημαντική δεξιότητα που εμπίπτει στην έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι η δημιουργία κάποιου πίνακα που θα οδηγήσει στην επιτυχή επίλυση ενός προβλήματος. Πριν την παρέμβαση μόνο τρεις (3) μαθητές μπορούσαν να κατασκευάσουν σωστά ένα τέτοιο πίνακα. Μετά την παρέμβαση και αυτή η δεξιότητα αναπτύχθηκε σε σημαντική μερίδα μαθητών (13 μαθητές).

9. **Χρήση κατάλληλου μαθηματικού λεξιλογίου:** Προ παρέμβασης εντοπίστηκαν τρεις μαθητές στις συνεντεύξεις που χρησιμοποιούσαν σωστό μαθηματικό λεξιλόγιο κατά την επίλυση προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού. Μετά την παρέμβαση οι μισοί μαθητές (11 από τους 22) έμαθαν μέσω των δύο εφαρμογιδίων να χρησιμοποιούν κατάλληλο μαθηματικό λεξιλόγιο και να αναφέρονται σε διπλασιασμό, τριπλασιασμό των ποσοτήτων, ταυτόχρονη μείωση ή αύξηση των ποσοτήτων, κ.ά.

10. **Επεξήγηση ορισμού ισότητας/ανισότητας:**

11. **Επεξήγηση ορισμού αναλογίας:**

Όσον αφορά στην επεξήγηση μαθηματικών ορισμών που διδάχθηκαν, και σε αυτές τις δεξιότητες παρατηρήθηκε σε κάποιο βαθμό βελτίωση από τους μαθητές. Μεγαλύτερη βελτίωση ωστόσο παρατηρήθηκε στη δεξιότητα της επεξήγησης των ορισμών ισότητας/ανισότητας, απ’ ότι στην επεξήγηση του ορισμού της αναλογίας. Πιο αναλυτικά, έξι (6) μαθητές πριν την παρέμβαση με τα εφαρμογίδια μπορούσαν να επεξηγούν ορθά τους ορισμούς της ισότητας και της ανισότητας, ενώ μετά περισσότεροι μαθητές απέκτησαν τη συγκεκριμένη δεξιότητα (15 μαθητές από τους 22). Στην περίπτωση της επεξήγησης του ορισμού της αναλογίας πριν την παρέμβαση κανένας μαθητής δεν γνώριζε τον ορισμό της έννοιας της αναλογίας. Μετά την παρέμβαση μόνο δύο (2) μαθητές έμαθαν να επεξηγούν τον ορισμό της έννοιας της αναλογίας.

Παρακάτω θα επεξηγηθεί πιο αναλυτικά ο βαθμός επίδρασης του κάθε εφαρμογιδίου ξεχωριστά. Έτσι θα διαφανεί καλύτερα για ποιο λόγο κάποιες από τις πιο πάνω δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού δεν αναπτύχθηκαν στους μαθητές όπως αναμενόταν.

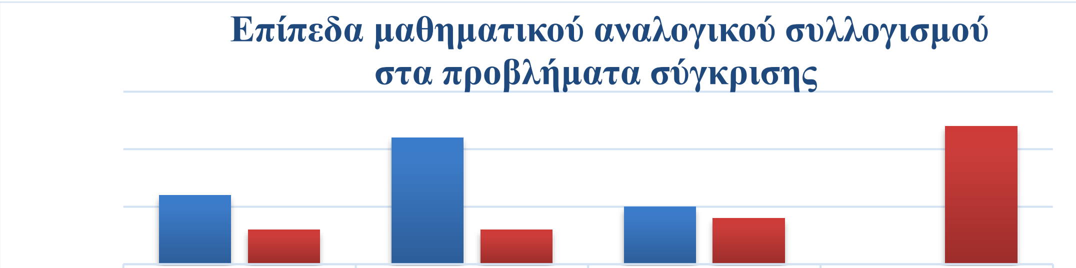
6.2.1 Αποτελέσματα ανάλυσης συνεντεύξεων στα προβλήματα σύγκρισης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μαθητών κατά την ανάλυση των συνεντεύξεων ως προς την τάση μετακίνησής τους πριν και μετά την παρέμβαση στα προβλήματα σύγκρισης με το 1ο εφαρμογίδιο: *σύγκριση ποσοτήτων.* Πιο συγκεκριμένα περιγράφεται σε ποιο επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είχαν τοποθετηθεί προ παρέμβασης και σε ποιο επίπεδο μετά την παρέμβαση και κατά πόσο άλλαξε ο τρόπος σκέψης τους. Να σημειωθεί ότι τα ονόματα των μαθητών που παρουσιάζονται στα πιο κάτω αποσπάσματα των συνεντεύξεων και στα διαγράμματα είναι ψευδώνυμα για σκοπούς προστασίας των προσωπικών τους δεδομένων.

Το Διάγραμμα 36 παρουσιάζει τον αριθμό των μαθητών που τοποθετήθηκαν στα αντίστοιχα επίπεδα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (επίπεδα 0, 1, 2 και 3) πριν και μετά την παρέμβαση, με βάση τα λεκτικά τους δεδομένα και τη μαθησιακή τους επίδοση κατά τις συνεντεύξεις.

Διάγραμμα 36

Επίπεδα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού στα προβλήματα σύγκρισης



	επίπεδο 0 (απουσία μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού)	επίπεδο 1 (άτυπος μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός)	επίπεδο 2 (ποσοτικός μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός)	επίπεδο 3 (επίσημος μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός)
ΠΡΙΝ	6	11	5	0
ΜΕΤΑ	3	3	4	12

ΠΡΙΝ ΜΕΤΑ

Από το πιο πάνω διάγραμμα παρατηρείται ότι πριν την παρέμβαση οι μαθητές ανάλογα με την κωδικοποίηση των λεκτικών τους δεδομένων τοποθετήθηκαν στα επίπεδα 0, 1 και 2. Αξιοσημείωτο είναι ότι πριν την παρέμβαση κανένας μαθητής δεν τοποθετήθηκε στο επίπεδο 3. Πιο αναλυτικά έξι (6) μαθητές τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 0 όπου υπήρχε απουσία μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (δηλαδή έδιναν λάθος απαντήσεις ή αδυνατούσαν να απαντήσουν, δεν μπορούσαν να αναγνωρίσουν την πολλαπλασιαστική σχέση και χρησιμοποιούσαν λανθασμένες στρατηγικές πρόσθεσης). Οι περισσότεροι μαθητές (11 από τους 22) τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 1 (άτυπος μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός) όπου μπορούσαν με διαισθητικό τρόπο να συγκρίνουν τα ζευγάρια ποσοτήτων που τους παρουσιάστηκαν και να εντοπίσουν τη σωστή απάντηση, αλλά δεν μπορούσαν να επεξηγήσουν πώς εργάστηκαν. Ενώ οι υπόλοιποι πέντε (5) μαθητές προ παρέμβασης τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 2 του ποσοτικού αναλογικού μαθηματικού συλλογισμού όπου παρατηρούσαν τη σχέση μεταξύ των αριθμών και εντόπιζαν την πολλαπλασιαστική σχέση, αλλά αιτιολογούσαν ποσοτικά και συνέδεαν τις ποσότητες με υπολογισμούς.

Παρατίθεται πιο κάτω ένα απόσπασμα συνέντευξης πριν την παρέμβαση όπου η μαθήτρια συγκρίνει τα ζευγάρια ποσοτήτων με ποιοτικό τρόπο, χωρίς να λαμβάνει υπόψη την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ τους. Εντοπίζει τη σωστή απάντηση μέσω ποιοτικής σύγκρισης, δηλαδή περιθωριοποιεί τα αριθμητικά δεδομένα και χρησιμοποιεί διαισθητικά φράσεις του τύπου «περισσότερο» ή «λιγότερο». Γι' αυτό και τοποθετήθηκε στο επίπεδο 1 του άτυπου αναλογικού συλλογισμού.

Απόσπασμα συνέντευξης σε πρόβλημα σύγκρισης πριν την παρέμβαση:

Ερευνήτρια: Ας δούμε το τελευταίο πρόβλημα, όπου τα δύο παιδιά θα φτιάξουν πάλι δύο πορτοκαλάδες χρησιμοποιώντας διαφορετικές ποσότητες στα υλικά τους. Ο Ιωάννης θα βάλει 9 ποτήρια χυμό πορτοκάλι και 3 ποτήρια νερό. Η Μαρία θα βάλει 3 ποτήρια χυμό και 1 ποτήρι νερό. Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού;

Βικτώρια: Νομίζω ότι θα είναι το ίδιο. ***(σωστή απάντηση)***

Ε: Πώς το σκέφτηκες αυτό;

Β: Επειδή και οι δύο έχουν βάλει πιο πολύ χυμό πορτοκαλιού. ***(ποιοτική σύγκριση)***

Ε: Τι εννοείς πιο πολύ;

Β: Δηλαδή περισσότερο χυμό και λιγότερο νερό. ***(ποιοτική σύγκριση)***

Ε: Παρατηρείς κάτι άλλο;

Β: Τι άλλο;

Ε: Οι αριθμοί στις ποσότητες των υλικών παθαίνουν κάτι;

Β: Ναι οι αριθμοί στο χυμό είναι μεγαλύτεροι. ***(παρατήρηση μόνο ενός ζευγαριού ποσοτήτων/περιθωριοποίηση του άλλου ζευγαριού)***

Ε: Οι δύο πορτοκαλάδες θα είναι ίδιες ή διαφορετικές;

Β: Θα είναι ίδιες. ***(αναγνώριση ισότητας)***

Ε: Γιατί;

Β: Γιατί και τα δύο παιδιά βάζουν πιο πολύ χυμό πορτοκαλιού. ***(σωστή διαισθητική απάντηση, χωρίς ορθή επεξήγηση)***

Ακολούθως, με βάση τα λεκτικά δεδομένα των συνεντεύξεων μετά την παρέμβαση οι μισοί μαθητές (12 μαθητές από τους 22) τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 3 όπου υπήρχε πλήρης κατανόηση και αντίληψη των σχέσεων μεταξύ των αριθμών, μπορούσαν να παρατηρήσουν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που υπήρχαν και να αναλογιστούν προς αυτές, χρησιμοποιούσαν και τις δύο στρατηγικές επίλυσης που είχαν διδαχθεί χωρίς βοήθεια και επεξηγούσαν μαθηματικούς ορισμούς με κατάλληλο μαθηματικό λεξιλόγιο. Τρεις (3) μαθητές δεν παρουσίασαν καμία αλλαγή και παρέμειναν στο επίπεδο 0, άλλοι τρεις (3) τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 1 με τη χρήση διαισθητικών στρατηγικών και την ποιοτική σύγκριση που έκαναν και τέσσερις (4) μαθητές τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 2 όπου χρησιμοποιούσαν ποσοτικό αναστοχασμό, εντόπιζαν μία εκ των δύο σχέσεων μεταξύ των αριθμών (είτε τις «εντός» σχέσεις είτε τις «εκτός») και χρησιμοποιούσαν μία εκ των δύο στρατηγικών που είχαν διδαχθεί.

Για καλύτερη επεξήγηση παρατίθεται πιο κάτω ένα απόσπασμα συνέντευξης μετά την παρέμβαση όπου ο συγκεκριμένος μαθητής έχει πλήρη αντίληψη και κατανόηση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των αριθμών. Παρατηρεί και εντοπίζει την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ τους, μπορεί να χρησιμοποιήσει και τις δύο στρατηγικές που διδάχθηκε χωρίς βοήθεια («εντός» σχέσεων και «εκτός» σχέσεων), αναγνωρίζει την ισότητα μεταξύ των ζευγαριών ποσοτήτων και την επεξηγεί με κατάλληλο μαθηματικό λεξιλόγιο. Όσοι μαθητές εμφάνιζαν αυτά τα χαρακτηριστικά και στα τέσσερα στάδια του προβλήματος σύγκρισης που είχαν να λύσουν και να επεξηγήσουν, τοποθετούνταν στο επίπεδο 3 του επίσημου αναλογικού συλλογισμού.

Απόσπασμα συνέντευξης σε πρόβλημα σύγκρισης μετά την παρέμβαση:

Ερευνήτρια: Θα λύσουμε κάποια προβλήματα. Διαβάζω εδώ το 1ο (διαβάζω μεγαλόφωνα το 1ο πρόβλημα). Εδώ είναι τα υλικά του Ιωάννη (1η πορτοκαλάδα) κι εδώ τα υλικά της Μαρίας (2η πορτοκαλάδα). Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού;

Ηλίας: Οι δύο πορτοκαλάδες είναι ίδιες. ***(σωστή απάντηση)***

Ε: Πώς το σκέφτηκες;

Η: Εμ… Καταρχήν βλέπω ότι ο Ιωάννης έχει 2 ποτήρια χυμό πορτοκάλι και η Μαρία έχει 4 ποτήρια χυμό. Μετά ο Ιωάννης έχει 4 ποτήρια νερό και η Μαρία έχει 8 ποτήρια νερό (χρησιμοποιεί τη στρατηγική για τις εντός σχέσεις). ***(παρατήρηση σχέσης αριθμών / στρατηγική εντός σχέσεων)***

Ε: Άρα υπάρχει κάποια σχέση;

Η: Ναι.

Ε: Τι σχέση;

Η: Μεταξύ τους διπλασιάστηκαν οι ποσότητες. ***(αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης)***

Ε: Μπορείς να αναπαραστήσεις τη σχέση τους με κάποιο τοξάκι; Και να βάλεις και τον αριθμό που έχουν αλλάξει οι ποσότητες;

(ο μαθητής σχεδιάζει τα τοξάκια πρώτα πάνω από την 1η ποσότητα: χυμός και μετά πάνω από τη 2η ποσότητα: νερό και γράφει και στις δύο ποσότητες επί 2) ***(στρατηγική εντός σχέσεων)***

Ε: Άρα τι σημαίνει αυτό;

Η: Και οι δύο πορτοκαλάδες θα είναι ίδιες επειδή απλά διπλασιάστηκαν οι ποσότητες τους. ***(αναγνώριση ισότητας / ορθή επεξήγηση)***

Ε: Υπάρχει κάποιος άλλος τρόπος που μπορούμε να το λύσουμε, αν δεν θέλω να συγκρίνω τον Ιωάννη και τη Μαρία;

Η: Νομίζω πως ναι, γιατί έχουμε μάθει δύο στρατηγικές. ***(επίδραση εφαρμογιδίων)***

Ε: Ποιες;

Η: Την κάθετη και την οριζόντια. ***(επίδραση εφαρμογιδίων)***

Ε: Άρα πριν ποια στρατηγική χρησιμοποίησες;

Η: Την οριζόντια. ***(στρατηγική εντός σχέσεων)***

Ε: Και τώρα;

Η: Βλέπω όμως ότι και στην οριζόντια και στην κάθετη πάλι διπλασιάστηκαν οι ποσότητες. ***(αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης / χρήση και των δύο στρατηγικών)***

Ε: Μπορείς να κάνεις κάποιο τοξάκι πάλι;

(ο μαθητής σχεδιάζει τη στρατηγική εκτός σχέσεις και γράφει επί 2) ***(στρατηγική εκτός σχέσεων)***

Ε: Ποιον από τους δύο τρόπους προτιμάς; Αυτή τη στρατηγική (δείχνω τις εκτός σχέσεις) ή την άλλη στρατηγική (δείχνω τις εντός σχέσεις);

Η: Την οριζόντια (εντός σχέσεις). ***(προτίμηση στρατηγικής εντός σχέσεων)***

Ε: Για ποιο λόγο;

Η: Επειδή στην οριζόντια συγκρίνω δύο ίδια υλικά ενώ στην κάθετη συγκρίνω δύο διαφορετικά υλικά. ***(ορθή επεξήγηση)***

Ε: Άρα κάποια πορτοκαλάδα θα έχει πιο έντονη γεύση χυμού;

Η: Ε… όχι.

Ε: Τι θα είναι;

Η: Το ίδιο. ***(αναγνώριση ισότητας)***

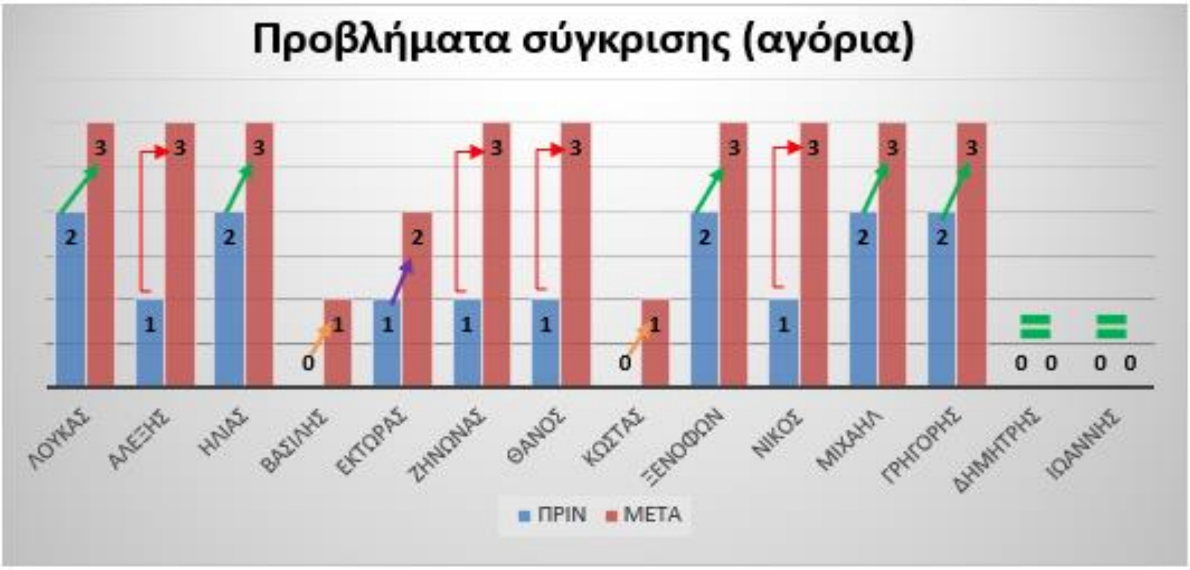
Ε: Ωραία. Αυτές οι ποσότητες είναι ίσες λέμε. Τι σημαίνει ίσες;

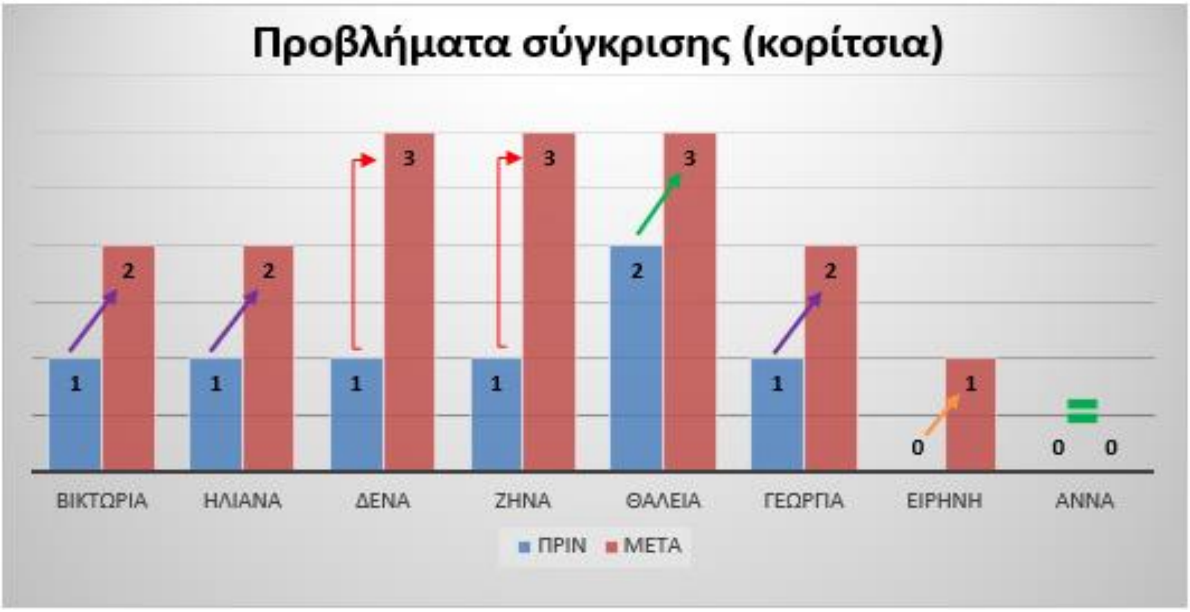
Η: Ότι έχουν τις ίδιες ποσότητες. ***(ορθή επεξήγηση)***

Το ακόλουθο Διάγραμμα 37 παρουσιάζει πιο αναλυτικά τη μεταβολή των μαθητών μεταξύ των επιπέδων (λόγω έλλειψης χώρου πρώτα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στα αγόρια και μετά τα αποτελέσματα στα κορίτσια). Οι αριθμοί πάνω στις ράβδους αντιπροσωπεύουν τα αντίστοιχα επίπεδα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (επίπεδα 0, 1, 2 και 3).

Διάγραμμα 37

Τάση μετακίνησης των μαθητών στα προβλήματα σύγκρισης





Σε αυτό το διάγραμμα φαίνεται πως η πλειοψηφία των μαθητών είχε παρουσιάσει βελτίωση στην επίλυση προβλημάτων σύγκρισης κατά την ανάλυση των συνεντεύξεων μετά την παρέμβαση και πως οι περισσότεροι μαθητές μεταπήδησαν επίπεδο. Συγκεκριμένα 19 μαθητές παρουσίασαν αλλαγή επιπέδου μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, ενώ μόνο τρεις (3) παρέμειναν στάσιμοι στο ίδιο επίπεδο (επίπεδο 0).

Τη μεγαλύτερη βελτίωση παρουσίασαν έξι μαθητές (4 αγόρια και 2 κορίτσια) οι οποίοι από το επίπεδο 1 του άτυπου μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μεταπήδησαν στο επίπεδο 3 το οποίο είναι το ανώτερο επίπεδο στη συγκεκριμένη κατάταξη. Έξι (6) μαθητές μεταπήδησαν από το επίπεδο 2 του ποσοτικού μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού στο επίπεδο 3. Θετικό όμως θεωρείται και το γεγονός ότι τρεις (3) μαθητές ενώ προ παρέμβασης τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 0, μετά την παρέμβαση ανέβηκαν ένα επίπεδο και τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 1. Οι υπόλοιποι τέσσερις (4) μαθητές μετατοπίστηκαν από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2.

Συνεπώς το 1^{ο} εφαρμογίδιο: *σύγκριση ποσοτήτων* είχε θετική επίδραση στον τρόπο σκέψης των περισσότερων μαθητών και τους βοήθησε να μάθουν να συγκρίνουν ζευγάρια ποσοτήτων, να παρατηρούν την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ των ζευγαριών αυτών, να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν την ισότητα ή την ανισότητα μεταξύ τους και συνεπώς να επιλύουν αλλά και να επεξηγούν τον τρόπο επίλυσης σε προβλήματα σύγκρισης μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

6.2.2 Αποτελέσματα ανάλυσης συνεντεύξεων στα προβλήματα άγνωστης αξίας

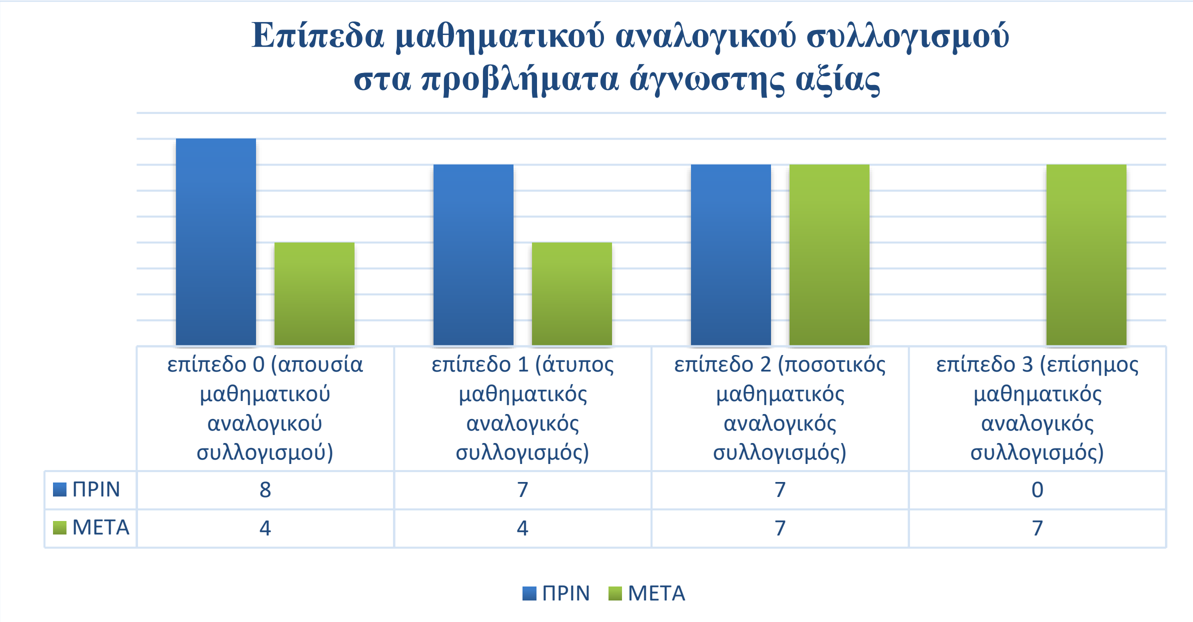
Εδώ καταγράφονται τα αποτελέσματα των μαθητών κατά την ανάλυση των συνεντεύξεων ως προς την τάση μετακίνησής τους πριν και μετά την παρέμβαση στα προβλήματα άγνωστης αξίας με το 2^{ο} εφαρμογίδιο: *αναλογίες.* Παρουσιάζεται σε ποιο επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είχαν τοποθετηθεί οι μαθητές προ παρέμβασης και σε ποιο επίπεδο μετά την παρέμβαση και κατά πόσο άλλαξε ο τρόπος σκέψης τους.

Το Διάγραμμα 38 παρουσιάζει τον αριθμό των μαθητών που τοποθετήθηκαν στα αντίστοιχα επίπεδα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (επίπεδα 0, 1, 2 και 3) πριν και μετά την παρέμβαση, με βάση τα λεκτικά τους δεδομένα και τη μαθησιακή τους επίδοση κατά τις συνεντεύξεις.

Και σε αυτή την περίπτωση να σημειωθεί ότι τα ονόματα των μαθητών που παρουσιάζονται στα πιο κάτω αποσπάσματα και διαγράμματα είναι ψευδώνυμα για σκοπούς προστασίας των προσωπικών τους δεδομένων.

Διάγραμμα 38

Επίπεδα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού στα προβλήματα άγνωστης αξίας



Στην περίπτωση του 2ου εφαρμογιδίου: *αναλογίες*, δεν παρατηρήθηκε τόση μεγάλη βελτίωση και επίδραση στον τρόπο σκέψης των περισσότερων μαθητών όπως είχε συμβεί και με το 1ο εφαρμογίδιο: *σύγκριση ποσοτήτων.* Οι μαθητές τόσο πριν όσο και μετά την παρέμβαση κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων άγνωστης αξίας στις συνεντεύξεις, τοποθετήθηκαν διάσπαρτα μεταξύ των τεσσάρων επιπέδων και δεν συγκεντρώθηκε η πλειοψηφία των μαθητών στα ανώτερα επίπεδα όπως έγινε και με το προηγούμενο εφαρμογίδιο που αφορούσε σύγκριση προβλημάτων.

Πιο αναλυτικά στο πάνω διάγραμμα φαίνεται ότι πριν την παρέμβαση οι μαθητές ανάλογα με την κωδικοποίηση των λεκτικών τους δεδομένων τοποθετήθηκαν στα επίπεδα 0, 1 και 2. Και σε αυτή την περίπτωση κανένας μαθητής δεν τοποθετήθηκε στο επίπεδο 3 πριν την παρέμβαση, που αποτελεί το ανώτερο επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα οκτώ (8) μαθητές από τους 22 τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 0 όπου υπήρχε απουσία μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (δηλαδή έδιναν λάθος απαντήσεις ή αδυνατούσαν να απαντήσουν, δεν μπορούσαν να αναγνωρίσουν την πολλαπλασιαστική σχέση και χρησιμοποιούσαν λανθασμένες στρατηγικές πρόσθεσης). Εφτά (7) μαθητές τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 1 (άτυπος μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός) όπου μπορούσαν με διαισθητικό τρόπο να εντοπίσουν τον άγνωστο αριθμό που απουσίαζε από την αναλογική σχέση, αλλά δεν μπορούσαν να επεξηγήσουν πώς εργάστηκαν. Ενώ οι υπόλοιποι εφτά (7) μαθητές προ παρέμβασης τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 2 του ποσοτικού αναλογικού μαθηματικού συλλογισμού όπου παρατηρούσαν ένα μοτίβο μεταξύ των αριθμών και μπορούσαν να το αναπαράγουν, εκτελούσαν σωστά τη μαθηματική πράξη, αιτιολογούσαν ποσοτικά και συνέδεαν τις ποσότητες με υπολογισμούς.

Παρατίθεται πιο κάτω ένα απόσπασμα συνέντευξης πριν την παρέμβαση όπου ο μαθητής παρατηρεί κάποια σχέση μεταξύ των αριθμών και την αναπαράγει, αλλά δεν αναστοχάζεται ως προς την αναλογική σχέση μεταξύ των αριθμών. Απλά εντοπίζει ένα μοτίβο μεταξύ των αριθμών και το συνεχίζει. Γι’ αυτό και τοποθετήθηκε στο επίπεδο 2 του ποσοτικού αναλογικού συλλογισμού.

Απόσπασμα συνέντευξης σε πρόβλημα άγνωστης αξίας πριν την παρέμβαση:

Ερευνήτρια: Πάμε τώρα στο Β’ μέρος που έχει τρία προβλήματα. Διάβασε δυνατά το 1ο πρόβλημα.

Ξενοφών: Η Ειρήνη φτιάχνει βραχιόλια χρησιμοποιώντας μπλε και πράσινες χάντρες. Για κάθε 2 μπλε χάντρες χρησιμοποιεί 4 πράσινες χάντρες. Πόσες πράσινες χάντρες χρειάζεται αν υπάρχουν 6 μπλε;

Ε: Ωραία. Πώς σκέφτεσαι να το λύσεις;

Ξ: Θα γίνουν 12 πράσινες. ***(ορθός μαθηματικός υπολογισμός)***

Ε: Πώς το σκέφτηκες;

Ξ: Επειδή για κάθε 2 μπλε υπάρχουν 4 πράσινες. ***(προσπάθεια επεξήγησης)***

Ε: Άρα;

Ξ: Σκέφτηκα ότι 4 διά 2 μας κάνουν 2. ***(σύνδεση ποσοτήτων με υπολογισμό)***

Ε: Μετά το πρόβλημα ρωτάει πόσες πράσινες χάντρες, χρειάζεται αν υπάρχουν 18 μπλε;

Ξ: Τώρα θα γίνουν 36 πράσινες. ***(ορθός μαθηματικός υπολογισμός)***

Ε: Εδώ πώς το βρήκες;

Ξ: Επειδή κάθε φορά κάνω φορές δύο ***(παρατήρηση και αναπαραγωγή μοτίβου)***

Ε: Στη συνέχεια το πρόβλημα μας ρωτάει πόσες μπλε χρειάζεται, αν υπάρχουν 44 πράσινες χάντρες;

Ξ: Τώρα θα κάνω το ανάποδο, 44 διά 2. ***(ορθή σκέψη για μαθηματική πράξη)***

Ε: Ναι;

Ξ: Που μας κάνουν 11 μπλε. ***(ορθός μαθηματικός υπολογισμός)***

Ε: Δηλαδή τι καταλαβαίνεις;

Ξ: Ότι κάθε φορά θα κάνω φορές δύο ή διά δύο. ***(παρατήρηση και αναπαραγωγή μοτίβου)***

Στη συνέχεια, με βάση τα λεκτικά δεδομένα των συνεντεύξεων μετά την παρέμβαση οι μαθητές παρουσίασαν διάφορα αποτελέσματα και τοποθετήθηκαν διάσπαρτα στα τέσσερα επίπεδα. Υπήρξαν μαθητές που παρουσίασαν βελτίωση και αλλαγή στον τρόπο σκέψης τους, αλλά και μαθητές που δεν παρουσίασαν την αναμενόμενη βελτίωση, καθώς και μαθητές που δεν είχαν επηρεαστεί από την ενασχόληση με το εφαρμογίδιο και παρέμειναν στο ίδιο επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Μόνο εφτά (7) μαθητές από τους 22 τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 3 όπου υπήρχε πλήρης κατανόηση και αντίληψη των σχέσεων μεταξύ των αριθμών, μπορούσαν να παρατηρήσουν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις που υπήρχαν και να αναλογιστούν προς αυτές, χρησιμοποιούσαν και τις δύο στρατηγικές επίλυσης που είχαν διδαχθεί χωρίς βοήθεια, μπορούσαν να κατασκευάσουν πίνακα λόγων-ποσοτήτων χωρίς βοήθεια και επεξηγούσαν ορθά τον τρόπο σκέψης τους για τις μαθηματικές πράξεις που έκαναν. Τέσσερις (4) μαθητές δεν παρουσίασαν καμία αλλαγή και παρέμειναν στο επίπεδο 0, άλλοι τέσσερις (4) τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 1 με τη χρήση διαισθητικών στρατηγικών και την ποιοτική σύγκριση που έκαναν και οι υπόλοιποι εφτά (7) μαθητές τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 2 όπου χρησιμοποιούσαν ποσοτικό αναστοχασμό, εντόπιζαν μία εκ των δύο σχέσεων μεταξύ των αριθμών (είτε τις εντός σχέσεις είτε τις εκτός) και χρησιμοποιούσαν μία εκ των δύο στρατηγικών που είχαν διδαχθεί.

Για καλύτερη επεξήγηση παρατίθεται πιο κάτω ένα απόσπασμα συνέντευξης μετά την παρέμβαση όπου ο συγκεκριμένος μαθητής έχει πλήρη αντίληψη και κατανόηση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των αριθμών. Παρατηρεί και εντοπίζει την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ τους, μπορεί να χρησιμοποιήσει και τις δύο στρατηγικές που διδάχθηκε χωρίς βοήθεια («εντός» σχέσεων και «εκτός» σχέσεων), κατασκευάζει και χρησιμοποιεί πίνακα λόγων-ποσοτήτων χωρίς βοήθεια, επεξηγεί τις μαθηματικές πράξεις που κάνει. Όσοι μαθητές εμφάνιζαν αυτά τα χαρακτηριστικά και στα τρία προβλήματα άγνωστης αξίας που είχαν να επιλύσουν και να επεξηγήσουν, τοποθετούνταν στο επίπεδο 3 του επίσημου αναλογικού συλλογισμού.

Απόσπασμα συνέντευξης σε πρόβλημα άγνωστης αξίας μετά την παρέμβαση:

Ερευνήτρια: Θα συνεχίσουμε τώρα με το 2ο πρόβλημα. Μπορείς να το διαβάσεις δυνατά;

Θάνος: Ο Φώτης και η Μαρία μαζεύουν τενεκεδάκια αναψυκτικών για ανακύκλωση. Για κάθε 2 τενεκεδάκια που μαζεύει ο Φώτης, η Μαρία μαζεύει 5. Ο Φώτης μάζεψε συνολικά 8 τενεκεδάκια. Πόσα τενεκεδάκια μάζεψε η Μαρία;

Ε: Με ποιο τρόπο σκέφτεσαι να το λύσεις αυτό;

Θ: Νομίζω θα φτιάξω έναν πίνακα για να το βρω. ***(επίδραση εφαρμογιδίου)***

Ε: Μάλιστα.

(ο μαθητής ξεκινάει να φτιάχνει πίνακα) ***(δημιουργία πίνακα λόγων-ποσοτήτων)***

Θ: Εμ… (γράφει στην πάνω γραμμή το όνομα Φώτης και στην κάτω γραμμή το όνομα Μαρία-ήρωες του προβλήματος).

Ε: Άρα στην πάνω γραμμή είναι ο Φώτης και στην κάτω γραμμή η Μαρία.

Θ: Ναι. Μετά μας λέει ότι ο Φώτης μάζεψε 2 και η Μαρία 5.

Ε: Ωραία.

(ο μαθητής γράφει τους αριθμούς πάνω στον πίνακα) ***(δημιουργία πίνακα λόγων-ποσοτήτων)***

Θ: Μετά ο Φώτης μάζεψε συνολικά 8.

Ε: Γράψε το κι αυτό πάνω στον πίνακα. Παρατηρείς κάτι τώρα που έφτιαξες τον πίνακα;

Θ: Παρατηρώ ότι το 2 με το 5 δεν συνδέονται. ***(παρατήρηση «εκτός» σχέσεων / αναγνώριση μη πολλαπλασιαστικής σχέσης)***

Ε: Άρα;

Θ: Δεν μπορώ να το λύσω έτσι. ***(αναγνώριση μη δυνατότητας χρήσης στρατηγικής εκτός σχέσεων)***

Ε: Τι άλλο μπορείς να κάνεις;

Θ: Παρατηρώ οριζόντια ότι το 2 με το 8 συνδέονται. ***(παρατήρηση σχέσης αριθμών)***

Ε: Ναι;

Μ: Είναι το τετραπλάσιο. ***(αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης / παρατήρηση «εντός» σχέσεων)***

Ε: Δηλαδή;

Θ: Έγινε φορές 4. ***(ορθή επεξήγηση για μαθηματική πράξη)***

Ε: Βάλε κι ένα τοξάκι για να καταλάβω καλύτερα.

(ο μαθητής σχεδιάζει τοξάκι και γράφει x4 στην πάνω γραμμή με τις ποσότητες του ενός παιδιού – εντός σχέσεις).

Θ: Άρα κι από κάτω πάλι θα τετραπλασιαστούν. ***(αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης / στρατηγική εντός σχέσεων)***

Ε: Πόσα τενεκεδάκια δηλαδή μάζεψε συνολικά η Μαρία;

Θ: 20. ***(ορθός μαθηματικός υπολογισμός)***

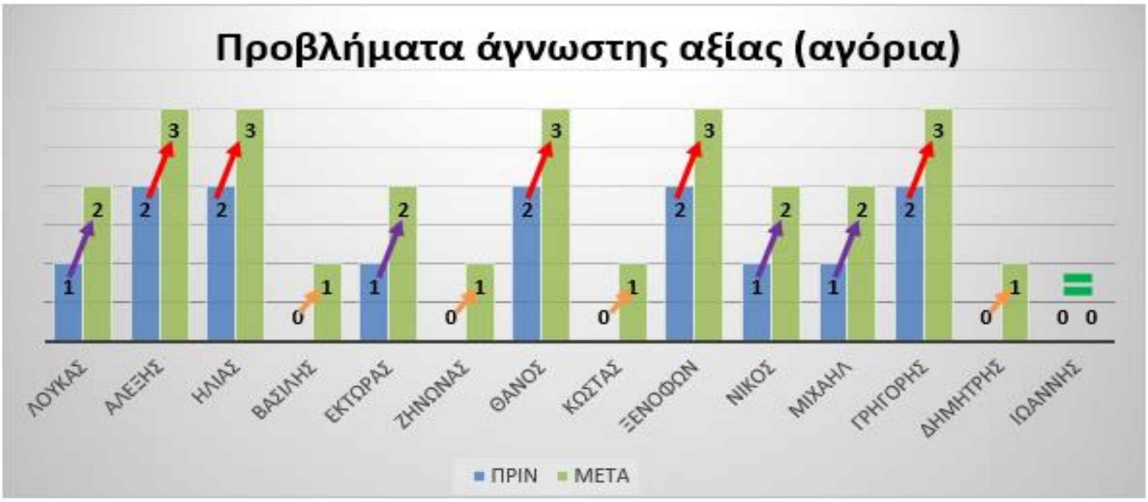
Ε: Πώς το βρήκες;

Θ: Έκανα 5 φορές το 4 ίσον 20. ***(ορθή σκέψη για μαθηματική πράξη)***

Το ακόλουθο Διάγραμμα 39 παρουσιάζει πιο αναλυτικά τη μεταβολή των μαθητών μεταξύ των επιπέδων (λόγω έλλειψης χώρου πρώτα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στα αγόρια και μετά τα αποτελέσματα στα κορίτσια). Οι αριθμοί πάνω στις ράβδους αντιπροσωπεύουν τα αντίστοιχα επίπεδα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (επίπεδα 0, 1, 2 και 3).

Διάγραμμα 39

Τάση Μετακίνησης των Μαθητών στα Προβλήματα Άγνωστης Αξίας



Στο πιο πάνω διάγραμμα φαίνεται πως αρκετοί μαθητές παρουσίασαν βελτίωση στη μαθησιακή τους επίδοση ως προς την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας κατά την ανάλυση των συνεντεύξεων μετά την παρέμβαση και συνεπώς μεταπήδησαν επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα 18 μαθητές παρουσίασαν αλλαγή επιπέδου, ενώ τέσσερις (4) μαθητές παρέμειναν στάσιμοι στο ίδιο επίπεδο (επίπεδο 0).

Πιο αναλυτικά εφτά (7) μαθητές (5 αγόρια και 2 κορίτσια) μεταπήδησαν από το επίπεδο 2 του ποσοτικού μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού στο ανώτερο επίπεδο 3. Άλλοι εφτά (7) μαθητές μετατοπίστηκαν από το επίπεδο 1 στο επίπεδο 2. Σημαντικό θεωρείται και το γεγονός ότι τέσσερις (4) μαθητές ενώ προ παρέμβασης τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 0, μετά την παρέμβαση ανέβηκαν ένα επίπεδο και τοποθετήθηκαν στο επίπεδο 1. Στη συγκεκριμένη περίπτωση της διερεύνησης της επίδρασης του 2^{ου} εφαρμογιδίου: *αναλογίες*, δεν υπήρξαν μαθητές με θεαματική βελτίωση οι οποίοι να επηρεαστούν σε τόσο μεγάλο βαθμό στον τρόπο σκέψης τους, ώστε να μεταπηδήσουν δύο επίπεδα, κάτι που συνέβη με το προηγούμενο εφαρμογίδιο στην επίλυση προβλημάτων σύγκρισης.

Συνολικά τα αποτελέσματα από την επίδραση του συγκεκριμένου εφαρμογιδίου ήταν διφορούμενα. Υπήρξαν μαθητές που παρουσίασαν βελτίωση και αλλαγή στον τρόπο σκέψης τους, αλλά και μαθητές που δεν παρουσίασαν την αναμενόμενη βελτίωση, καθώς και μαθητές που δεν είχαν επηρεαστεί από την ενασχόληση με το εφαρμογίδιο και παρέμειναν στο ίδιο επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Συνεπώς το 2^{ο} εφαρμογίδιο: *αναλογίες* δεν είχε την αναμενόμενη επίδραση στον τρόπο σκέψης των περισσότερων μαθητών.

Κατά τη διάρκεια πραγματοποίησης των συνεντεύξεων στην επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας παρατηρήθηκαν κάποιες δυσκολίες που συνάντησαν οι μαθητές και οι οποίες οφείλονται ίσως σε κάποιους περιορισμούς του συγκεκριμένου εφαρμογιδίου μέσω του οποίου διδάχθηκαν την έννοια της αναλογίας και στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων άγνωστης αξίας. Οι δυσκολίες αυτές περιγράφονται παρακάτω και παραθέτονται και κάποιες εισηγήσεις για βελτίωση αυτού του εφαρμογιδίου ως προς την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών.

6.2.3 Δυσκολίες μαθητών στα προβλήματα άγνωστης αξίας και εισηγήσεις για βελτίωση 2ου εφαρμογιδίου: αναλογίες

Η πιο σοβαρή δυσκολία που παρατηρήθηκε κατά την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας ήταν πως πολλοί μαθητές δυσκολεύονταν να τοποθετήσουν τα δεδομένα ενός προβλήματος σωστά πάνω στον πίνακα λόγων-ποσοτήτων που έφτιαχναν. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να επιβαρύνουν τον τρόπο σκέψη τους και να μην μπορούν να εντοπίσουν τη σωστή απάντηση (δηλαδή τον αριθμό που απουσίαζε από την αναλογική σχέση που τους παρουσιαζόταν).

Η δυσκολία τους αυτή ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι στο εφαρμογίδιο: *αναλογίες* μέσω του οποίου διδάχθηκαν να επιλύουν προβλήματα άγνωστης αξίας, ο πίνακας λόγων-ποσοτήτων τους εμφανιζόταν έτοιμος κι έπρεπε μόνο να υπολογίσουν μέσω της πολλαπλασιαστικής σχέσης τους αριθμούς που απουσίαζαν. Έτσι όταν χρειάστηκε να φτιάξουν οι ίδιοι ένα παρόμοιο πίνακα αντιμετώπισαν δυσκολίες. Μια τροποποίηση που θα μπορούσε να γίνει για να βελτιωθεί το εφαρμογίδιο ως προς αυτή τη δυσκολία θα ήταν αρχικά οι μαθητές να καλούνται να κατασκευάσουν τον πίνακα, τοποθετώντας στη σωστή θέση τα δεδομένα και τα ζητούμενα ενός προβλήματος και στη συνέχεια να προσπαθούν να εντοπίσουν τις σωστές απαντήσεις, δηλαδή τους άγνωστους αριθμούς.

Μια άλλη δυσκολία που παρατηρήθηκε ήταν ότι κάποιοι μαθητές χρειάζονταν προτροπή ή παρότρυνση για να φτιάξουν τον πίνακα λόγων-ποσοτήτων. Ο συγκεκριμένος πίνακας (ο οποίος παρουσιαζόταν συνεχώς στο 2ο εφαρμογίδιο: *αναλογίες*) θα τους βοηθούσε να παρατηρήσουν τη σχέση μεταξύ των αριθμών, να εντοπίσουν την πολλαπλασιαστική σχέση κι έτσι να υπολογίσουν με κάποια μαθηματική πράξη τον άγνωστο αριθμό. Αντιθέτως, αυτοί οι μαθητές προσπαθούσαν να βρουν την απάντηση κατευθείαν στο μυαλό τους με αποτέλεσμα να μην μπορούν να απαντήσουν ή να απαντούν λανθασμένα. Μόλις έφτιαχναν τον πίνακα, αναγνώριζαν τη σχέση μεταξύ των αριθμών και έλυναν σωστά το πρόβλημα.

Ένα ενδεχόμενο για αυτό το σημείο είναι ότι ίσως το εφαρμογίδιο να μην είχε τόση ισχυρή επίδραση που να τους βοηθήσει να κατανοήσουν τη μεγάλη σημασία που έχει η δημιουργία ενός τέτοιου πίνακα ως προς την επιτυχή επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας. Θα μπορούσε μέσα στο εφαρμογίδιο να τοποθετηθεί με κάποιο εντυπωσιακό τρόπο μια υπενθύμιση ή ένας διαμεσολαβητής πριν επιλύσουν κάποιο πρόβλημα, που θα τους τονίζει κάθε φορά τη σημασία δημιουργίας ενός τέτοιου πίνακα. Ίσως να τους επεξηγεί και με διαδραστικό τρόπο που ακριβώς τους βοηθάει. Οι μαθητές χρειάζεται να ενθαρρύνονται να χρησιμοποιούν πίνακες κατά την επίλυση προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, κάτι το οποίο θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν καλύτερα πως οι δύο συνδεόμενες ποσότητες μέσα σε μια αναλογική σχέση αλλάζουν και μεταβάλλονται ταυτόχρονα μαζί (Langrall & Swaffold, 2000).

Ένα τελευταίο σημείο που παρατηρήθηκε ήταν πως οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονταν να επεξηγήσουν τον ορισμό της έννοιας της αναλογίας (δηλαδή ότι είναι η ταυτόχρονη αύξηση ή μείωση ποσοτήτων ή πιο επίσημα η ισότητα δύο ποσοτήτων), παρόλο που αυτό αναφέρεται με επεξηγηματικό τρόπο εντός του εφαρμογιδίου. Επομένως ίσως μέσα στο εφαρμογίδιο να πρέπει να τονιστεί με διαφορετικό τρόπο ο ορισμός της αναλογίας. Με κάποιο έξυπνο τρόπο, ώστε να αποτυπωθεί στο μυαλό των μαθητών, καθώς είναι σημαντικό όχι απλώς να κατανοούν τη συγκεκριμένη έννοια, αλλά και να μπορούν να την επεξηγήσουν με κατάλληλο μαθηματικό λεξιλόγιο.

Εφαρμόζοντας τις πιο πάνω προτεινόμενες τροποποιήσεις, το 2^{ο} εφαρμογίδιο: *αναλογίες* θα βελτιωθεί σε σημαντικό βαθμό και θα μπορέσει να βοηθήσει τους μαθητές να μάθουν να επιλύσουν σωστά προβλήματα άγνωστης αξίας, αλλά και να επεξηγούν τον τρόπο σκέψης τους. Παράλληλα, θα τους καλλιεργήσει δεξιότητες σημαντικές που εμπίπτουν στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια της αναλογίας.

7. Συζήτηση

Ένα κρίσιμο ζήτημα στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο μαθαίνουν και κατανοούν οι μαθητές, καθώς κι ο τρόπος με τον οποίο είναι σε θέση όχι μόνο να κατασκευάσουν, αλλά και να μεταμορφώσουν μαθηματικές έννοιες και ιδέες. Σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία παίζουν οι εννοιολογικές και οπτικές αναπαραστάσεις. Η τεχνολογία έχει τη δύναμη να βελτιώσει τις ήδη προτεινόμενες αναπαραστάσεις, καθιστώντας τις διαδραστικές και δυναμικές, με παροχή άμεσης ανατροφοδότησης, καλλιέργειας του αναστοχασμού και μεταφοράς των αναπαραστάσεων σε αυθεντικά περιβάλλοντα μάθησης (Vandercruysse et al., 2015).

Αυτό επιβεβαιώνεται και από τη μετα-ανάλυση των Cheung και Slavin (2013) η οποία διερεύνησε την ενσωμάτωση τεχνολογικά υποστηριζόμενης μάθησης σε διάφορες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στο μάθημα των μαθηματικών και αναφέρει μια γενική θετική επίδραση των διάφορων τεχνολογιών ως προς τη βελτίωση της μαθησιακής επίδοσης των μαθητών στο συγκεκριμένο μάθημα. Οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν να υποστηρίξουν σε σημαντικό βαθμό τη μαθησιακή διαδικασία προσφέροντας τόσο άμεση ανατροφοδότηση όσο και δημιουργώντας ένα κατάλληλο και προσβάσιμο πλαίσιο ενσωμάτωσης διάφορων μαθηματικών εννοιών (Rick et al., 2015). Παράλληλα, η χρήση ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων σε οθόνες αφής έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμη και ωφέλιμη στο συγκεκριμένο μάθημα, συμβάλλοντας στην υποστήριξη μάθησης και στην εμφάνιση καλύτερων μαθησιακών αποτελεσμάτων (Zhang et al., 2015; Volk et al., 2017).

Μια μαθηματική έννοια που μπορεί να διδαχθεί μέσω σύγχρονων τεχνολογικών μέσων είναι ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός. Η ανάπτυξη του συγκεκριμένου συλλογισμού θεωρείται σημαντικό θέμα στα μαθηματικά και λαμβάνοντας υπόψη τις στενές σχέσεις που έχει με λόγους-αναλογίες, κλάσματα, ποσοστά, ρητούς αριθμούς και άλλες έννοιες, είναι ένα θέμα που καλύπτει ολόκληρο το αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών από το δημοτικό ως το πανεπιστήμιο (Lamon, 2007). Πρόκειται για μια θεμελιώδη ικανότητα ως προς τη μελλοντική μαθηματική κατανόηση και επιτυχία (Rick et al., 2012) και η ολοκληρωμένη ανάπτυξη του κρίνεται ως απαραίτητη. Η παραδοσιακή διδασκαλία για την ανάπτυξη του παρουσιάζεται συχνά ως αναποτελεσματική (Rick et al., 2012) και ως εκ τούτου οι μαθητές υστερούν σε δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Tourniaire & Pulos, 1985; Modestou & Gagatsis, 2007; Clark, 2008).

Γενικά, η κατανόηση της έννοιας της αναλογίας και συνεπώς η ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι δεξιότητες που δυσκολεύουν τους μαθητές ως προς την κατάκτησή τους. Η χρήση κάποιου τεχνολογικού μέσου είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και αποτελεσματική στην ανάπτυξη του συγκεκριμένου συλλογισμού, καθώς παρέχει ένα πλαίσιο οπτικοποίησης της έννοιας της αναλογίας και υποστηρίζει τη μάθηση με αλληλεπιδραστικό τρόπο (Kaplan & Ozturk, 2012).

Επομένως, σκοπός της παρούσας ερευνητικής μελέτης ήταν η εφαρμογή και αξιολόγηση δύο ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων που σχεδιάστηκαν για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα διερευνήθηκε η επίδραση των δύο αυτών εφαρμογιδίων στη μάθηση και κατ' επέκταση στην εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών προβλημάτων αναλογικού συλλογισμού.

Η σημαντική σχέση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού με το αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών, οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και η αναζήτηση εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων όπως είναι κάποια τεχνολογική παρέμβαση (στην προκειμένη περίπτωση τα ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια) δημιουργούν ένα πλαίσιο όπου η έρευνα σε σχέση με το αναφερόμενο θέμα κρίνεται ως αναγκαία.

Οι μαθησιακές εμπειρίες ενισχύονται από διαφορετικούς τρόπους υποστήριξης της μάθησης (Schitt & Weinberger, 2019). Επομένως, κατά τον σχεδιασμό ψηφιακών περιβαλλόντων μάθησης θα πρέπει να παρέχονται αρκετά εργαλεία υποστήριξης της μάθησης στα οποία οι εκάστοτε μαθητές να έχουν άμεση και εύκολη πρόσβαση, όπως είναι τα εργαλεία ανατροφοδότησης, οι προτροπές, οι πίνακες, τα διαγράμματα, η οπτικοποίηση εννοιών, τα καθοδηγητικά βέλη κ.ά. (Rick, 2012). Παράλληλα, η χρήση κάποιου τεχνολογικού μέσου χρειάζεται να γίνεται με σκοπό τη δημιουργία ενός υποστηρικτικού μαθησιακού περιβάλλοντος, μέσω του οποίου οι μαθητές να οικοδομούν μόνοι τους τη γνώση (Kaplan & Ozturk, 2012).

Λαμβάνοντας υπόψη τα πιο πάνω σημεία, κατά τον σχεδιασμό των δύο εφαρμογιδίων έγινε προσπάθεια να δημιουργηθούν δύο εκπαιδευτικά εφαρμογίδια στα οποία οι μαθητές να μπορούν να εργάζονται αυτόνομα και ανεξάρτητα, να κατανοούν τι κάνουν και τι μαθαίνουν, να έχουν πρόσβαση σε υποστηρικτικά εργαλεία μάθησης και να είναι σε θέση μετά την ενασχόλησή τους με τα δύο αυτά εφαρμογίδια να μεταφέρουν τις γνώσεις που έμαθαν στην επίλυση προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Κατά τις Langrall και Swafford (2000) η εισαγωγή για την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού χρειάζεται να αρχίζει από καταστάσεις που μπορούν να οπτικοποιηθούν ή να μοντελοποιηθούν. Αυτό είναι κάτι που συμβαίνει με το 1^{ο} εφαρμογίδιο: *σύγκριση ποσοτήτων* όπου οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν κάποια γνώριμα σ' αυτούς μείγματα με δύο είδη συστατικών υλικών κάθε φορά και στη συνέχεια να συγκρίνουν τα μείγματα που έχουν φτιάξει.

Επιπλέον, για να βοηθηθούν οι μαθητές να αναστοχαστούν και να συγκρίνουν καταστάσεις όπου δύο ποσότητες αλλάζουν σε σχέση με δύο άλλες, πρέπει πρώτα να μάθουν να κάνουν ποιοτικές συγκρίσεις πριν τις αριθμητικές συγκρίσεις και πριν τον εντοπισμό άγνωστων τιμών (Langrall & Swafford, 2000). Γι' αυτό το λόγο η διδασκαλία του συγκεκριμένου θέματος στην εν λόγω έρευνα ξεκινά αρχικά με το 1^{ο} εφαρμογίδιο: *σύγκριση ποσοτήτων* το οποίο αφορά ποιοτική σύγκριση μεταξύ ζευγαριών ποσοτήτων. Στη συνέχεια οι μαθητές ασχολούνται με το 2^{ο} εφαρμογίδιο: *αναλογίες*, μέσω του οποίου μαθαίνουν τις αριθμητικές συγκρίσεις και εντοπίζουν άγνωστες τιμές ποσοτήτων που οδηγούν στη δημιουργία αναλογίας.

Σε σχέση με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα «Σε ποιο βαθμό η χρήση τεχνολογίας μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της επίδοσης μαθητών Δ' τάξης ως προς την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης (1^{η} κατηγορία προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού);» μέσα από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι το 1^{ο} εφαρμογίδιο: *σύγκριση ποσοτήτων* επέδρασε θετικά στη μάθηση και στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών σε σχέση με την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης.

Τα αποτελέσματα από την ανάλυση των προ-διαγνωστικών και μετα-διαγνωστικών δοκιμίων ως προς την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης των μαθητών και των δύο συνθηκών (N=42) έδειξαν στατιστικά σημαντική διαφορά στους μαθητές της Α' συνθήκης (εφαρμογίδια), οι οποίοι εξασφάλισαν υψηλότερες βαθμολογίες από τους μαθητές της Β' συνθήκης (παραδοσιακή διδασκαλία).

Παράλληλα, από την ανάλυση των συνεντεύξεων πριν και μετά την παρέμβαση με όλους τους μαθητές της Α' συνθήκης (n=22) φάνηκε ότι το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο που αφορούσε την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης βοήθησε τους μαθητές να αλλάξουν τον τρόπο σκέψης τους. Συγκεκριμένα, 19 μαθητές από τους 22 παρουσίασαν αλλαγή επιπέδου μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και μετακινήθηκαν προς τα πάνω, ενώ μόνο τρεις (3) μαθητές παρέμεναν στάσιμοι στο ίδιο επίπεδο. Σημαντικό είναι και το γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητών (12 από τους 22) μετά την παρέμβαση με το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο έφθασε στο επίπεδο 3 που αποτελεί το ανώτερο επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Με τα πιο πάνω αποτελέσματα συμφωνούν κι άλλες έρευνες που όμως πραγματοποιήθηκαν με διαφορετικά τεχνολογικά μέσα και είχαν ως δείγμα διαφορετικές ηλικίες μαθητών. Οι Boyer και Levine (2015) χρησιμοποίησαν ένα λογισμικό σε υπολογιστή μέσω του οποίου μαθητές Α, Β' Γ' και Δ' τάξης έμαθαν να συγκρίνουν ζευγάρια ποσοτήτων και να επιλύουν προβλήματα σύγκρισης. Οι Vandercruysse et al. (2015) ανέπτυξαν ψηφιακό παιχνίδι για μαθητές τεχνικής επαγγελματικής εκπαίδευσης και μέσα από την έρευνά τους κατέληξαν στο συμπέρασμα πως τα χαρακτηριστικά που ενσωμάτωσαν στο ψηφιακό παιχνίδι βοήθησαν τους μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (στα προβλήματα που είχαν συμπεριλάβει περιλαμβάνονταν και προβλήματα σύγκρισης). Σε συνέχεια της έρευνάς τους, οι ter Vrugte et al. (2017) στο ίδιο ψηφιακό παιχνίδι πρόσθεσαν και το στοιχείο της παροχής παραδειγμάτων ορθής επίλυσης προβλημάτων, το οποίο βοήθησε ακόμη περισσότερο τους μαθητές. Ακόμη, οι He et al. (2019) δοκίμασαν ένα άλλο λογισμικό σε υπολογιστή με παροχή οπτικών βοηθημάτων για επίλυση προβλημάτων σύγκρισης σε μαθητές προσχολικής εκπαίδευσης, το οποίο τους βοήθησε να βελτιώσουν τη μαθησιακή τους επίδοση. Το κοινό συμπέρασμα αυτών των ερευνών με την παρούσα έρευνα είναι ότι η τεχνολογία έχει τη δύναμη να επηρεάσει σε σημαντικό βαθμό τη μάθηση και τον τρόπο σκέψης των μαθητών.

Όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα «Σε ποιο βαθμό η χρήση τεχνολογίας μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της επίδοσης μαθητών Δ' τάξης ως προς την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας (2^{η} κατηγορία προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού);» τα αποτελέσματα εδώ έδειξαν ότι το 2^{ο} εφαρμογίδιο: *αναλογίες* δεν είχε τόσο μεγάλη επίδραση στη μάθηση και στον τρόπο σκέψης των μαθητών σε σχέση με την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας. Γενικά τα αποτελέσματα από την επίδραση του συγκεκριμένου εφαρμογιδίου ήταν διφορούμενα: υπήρξαν μαθητές που παρουσίασαν βελτίωση και αλλαγή στον τρόπο σκέψης τους, αλλά και μαθητές που δεν παρουσίασαν την αναμενόμενη βελτίωση, καθώς και μαθητές που δεν είχαν επηρεαστεί από την ενασχόλησή τους με αυτό και παρέμειναν στο ίδιο επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Από την ανάλυση των προ-διαγνωστικών και μετα-διαγνωστικών δοκιμίων ως προς την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας φάνηκε ότι τόσο οι μαθητές στην Α' συνθήκη (εφαρμογίδια) όσο και οι μαθητές στη Β’ συνθήκη (παραδοσιακή διδασκαλία) τα πήγαν εξίσου καλά στο μετα-διαγνωστικό δοκίμιο μετά τις αντίστοιχες παρεμβάσεις και οι διαφορές τους δεν ήταν στατιστικά σημαντικές.

Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης των συνεντεύξεων παρατηρήθηκε ότι αυτό το εφαρμογίδιο βοήθησε σε κάποιο βαθμό τη βελτίωση μαθησιακής επίδοσης των μαθητών. Πιο αναλυτικά, 18 μαθητές από τους 22 παρουσίασαν αλλαγή επιπέδου, ενώ τέσσερις (4) μαθητές παρέμειναν στάσιμοι στο ίδιο επίπεδο. Ωστόσο, δεν είχε την αναμενόμενη επίδραση στον τρόπο σκέψης των περισσότερων μαθητών. Μόνο εφτά (7) μαθητές κατάφεραν να τοποθετηθούν στο επίπεδο 3 (το ανώτερο επίπεδο μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού).

Κατά τη βιβλιογραφική ανασκόπηση δεν εντοπίστηκαν έρευνες που να εστιάσουν συγκεκριμένα στην επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας μέσω τεχνολογίας. Οι μοναδικές που εντοπίστηκαν ήταν των Vandercruysse et al. (2015) και των ter Vrugte et al. (2017), οι οποίες χρησιμοποίησαν ένα ψηφιακό παιχνίδι και συμπεριέλαβαν εκεί και τα τρία είδη προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (σύγκρισης, άγνωστης αξίας και μετατροπής). Τα δικά τους όμως συμπεράσματα δεν συμφωνούν με τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης, καθώς στις δικές τους περιπτώσεις οι μαθητές παρουσίασαν βελτίωση στην επίλυση και των τριών ειδών προβλημάτων, οπότε και των προβλημάτων άγνωστης αξίας.

Ωστόσο, κατά την πραγματοποίηση των συνεντεύξεων στο πλαίσιο αυτής της έρευνας διαφάνηκαν καλύτερα κάποιες δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας. Οι δυσκολίες τους αυτές ίσως να οφείλονται σε κάποιους περιορισμούς που είχε το 2ο εφαρμογίδιο: *αναλογίες* μέσω του οποίου διδάχθηκαν την έννοια της αναλογίας και ασχολήθηκαν με την επίλυση προβλημάτων άγνωστης αξίας. Οι περιορισμοί αυτοί καθώς και κάποιες εισηγήσεις για βελτίωση τους επεξηγήθηκαν πιο αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Εν κατακλείδι το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο χρειάζεται κάποιες αναγκαίες τροποποιήσεις για αναβάθμιση και βελτίωσή του.

Συμπερασματικά ο σχεδιασμός κατάλληλης και αποτελεσματικής εκπαιδευτικής υποστήριξης σε ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια που να βοηθάει και να παρέχει ίση υποστήριξη μάθησης σε όλους τους μαθητές είναι κάτι πολύ δύσκολο (ter Vrugte et al., 2017). Συνεπώς αποτελεί μια πρόκληση, καθώς ο μαθητικός πληθυσμός εντός μια τάξης έχει διαφορετικές εκπαιδευτικές ανάγκες και δυνατότητες. Επιπρόσθετα, τα είδη εκπαιδευτικής υποστήριξης που έχουν αποδειχθεί επιτυχή σε άλλα ψηφιακά περιβάλλοντα μάθησης, ίσως δεν είναι παραγωγικά με τον ίδιο βαθμό επίδρασης και σε ψηφιακά εφαρμογίδια. Είναι απαραίτητο να γίνονται πολλές δοκιμές και αναπροσαρμογές των παρεχόμενων τεχνολογικών εργαλείων υποστήριξης μάθησης.

Τέλος, σε σχέση με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα: «Ποια είναι η επίδραση των δύο ψηφιακών εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων στην ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού;» από τα αποτελέσματα της ανάλυσης των συνεντεύξεων της Α’ συνθήκης φάνηκε ότι η πλειοψηφία των μαθητών (18 από τους 22) ανέπτυξαν και καλλιέργησαν δεξιότητες που εμπίπτουν στην έννοια του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Πιο συγκεκριμένα μέσω των εφαρμογιδίων έμαθαν να αναγνωρίζουν την πολλαπλασιαστική σχέση σε ποσότητες και να επεκτείνουν την σχέση αυτή και σε άλλα ζευγάρια ποσοτήτων, να συγκρίνουν ζεύγη ποσοτήτων και να εντοπίζουν την ισότητα ή ανισότητα μεταξύ τους, να εντοπίζουν και να υπολογίζουν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων, να υπολογίζουν άγνωστους αριθμούς βασιζόμενοι στην πολλαπλασιαστική σκέψη, να κατανοούν και να εφαρμόζουν στρατηγικές «εντός» και «εκτός» σχέσεων, να κατασκευάζουν και να χρησιμοποιούν πίνακα λόγων-ποσοτήτων και τέλος να επεξηγούν μαθηματικούς ορισμούς χρησιμοποιώντας κατάλληλο λεξιλόγιο.

Η πρόοδος που παρουσιάζουν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων και καταστάσεων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού καθορίζεται βάσει συγκεκριμένων αναπτυξιακών επιπέδων (Langrall & Swafford, 2000). Τα επίπεδα αυτά διακρίνονται από ποιοτικές διαφορές στις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές. Θεμελιώδης σημασίας θεωρείται η μετάβαση από τη χρήση προσθετικού συλλογισμού στην εφαρμογή πολλαπλασιαστικού συλλογισμού. Ένα άλλο σημαντικό σημείο είναι η μετάβαση από τη χρήση διαισθητικών στρατηγικών σε πιο στοχευμένες στρατηγικές (Lamon, 2007). Τα δύο αυτά εφαρμογίδια βοήθησαν την πλειοψηφία των μαθητών να μεταπηδήσει από την προσθετική σκέψη στην πολλαπλασιαστική (15 μαθητές από τους 22), καθώς και από τις διαισθητικές στρατηγικές στη χρήση ειδικών στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων αναλογικού συλλογισμού (14 μαθητές από τους 22).

Από την ανάλυση των συνεντεύξεων που έγιναν πριν την παρέμβαση με τα δύο εφαρμογίδια, διαπιστώθηκε ότι αρκετοί μαθητές είχαν τη διαίσθηση ότι υπάρχει μια διαφορά στα ζευγάρια ποσοτήτων που τους παρουσιάζονταν κάθε φορά και η οποία σχετίζεται με το μέγεθος των αριθμών. Αλλά δεν συνειδητοποιούσαν πως αυτή η διαφορά είναι πολλαπλασιαστική καθώς και ότι είναι σταθερή ανάμεσα στις ποσότητες κάθε ζεύγους.

Αντίθετα, μετά την παρέμβαση οι πλείστοι μαθητές (15 μαθητές) έμαθαν να παρατηρούν τη σχέση μεταξύ των αριθμών τόσο στα προβλήματα σύγκρισης όσο και στα προβλήματα άγνωστης αξίας και να εντοπίζουν την πολλαπλασιαστική σχέση που υπήρχε. Μέσω των εφαρμογιδίων καλλιεργήθηκε η πολλαπλασιαστική τους σκέψη και έμαθαν να αναγνωρίζουν την αμετάβλητη φύση των σχέσεων τόσο μέσα στην ίδια ποσότητα (εντός σχέσεων) όσο και ανάμεσα στις διαφορετικές ποσότητες (εκτός σχέσεων). Χαρακτηριστικό τους γνώρισμα επίσης ήταν η απόκτηση στρατηγικών από τις οποίες είχαν να επιλέξουν την καταλληλότερη για την ορθή επίλυση κάθε προβλήματος.

Ελάχιστοι μαθητές δεν κατόρθωσαν να αναπτύξουν συνολικά αυτές τις δεξιότητες (συγκεκριμένα 4 μαθητές από τους 22 της Α' συνθήκης), αλλά αυτό μπορεί να αιτιολογηθεί καθώς όπως αναφέρθηκε πιο πάνω η ενσωμάτωση εργαλείων υποστήριξης μάθησης σε ψηφιακά περιβάλλοντα που να ικανοποιεί τις εκπαιδευτικές ανάγκες όλων των μαθητών είναι μια δύσκολη διαδικασία, που απαιτεί συνεχείς πειραματισμούς και δοκιμές σε αυθεντικά πλαίσια μάθησης. Μέσα από τον πειραματισμό, την παρατήρηση και την ανατροφοδότηση από τους μαθητές θα επιτευχθεί κατάλληλη υποστήριξη μάθησης προς όφελος όλων των μαθητών.

Με τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας συμφωνούν κι άλλες έρευνες οι οποίες με διάφορα τεχνολογικά μέσα κατόρθωσαν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της αναλογίας καθώς και να αναπτύξουν δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (Nabors, 2003; Kaplan & Ozturk, 2012, Rick, 2012; Rick et al., 2015; Schmitt & Weinberger, 2019).

Συνοψίζοντας τα δύο ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια κατόρθωσαν σε μεγάλο βαθμό να επηρεάσουν τον τρόπο σκέψης και την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών, συμβάλλοντας θετικά στη μάθησή τους. Συνδυαστικά και τα δύο πέτυχαν να βοηθήσουν τους μαθητές να αποκτήσουν συγκεκριμένες δεξιότητες μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Εξετάζοντας τα ξεχωριστά το 1ο εφαρμογίδιο: *σύγκριση ποσοτήτων* είχε μεγαλύτερη θετική επίδραση στη μαθησιακή επίδοση των μαθητών ως προς την επίλυση προβλημάτων σύγκρισης, με στατιστικά σημαντική διαφορά σε σύγκριση με την παραδοσιακή διδασκαλία. Το 2ο εφαρμογίδιο: *αναλογίες* αν και βοήθησε τους μαθητές να μάθουν να επιλύουν με επιτυχία προβλήματα άγνωστης αξίας, ωστόσο η διαφορά εκεί δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Γι' αυτό το λόγο και χρειάζεται να γίνουν κάποιες τροποποιήσεις για βελτίωσή του.

7.1 Συνεισφορά έρευνας

Η μελέτη αυτή αποτελεί μια αρχική προσπάθεια διδασκαλίας του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω ενός εναλλακτικού και πιο σύγχρονου τρόπου διδασκαλίας όπως είναι η χρήση κάποιου τεχνολογικού μέσου, στην προκειμένη περίπτωση τα ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια. Πρόκειται για μια τεχνολογία που αξίζει περαιτέρω επιστημονική έρευνα και μελέτη, καθώς παρέχει ένα ισχυρό μαθησιακό περιβάλλον όπου οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά και παραγωγικά στη διαδικασία της μάθησης. Συνεπώς η παρούσα έρευνα προσθέτει εμπειρικά δεδομένα στην ερευνητική κοινότητα, καθώς δεν έχουν εντοπιστεί πολλές έρευνες που να προωθούν την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μέσω αυτής της τεχνολογικής υποστήριξης.

Παράλληλα, η εταιρεία με την οποία υπήρξε συνεργασία ως προς την ανάπτυξη και τον προγραμματισμό των δύο ψηφιακών εφαρμογιδίων, έχει ήδη εντάξει στη ψηφιακή της πλατφόρμα τα αναφερόμενα εφαρμογίδια (σε πέντε ξένες γλώσσες) και τα χρησιμοποιούν σχολεία του εξωτερικού με τα οποία συνεργάζεται.

7.2 Περιορισμοί έρευνας

Ο πιο σημαντικός περιορισμός της παρούσας έρευνας είναι το γεγονός ότι δεν πραγματοποιήθηκαν ατομικές συνεντεύξεις (πριν και μετά) με τους μαθητές της Β' συνθήκης (παραδοσιακή διδασκαλία) λόγω έλλειψης χρόνου. Παράλληλα, το δείγμα της έρευνας (Ν=42) ήταν μικρό και δείγμα ευκολίας, οπότε αυτό δεν επιτρέπει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων στον ευρύτερο μαθητικό πληθυσμό.

Ένας άλλος βασικός περιορισμός είναι ότι δεν δόθηκε στους μαθητές και των δύο συνθηκών ένα μετα-διαγνωστικό δοκίμιο επαναληπτικά για έλεγχο της διατήρησης της γνώσης και σύγκριση των μεταξύ τους αποτελεσμάτων. Κάτι που ίσως να πρόσθετε σημαντικά ευρήματα ως προς την προστιθέμενη αξία της χρήσης τεχνολογίας σε σχολικά περιβάλλοντα.

Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι η Β' συνθήκη δεν χρησιμοποίησε κάποια άλλη τεχνολογία ίσως να αποτελεί περιορισμό έρευνας ως προς το θέμα των κινήτρων μάθησης. Δηλαδή οι μαθητές της Β' συνθήκης που χρησιμοποίησαν παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας (βιβλίο μαθηματικών, τετράδιο εργασιών, πίνακας σχολικής αίθουσας) ίσως να είχαν χαμηλότερα κίνητρα μάθησης, συγκρινόμενοι με τους μαθητές της Α’ συνθήκης οι οποίοι χρησιμοποίησαν τα εκπαιδευτικά εφαρμογίδια σε οθόνες αφής.

Επίσης, στην απάντηση του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος σε σχέση με την επίδραση των δύο εφαρμογιδίων συνδυαστικά ως προς την ανάπτυξη δεξιοτήτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μετρήθηκαν μόνο τα δεδομένα από την ανάλυση των συνεντεύξεων, καθώς θεωρήθηκε ότι από τα λεκτικά δεδομένα μπορούσαν να εξαχθούν περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με τον τρόπο σκέψης των μαθητών και την επίδραση που είχαν στην εννοιολογική κατανόησή τους τα δύο εφαρμογίδια.

Τέλος, στη διόρθωση των διαγνωστικών δοκιμίων δεν υπήρξε διαβαθμολογική αξιοπιστία (inter-rater reliability) με άλλο ερευνητή, καθώς οι επεξηγήσεις των μαθητών σχετικά με τις απαντήσεις τους ήταν σύντομες και ξεκάθαρες (π.χ. γιατί επέλεξαν μια συγκεκριμένη απάντηση από τις επιλογές που είχαν ή με ποιο τρόπο υπολόγισαν έναν αριθμό που έγραψαν, κ.ά.). Επομένως, θεωρήθηκε αχρείαστη η συνεισφορά ενός δεύτερου ατόμου. Εν τούτοις θεωρείται κι αυτό ως ένας μικρός περιορισμός.

7.3 Εισηγήσεις για μελλοντικές έρευνες

Τα αποτελέσματα της παρούσας ερευνητικής μελέτης δείχνουν πως το συγκεκριμένο θέμα χρήζει περαιτέρω διερεύνησης με μεγαλύτερο δείγμα μαθητών. Μια βασική εισήγηση θα ήταν να πραγματοποιούνταν συνεντεύξεις πριν και μετά την παρέμβαση και με τους μαθητές της Β’ συνθήκης (παραδοσιακή διδασκαλία). Αυτό θα επέτρεπε τη βαθύτερη διερεύνηση της επίδρασης των δύο εφαρμογιδίων στη μάθηση καθώς θα υπήρχε καλύτερη σύγκριση των μαθησιακών αποτελεσμάτων και των δύο συνθηκών.

Όπως προαναφέρθηκε και στους περιορισμούς της έρευνας θα ήταν χρήσιμη η χορήγηση του μετα-διαγνωστικού δοκιμίου για δεύτερη φορά μετά τις αντίστοιχες παρεμβάσεις στους μαθητές και των δύο συνθηκών (π.χ. ένα μήνα μετά τις παρεμβάσεις). Αυτό θα καθιστούσε δυνατή τη σύγκριση της μαθησιακής επίδοσης των μαθητών και στις δύο συνθήκες ως προς τη διατήρηση τη γνώσης στην ορθή επίλυση προβλημάτων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Επίσης, ενδιαφέρον θα ήταν και η προσθήκη μιας τρίτης ερευνητικής συνθήκης. Σε μια μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να προστεθεί η Γ’ συνθήκη που ίσως να συνδύαζε τη ψηφιακή μάθηση με την παραδοσιακή διδασκαλία (δηλαδή τα εφαρμογίδια με το βιβλίο).

Υποθετικά θα μπορούσαν οι μαθητές να ξεκινούσαν τη διερεύνηση των σχετικών εννοιών στα εφαρμογίδια και στη συνέχεια να επιλύαν προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που εμπεριέχονται στο βιβλίο μαθηματικών τους, για περαιτέρω εξάσκηση και εμπέδωση.

Παράλληλα, μια μεταγενέστερη έρευνα θα μπορούσε να διερευνήσει την επίδραση των κινήτρων των μαθητών ως προς τη βελτίωση της μαθησιακής τους επίδοσης στα μαθηματικά. Διάφορες έρευνες αναφέρουν θετική επίδραση της χρήσης εφαρμογιδίων σε οθόνες αφής ως προς την ανάπτυξη κινήτρων μάθησης των μαθητών και αύξηση του ενδιαφέροντος τους (Zhang et al., 2015; Volk et al., 2017). Θα μπορούσε επομένως να δοθεί στους μαθητές και των δύο συνθηκών ένα ερωτηματολόγιο που να εξετάζει στάσεις και κίνητρα τους πριν και μετά τις αντίστοιχες παρεμβάσεις. Αυτό θα επέτρεπε τη διερεύνηση της επίδρασης των κινήτρων στη μάθηση σε σχέση με το θέμα του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Ακόμη, μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον θα παρουσίαζε και η εισαγωγή δεδομένων για ανάλυση μαθησιακής συμπεριφοράς των μαθητών κατά την ενασχόλησή τους με τα εφαρμογίδια. Θα μπορούσε με κάποιο τεχνολογικό προγραμματισμό να ελέγχεται και να καταγράφεται η κίνηση κάθε μαθητή κατά τη διάρκεια που ασχολείται με τα δύο εφαρμογίδια (π.χ. πόσο χρόνο αφιέρωσε σε κάθε δραστηριότητα, πόσα λάθη έκανε, πόσες φορές ξεκίνησε από την αρχή κάποια δραστηριότητα, αν χρησιμοποίησε κάποιο εργαλείο υποστήριξης μάθησης, κ.ά.). Με αυτό τον τρόπο θα συλλέγονταν αναλυτικά και ξεχωριστά δεδομένα για κάθε μαθητή, τα οποία θα επέτρεπαν την εις βάθος διερεύνηση της επίδρασης των συγκεκριμένων εφαρμογιδίων καθώς και την εξέταση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών τους και με ποιο τρόπο βοήθησαν τους μαθητές κατά τη μαθησιακή διαδικασία.

Μια τελευταία εισήγηση για μελλοντική έρευνα θα ήταν να διερευνηθεί ποια από τις μορφές υποστήριξης της μάθησης που έχουν ενσωματωθεί στα δύο εφαρμογίδια έχει επηρεάσει περισσότερο τη μάθηση των μαθητών και την εννοιολογική τους κατανόηση. Να διερευνηθεί σε βάθος ποιο είδος τους βοήθησε καλύτερα και τους υποστήριξε στο να αποκτήσουν τις γνώσεις και δεξιότητες που τα συγκεκριμένα εφαρμογίδια είχαν ως στόχο να καλλιεργήσουν. Το συγκεκριμένο θέμα θα μπορούσε να συνδυαστεί και με την προηγούμενη εισήγηση για την εισαγωγή δεδομένων ανάλυσης μαθησιακής συμπεριφοράς και να καταγράφεται με τεχνολογικό τρόπο η κίνηση των μαθητών κατά τη χρήση των εργαλείων υποστήριξης μάθησης.

8. Επίλογος

Η σύγχρονη τεχνολογία μέσα από τις ανεξάντλητες δυνατότητες που έχει μπορεί να δώσει νέα δυναμική στο μάθημα των μαθηματικών. Δίνει την ευκαιρία για επεξεργασία νέων μαθηματικών πεδίων, αλλά και για προσέγγιση ήδη γνωστών θεμάτων με καινοτόμους και ενδιαφέροντες τρόπους. Είναι ένα υποστηρικτικό μέσο προώθησης της ενεργής μάθησης σε αυθεντικά περιβάλλοντα μάθησης.

Ο σχεδιασμός όμως και η ανάπτυξη ψηφιακών εφαρμογιδίων που να εξυπηρετούν κάποιο εκπαιδευτικό σκοπό δεν είναι εύκολη διαδικασία, διότι η εκπαιδευτική αξία του συγκεκριμένου εφαρμογιδίου δεν σχετίζεται μόνο με το περιεχόμενο του, αλλά και με τον τρόπο που θα προγραμματιστεί και την εκπαιδευτική υποστήριξη που θα χρησιμοποιηθεί για κάλυψη των αναγκών μιας συγκεκριμένης ομάδας. Είναι μια δυναμική μεταβαλλόμενη διαδικασία που παίρνει ανατροφοδότηση από τους χρήστες και συνεχώς ανανεώνεται με στόχο τη διαρκή αναβάθμιση των εφαρμογιδίων που έχουν δημιουργηθεί.

Από την άλλη η ενσωμάτωση και η αξιοποίηση εκπαιδευτικών ψηφιακών εφαρμογιδίων εντός σχολικών πλαισίων αξίζει περαιτέρω επιστημονική έρευνα και μελέτη, καθώς η συγκεκριμένη τεχνολογία αποτελεί ένα ισχυρό μαθησιακό περιβάλλον με πολλά οφέλη τόσο προς τους μαθητές όσο και προς τους εκπαιδευτικούς.

Βιβλιογραφία

Allain, A. (2000). *Development of an instrument to measure proportional reasoning among fast-track middle school students.* Ανακτήθηκε στις 2/11/19 από https://repository.lib.ncsu.edu/bitstream/handle/1840.16/805/etd.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ayan, R., & Isiksal-Bostan, M. (2019). Middle school students' proportional reasoning in real life contexts in the domain of geometry and measurement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(1), 65-81. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1468042

Bentley, B., & Yates, G. (2017). Facilitating proportional reasoning through worked examples: Two classroom-based experiments. *Cogent Education, 4*(1), 1-14. https://doi.org/10.1080/2331186X.2017.12972133

Blumenfeld, P. C., Kempler, T. M., & Krajcik, J. S. (2006). Motivation and cognitive engagement in learning environments. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences.* New York: Cambridge University Press, 475-488.

Boren, M. T., & Ramey, J. (2000). Thinking aloud: reconciling theory and practice. *IEEE Transactions on Professional Communication, 43*(3), 261-278. https://doi.org/10.1109/47.867942

Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2008). Development of Proportional Reasoning: Where Young Children Go Wrong. *Developmental Psychology, 44*(5), 1478-1490. https://doi.org/10.1037/a0013110

Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2012). Child proportional scaling: Is 1/3 = 2/6 = 3/9 = 4/12? *Journal of Experimental Child Psychology, 111*(3), 516-533. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.11.001

Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2015). Prompting children to reason proportionally: Processing discrete units as continuous amounts. *Developmental Psychology, 51*(5), 615-620. https://doi:10.1037/a0039010

Brand-Gruwel, S., Kester, L., Kicken, W., & Kirschner, P. A. (2014). Learning Ability Development in Flexible Learning Environments. In *Handbook of Research on*

Educational Communications and Technology (pp. 363-372). Springer: New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3185-5_29

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds). (2000). *How people learn: Brain,mind, experience, and school* (expanded ed.). Washington, D.C.: National Academy Press.

Burgos, M., & Godino, J. D. (2019). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(63), 389-410. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a19

Charters, E. (2003). The Use of Think-aloud Methods in Qualitative Research. An Introduction to Think-aloud Methods. *Brock Educational Journal*, *12*(2), 68-82. https://doi.org/10.26522/BROCKED.V12I2.38

Cheung, A. C. K., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. *Educational Research Review*, *9*, 88-113. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.01.001.

Christou, C., & Philippou, G. (2001). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(3), 321-336. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00077-9

Clark, H. J. (2008). Investigating students' proportional reasoning strategies (Master's thesis). Ανακτήθηκε στις 16/10/19 από https://search.proquest.com/docview/193651850?pqorigsite=gscholar

Common Core State Standards Initiative (2010). *The common core state standards for mathematics*. Washington, DC: Author.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Making connections: a case for proportionality. *Arithmetic Teacher*, *40*(6), 342-346. Ανακτήθηκε στις 18/10/19 από https://search.proquest.com/docview/208768567?accountid=36246

Dole, S. (2008). Ratio tables to promote proportional reasoning in primary classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*(2) 18-22. Ανακτήθηκε στις 16/10/19 από https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ802702.pdf

Dole, S. (2010). Making connections to the big ideas in mathematic: Promoting proportional reasoning. Paper presented at ACER Research Conference, Melbourne, 71-74. Ανακτήθηκε στις 16/10/19 από https://research.acer.edu.au/research_conference/RC2010/17august/5/

Falcão, J.T.D., & Hazin, I. (2012). Heuristic Value of Eclecticism in Theory Development: The Case of Piagetian-Vygotskian dialogue about Proportional Reasoning. *Integrative Psychological and Behavioral Science, 46*, 32-38. https://doi.org/10.1007/s12124-011-9188-1

Fisch, M. S. (2005). Making educational computer games educational. *In Proceedings of the 2005 conference on Interaction, Design and Children*. Boulder, Colorado, 6-61. https://doi.org/10.1145/1109540.1109548

Greeno, J. G., & Engeström, Y. (2014). Learning in activity. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (2nd Ed.). New York: Cambridge University Press, 128-147.

Hattie, J. (2009). Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement (Google eBook). Routledge.

He, W., Yang, Y., & Gao, D. (2018). Proportional Reasoning in 5- to 6-Year-Olds, *Journal of Cognition and Development, 19*(4), 389-412. https://doi.org/10.1080/15248372.2018.1495218

Hilton, A., Hilton. G., Dole, S., & Goos, M. (2013). Development and application of a two-tier diagnostic instrument to assess middle-years students' proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 25, 523–545 https://doi.org/10.1007/s13394-013-0083-6

Hunting, R. P. (1997). Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90023-7

Jarvela, S., & Renninger, A. (2014). Designing for learning: Interest, Motivation, and Engagement. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (2nd Ed.). New York: Cambridge University Press, 668-685.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E.K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on «rate» problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233. https://doi.org/10.1007/BF00410539

Kaplan, A., & Ozturk, M. (2012). The effect of computer based instruction method on instruction of ratio-proportion and development of proportional reasoning. *Energy Education Science and Technology Part B: Social and Educational Studies, 4*(3), 1663-1672. Ανακτήθηκε στις 20/10/2019 από https://www.researchgate.net/publication/273136193

Ke, F. (2009). A qualitative meta-analysis of computer games as learning tools. In R. E. Ferdig (Ed.), *Handbook of research on effective electronic gaming in education* (pp. 1-32). Hershey, PA: IGI Global. http://dx.doi.org/10.4018/978-1-59904-808-6.ch001

Kiili, K. (2007). Foundation for problem-based gaming. *British Journal of Educational Technology, 38*(3), 394-404. https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2007.00704.x

Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics, 103*(2), 92-98. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2003.tb18224.x

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61. https://doi.org/10.2307/749385

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (89-119). Albany, NY: State University on New York Press.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers (1st ed.)*, Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers (2nd ed.),* New York, NY: Routledge.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for Research. In F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning (*629-668). Information Age Publishing, NC.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers (3rd ed.),* New York, NY: Routledge.

Langrall, C. W., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars; developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 254-261. Ανακτήθηκε στις 12/10/2019 από https://search.proquest.com/docview/231298777?accountid=36246

Lanius, C. S., & Williams, S. E. (2003). Proportionality: A unifying theme for the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(8), 392-396. Ανακτήθηκε στις 12/10/2019 από https://search.proquest.com/docview/231080018?accountid=36246

Law, V., & Chen, C-H. (2016). Promoting science learning in game-based learning with question prompts and feedback. *Computers & Education, 103,* 134-143. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.10.005

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modelling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2&3), 157-189. Ανακτήθηκε στις 20/10/19 από https://www.researchgate.net/publication/228592604_Problem_Solving_Modeling_and_Local_Conceptual_Development

Mayer. R. (2009). Multimedia Learning. Cambridge University. Chapter: Principles of multimedia learning (p.265-281).

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematics Behavior*, 22(3), 335-368. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00025-7

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: a result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology, 27*(1), 75-92. https://doi.org/10.1080/01443410601061462

Nabors, W. K. (2003). From fractions to proportional reasoning: a cognitive schemes of operation approach. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(2), 133-179. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00018-X

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics, NCTM, Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM, Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (2013), *Teaching Ratio and Proportion in the Middle Grades*, NCTM, Reston, VA.

Nesher, P., & Sukenik, M. (1991). The effect of formal representation on the learning of ratio concepts. *Learning and Instruction*, *1*(2), 161-175. https://doi.org/10.1016/0959-4752(91)90025-4

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I – Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253. Ανακτήθηκε στις 20/10/19 από https://www.jstor.org/stable/3481919

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II – Problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 331-363. https://doi.org/10.1007/BF00697744

Norton, S. (2005). *The construction of Proportional Reasoning*. Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 17-24, Melbourne, Australia. Ανακτήθηκε στις 10/10/19 από http://emis.ams.org/proceedings/PME29/PME29CompleteProc/PME29Vol4Mul_Wu.pdf#page=23

Özgün-Koca, S.A., & Kayhan Altay, M. (2009). An Investigation of Proportional Reasoning Skills of Middle School Students, *Investigations in Mathematics Learning*, *2*(1), 26-48. https://doi.org/10.1080/24727466.2009.11790289

Papageorgiou, E., & Christou, C. (1999). Strategies of proportional problem solving. In Kollias, A. Margetousaki, A. & Michaelides, P. (Eds.). *Proceedings of the Fourth Greek Conference of the Didactics of Mathematics and Informatics in Education* (pp. 522-528). Rethimno: Ellin (in Greek). Ανακτήθηκε στις 10/10/19 από http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/522.pdf

Papert, S. (1993). *The children's machine: rethinking school in the age of the computer*. New York: Basic Books.

Prensky, M. (2001). *Digital game-based learning*. New York, NY: McGraw-Hill

Pittalis, M., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2003). Students' ability in solving proportional problems. *Proceedings of the 3rd European Research Conference in Mathematics Education*, Bellaria: Italy, 3. Ανακτήθηκε στις 10/10/19 από http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_list.

Quintana, C., Reiser, B. J., Davis, E. A., Krajcik, J., Fretz, E., Duncan, R. G., Kyza, E., Edelson, D., & Soloway, E. (2004). A Scaffolding Design Framework for Software to Support Science Inquiry. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(3), 337-386. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1303_4

Resnick, L. B., & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.). *Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of research* (pp. 107-130). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Rick, J. (2012). Proportion: A Tablet App for Collaborative Learning. In H. Schelhowe (Ed.), *Proceedings of the 11th Annual Interaction Design and Children Conference (IDC 2012)* (Vol. "Demo Papers", pp. 316-319). Bremen, Germany: ACM-IDC. https://doi.org/10.1145/2307096.2307155

Rick, J., Bejan, A., Roche, C., & Weinberger, A. (2012). Proportion: Learning Proportional Reasoning Together. In: A. Ravenscroft, S. Lindstaedt, C.D. Kloos, & D. Hernández-Leo (eds). *European Conference on Technology Enhanced Learning EC-TEL 2012: 21st Century Learning for 21st Century Skills.* Part of the Lecture Notes in Computer Science book series (LNCS, volume 7563, pp. 513-518). Springer, Berlin, Heidelberg https://doi.org/10.1007/978-3-642-33263-0_52

Rick, J., Kopp, D., Schmitt, L., & Weinberger, A. (2015). Tarzan and Jane Share an iPad. In O. Lindwall, P. Häkkinen, T. Koschman, P. Tchounikine, & S. Ludvigsen, (Eds.), *Exploring the material conditions of learning: The computer supported collaborative Learning (CSCL) conference* (Vol. 1, pp. 356-363). Gothenburg: The International Society of the Learning Sciences. Ανακτήθηκε στις 26/9/19 από https://repository.isls.org//handle/1/428

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (2006). Knowledge building: Theory, pedagogy, and technology. In K. Sawyer (Ed.), *Cambridge Handbook of the Learning Sciences*. New York: Cambridge University Press, 97-118.

Schmitt, L. J., & Weinberger, A. (2019). Fourth graders' dyadic learning on multi-touch interfaces-versatile effects of verbalization prompts. *Educational Technology Research and Development, 67*, 519-539. https://doi.org/10.1007/s11423-018-9619-5

Schunk, H. D. (2010). *Θεωρίες Μάθησης: Μια εκπαιδευτική θεώρηση*. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Singh, P. (2000a). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43*(3), 271-292. https://doi.org/10.1023/A:1011976904850

Singh, P. (2000b). Understanding the concepts of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(4), 579-599. https://doi.org/10.1080/002073900412688

Smith, J. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions* (pp. 3-17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1991). Children's Proportional Judgments: The Importance of "Half". *Child Development, 62*(3), 427-440.

https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1991.tb01542.x

Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part – part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*(2), 181-197. https://doi.org/10.1080/135467999387298

Sun, C-T., Wang, D-Y., & Chan, H-L. (2011). How digital scaffolds in games direct problem-solving behaviours. *Computers & Education, 57*, 2118-2125. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.05.022

Tabak, I., & Kyza, E. A. (2018). Research on Scaffolding in the Learning Sciences: A Methodological Perspective. In Fischer, F., Hmelo-Silver, C.E., Goldman, S.R., & Reimann, P. (Eds.). *International Handbook of the Learning Sciences*, New York, NY: Routledge, 191-200.

ter Vrugte, J., de Jong, T., Vandercruysse, S., Wouters, P., van Oostendorp, H., & Elen, J. (2017). Computer game-based mathematics education: Embedded faded worked examples facilitate knowledge acquisition. *Learning and Instruction*, *50*, 44-53. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2016.11.007

Tobias, S., Fletcher, J. D., Dai, D. Y., & Wind, A. P. (2011). Review of research on computer games. In S. Tobias, & J.D. Fletcher (Eds.), *Computer games and instruction* (pp. 127-221). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204. https://doi.org/10.1007/PL00020739

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 410-412. https://doi.org/10.1007/BF00311327

Vandercruysse, S., ter Vrugte, J., De Jong, T., Wouters, P., Van Oostendorp, H., Verschaffel, L., Van Dooren, W., & Elen, J. (2015). “Zeldenrust”: A Mathematical Game-Based Learning Environment for Prevocational Students. In J. Torbeyns, E. Lehtinen, & J. Elen (Eds.), *Describing and studying domain-specific serious games* (pp.63-81). Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-20276-1_5

Van Dooren, W., De Bock, D., De Bolle, E., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). Secondary school students' illusion of linearity: The role of direct versus indirect perimeter and area measures. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2*(2), 1-18. Ανακτήθηκε στις 12/10/19 από https://www.researchgate.net/publication/284954138_Secondary_school_students%27_illusion_of_linearity_The_role_of_direct_versus_indirect_perimeter_and_area_measures

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization, *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2301_3

Van Dooren, W., Vamvakoussi, X., & Verschaffel. L. (2018). *Proportional reasoning*. Educational Practice Series, *30*, 1-34. Ανακτήθηκε στις 20/10/19 από https://scholar.google.com/scholar_lookup?title=Proportional%20reasoning&publication_year=2018&author=W.%20Van%20Dooren&author=X.%20Vamvakoussi&author=L.%20Verschaffel

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York, NY: Academic.

Volk, M., Cotič, M., Zajc, M., & Starcic, A.I. (2017). Tablet-based cross-curricular maths vs. traditional maths classroom practice for higher-order learning outcomes. *Computers & Education, 114*, 1-23. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.06.004.

Vosniadou, S. (1989). Analogical reasoning as a mechanism in knowledge acquisition: a developmental perspective. In S. Vosniadou, & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning*. Cambridge: Cambridge University Press, 413-437.

Wouters, P., Van Nimwegen, C., Van Oostendorp, H., & van der Spek, E. D. (2013). A meta-analysis of the cognitive and motivational effects of serious games. *Journal of Educational Psychology, 105*, 249-265. http://dx.doi.org/10.1037/a00313111

Yung, H. I., & Paas, F. (2015). Effects of computer-based visual representation on mathematics learning and cognitive load. *Educational Technology and Society, 18*(4), 70-77. Ανακτήθηκε στις 10/11/19 από https://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.18.4.70

Υπουργείο Παιδείας, Πολιτισμού, Αθλητισμού και Νεολαίας – ΥΠΠΑΝ (2016), Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών.

Zhang, M., Trussell, R. P., Gallegos, B., & Asam, R. R. (2015). Using math apps for improving student learning: An exploratory study in an inclusive fourth grade classroom. *TechTrends, 59*(2), 32-39. https://doi.org/10.1007/S11528-015-0837-Y

Παραρτήματα

Παράρτημα 1: Διαγνωστικό Δοκίμιο: Βιβλιογραφικές Πηγές & Τρόποι Επίλυσης

Μέρος Α – προβλήματα / καταστάσεις σύγκρισης

1. Ο Ιωάννης και η Μαρία θέλουν να φτιάξουν δύο πορτοκαλάδες.
Ο καθένας θα χρησιμοποιήσει διαφορετικές ποσότητες στα υλικά.

<u>ΙΩΑΝΝΗΣ</u>		<u>ΜΑΡΙΑ</u>
2 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού	x 3	6 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού
3 ποτήρια νερό	x 3	9 ποτήρια νερό

<u>Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού;</u>
<u>Βάλε ✓ στο σωστό:</u>

Ιωάννης ...... Μαρία ...... Οι δύο πορτοκαλάδες είναι ίδιες ......

<u>Μπορείς να εξηγήσεις πώς το βρήκες;</u>

Στηρίχθηκε στην έρευνα του Noelting (1980), αφορά τριπλασιασμό των ποσοτήτων και μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής των «εντός» σχέσεων, δηλαδή η αλλαγή αφορά αύξηση μεταξύ των ποσοτήτων του ίδιου είδους.
Οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν ότι οι δύο πορτοκαλάδες είναι ίσες και να το επεξηγήσουν κατάλληλα.

2. Η Μαρία θα φτιάξει φρουτοσαλάτα με 3 μήλα και 6 μπανάνες. Για να φτιάξει μετά ισοδύναμη μεγαλύτερη ποσότητα φρουτοσαλάτας θα χρειαστεί 4 μήλα και 8 μπανάνες.

	$1^η$ φρουτοσαλάτα	$2^η$ φρουτοσαλάτα	
x 2	3 μήλα	4 μήλα	x 2
	6 μπανάνες	8 μπανάνες	

Σωστό ή Λάθος
(κύκλωσε το σωστό)

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;
....
....

Στηρίχθηκε στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών και στο βιβλίο μαθητή ($6^η$ ενότητα, σελ. 121, 2019), αφορά διπλασιασμό των ποσοτήτων και μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής

των «εκτός» σχέσεων, δηλαδή η αλλαγή αφορά αύξηση μεταξύ των αντίστοιχων ποσοτήτων διαφορετικού είδους.
Οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν ότι το ερώτημα που τους τίθεται είναι σωστό και να το επεξηγήσουν κατάλληλα.

3. Για να φτιάξεις ένα βραχιόλι χρειάζεσαι 4 μπλε χάντρες και 3 πράσινες. Για να φτιάξεις ένα ισοδύναμο μεγαλύτερο βραχιόλι χρειάζεσαι 12 μπλε χάντρες και 10 πράσινες.

Σωστό **ή** **Λάθος** (κύκλωσε το σωστό)

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

....

....

		x 3	
μπλε	4		12
πράσινες	3		10 → εδώ έπρεπε να είναι 9 οι πράσινες χάντρες
		x 3	

Στηρίχθηκε στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών και στο βιβλίο μαθητή ($6^{η}$ ενότητα, σελ. 120, 2019), αφορά άνισες ποσότητες και μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής των «εντός» σχέσεων.
Οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν ότι το ερώτημα που τους τίθεται είναι λανθασμένο, καθώς οι ποσότητες τριπλασιάζονται. Επομένως, οι ποσότητες που συγκρίνονται είναι άνισες.

4. Για να φτιάξεις σιρόπι για λουκουμάδες χρειάζεσαι 10 ποτήρια νερό και 6 ποτήρια ζάχαρης. Για να φτιάξεις ισοδύναμη μικρότερη ποσότητα σιροπιού χρειάζεσαι 5 ποτήρια νερό και 3 ποτήρια ζάχαρης.

Σωστό **ή** **Λάθος** (κύκλωσε το σωστό)

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

		÷ 2	
νερό	10		5
ζάχαρη	6		3
		÷ 2	

Στηρίχθηκε στην έρευνα των Hilton, A., Hilton. G., Dole, S., & Goos, M. (2013), αφορά μείωση των ποσοτήτων στη μέση και μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής των «εντός» σχέσεων, δηλαδή η αλλαγή αφορά μείωση μεταξύ των ποσοτήτων του ίδιου είδους.

Οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν ότι το ερώτημα που τους τίθεται είναι σωστό και να το επεξηγήσουν κατάλληλα.

*Στη συγκεκριμένη περίπτωση τροποποιήθηκαν οι αριθμοί για να ταιριάζουν σε επίπεδο Δ' τάξης δημοτικού και το πρόβλημα αναφέρεται σε παρασκευή λουκουμάδων για να πλησιάζει στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών.


5. Δύο αρτοποιεία πωλούν τα ίδια κουλούρια σε δύο διαφορετικές προσφορές.

Ποια από τις δύο προσφορές θα προτιμούσες; *Βάλε ✓ σε αυτή που θα διάλεγες:*

Προσφορά Α ...... Προσφορά Β ...... Οι δύο προσφορές είναι ίδιες ......

Γιατί; ....

Το πρόβλημα 5 στο Μέρος Α του διαγνωστικού δοκιμίου επινοήθηκε για τη συγκεκριμένη έρευνα, αφορά πενταπλασιασμό των ποσοτήτων και μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής των «εκτός» σχέσεων.
Οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν ότι οι δύο προσφορές είναι ίσες και να το επεξηγήσουν κατάλληλα.

Μέρος Β – προβλήματα / καταστάσεις άγνωστης αξίας

1. Ο Χρίστος χρειάζεται 4 λεπτά για να καθαρίσει ένα παράθυρο. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να καθαρίσει 8 παράθυρα με τον ίδιο ρυθμό; Ποια πράξη πρέπει να κάνει;

   Πόσο χρόνο χρειάζεται για να καθαρίσει 12 παράθυρα; Ποια πράξη πρέπει να κάνει;

παράθυρα	x 4	1	8	x 4	12	x 4
λεπτά		4	;		;	

Στηρίχθηκε σε αποδεσμευμένο υλικό έρευνας TIMSS (2003), αφορά αύξηση των ποσοτήτων και μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής των «εκτός» σχέσεων.

Οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν ότι οι ποσότητες αυξάνονται κάθε φορά, η αύξηση συμβαίνει μεταξύ των αντίστοιχων ποσοτήτων διαφορετικού είδους και μπορούν να εντοπίσουν τις άγνωστες τιμές πολλαπλασιάζοντας με το 4.

2. Δύο αγόρια, ο Φώτης και ο Αλέξης, έτρεχαν στο γήπεδο. Για κάθε 2 χιλιόμετρα που έτρεχε ο Φώτης, ο Αλέξης έτρεχε 3 χιλιόμετρα. Ο Φώτης έτρεξε συνολικά 6 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα έτρεξε ο Αλέξης;

Απάντηση: .... χιλιόμετρα

Πώς το βρήκες;

Φώτης	2	x 3	6
Αλέξης	3	x 3	;

Από ιστοσελίδα Παιδαγωγικού Ινστιτούτου Κύπρου για προετοιμασία σε σχέση με την έρευνα TIMSS. Αφορά αύξηση των ποσοτήτων και μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής των «εντός» σχέσεων.

Οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν ότι οι ποσότητες αυξάνονται, η αύξηση συμβαίνει μεταξύ των ποσοτήτων ίδιου είδους και μπορούν να εντοπίσουν την άγνωστη τιμή πολλαπλασιάζοντας με το 3.

3. Τα πιο κάτω υλικά χρησιμοποιούνται για να ετοιμαστεί μια συνταγή για **8** άτομα.

Η Στέλλα θέλει να κάνει αυτή τη συνταγή για **2** άτομα.

Συμπλήρωσε τον πίνακα.

Κρεμμυδόσουπα

÷ 4

Υλικά για 8 άτομα		**Υλικά για 2 άτομα**
8 κρεμμύδια	÷ 4	2 κρεμμύδια
16 ποτήρια νερό	÷ 4	
4 κύβους ζωμό κότας	÷ 4	
12 κουταλάκια βούτυρο	÷ 4	

Στηρίχθηκε σε αποδεσμευμένο υλικό έρευνας TIMSS (2011) και στην έρευνα των Hart et al. (1984). Αφορά μείωση των ποσοτήτων και μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής των «εντός» σχέσεων.

Οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν ότι οι ποσότητες μειώνονται, η μείωση συμβαίνει μεταξύ των ποσοτήτων ίδιου είδους και μπορούν να εντοπίσουν τις άγνωστες τιμές διαιρώντας με το 4.

*Το συγκεκριμένο πρόβλημα εντοπίστηκε στην έρευνα των Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematics Behavior*, 22(3), 335–368. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00025-7
Οι συγκεκριμένοι ερευνητές αναφέρουν ότι το έχουν πάρει από την έρευνα των Hart et al, 1984. Στη συνέχεια, τροποποιήθηκε συνδυάζοντας και υλικό από την έρευνα TIMSS (2011).

4. Ένας εκτυπωτής εκτυπώνει σε 2 λεπτά 30 σελίδες. Πόσες σελίδες θα εκτυπώσει σε 4 λεπτά, αν συνεχίσει να εργάζεται με τον ίδιο ρυθμό;

   Πώς το σκέφτηκες;

Στηρίχθηκε στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών και στο βιβλίο μαθητή ($6^{η}$ ενότητα, σελ. 123, 2019). Μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής της αναγωγής στη μονάδα.
Οι μαθητές χρειάζεται πρώτα να εντοπίσουν μέσω διαίρεσης πόσες σελίδες μπορεί να εκτυπώσει ένας εκτυπωτής σε 1 λεπτό (αναγωγή στη μονάδα) και μετά να βρουν την άγνωστη τιμή (σε 4 λεπτά) μέσω πολλαπλασιασμού.

5. Ο Μάριος αγόρασε 3 μπαλόνια με €9. Η Έλενα αγόρασε από το ίδιο κατάστημα 5 μπαλόνια. Πόσα πλήρωσε;
   Πόσα μπαλόνια έχει αγοράσει αν πλήρωσε €90;
   Πόσα ευρώ θα πλήρωνε αν αγόραζε 40 μπαλόνια;

μπαλόνια	×3	3	×3	5	÷3	;	×3	40
κόστος		9		;		90		;

Στηρίχθηκε στην έρευνα των Christou & Philippou (2001), αφορά αύξηση των ποσοτήτων και μπορεί να επιλυθεί μέσω της στρατηγικής των «εκτός» σχέσεων.
Οι μαθητές χρειάζεται να αντιληφθούν ότι οι ποσότητες αυξάνονται κάθε φορά, η αύξηση συμβαίνει μεταξύ των αντίστοιχων ποσοτήτων διαφορετικού είδους. Μπορούν να εντοπίσουν τις άγνωστες τιμές που αφορούν το κόστος των μπαλονιών πολλαπλασιάζοντας με το 3 και την άγνωστη τιμή που αφορά τον αριθμό των μπαλονιών διαιρώντας με το 3.

*Στη συγκεκριμένη περίπτωση τροποποιήθηκαν οι αριθμοί για να μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα με τη στρατηγική των εκτός σχέσεων και προσθέθηκε ακόμη ένα ερώτημα για να μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα τόσο με πολλαπλασιασμό όσο και με διαίρεση των ποσοτήτων.

Παράρτημα 2: Προ-διαγνωστικό και μετα-διαγνωστικό δοκίμιο

Διαγνωστικό Δοκίμιο στα Μαθηματικά

<u>Στοιχεία συμμετέχοντα:</u>

Όνομα: ………………………………. Επίθετο: …………………………………….

Τάξη: …………………… Ημερομηνία: ……………………………......

Σχολείο: ……………………………………………………………………………..

Μέρος Α

1. Ο Ιωάννης και η Μαρία θέλουν να φτιάξουν δύο πορτοκαλάδες.
   Ο καθένας θα χρησιμοποιήσει διαφορετικές ποσότητες στα υλικά.

<u>ΙΩΑΝΝΗΣ</u>
2 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού
3 ποτήρια νερό

<u>ΜΑΡΙΑ</u>
6 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού
9 ποτήρια νερό

<u>Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού; Βάλε ✓ στο σωστό:</u>

Ιωάννης ……   Μαρία ……   Οι δύο πορτοκαλάδες είναι ίδιες ……

<u>Μπορείς να εξηγήσεις πώς το βρήκες;</u>

2. Η Μαρία θα φτιάξει φρουτοσαλάτα με 3 μήλα και 6 μπανάνες. Για να φτιάξει μετά ισοδύναμη μεγαλύτερη ποσότητα φρουτοσαλάτας θα χρειαστεί 4 μήλα και 8 μπανάνες.

1η φρουτοσαλάτα	2η φρουτοσαλάτα
3 μήλα	4 μήλα
6 μπανάνες	8 μπανάνες

Σωστό ή Λάθος
(κύκλωσε το σωστό)
Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

…………………………………………………………………………………………

3. Για να φτιάξεις ένα μικρό βραχιόλι χρειάζεσαι 4 μπλε χάντρες και 3 πράσινες. Για να φτιάξεις ένα ισοδύναμο μεγαλύτερο βραχιόλι χρειάζεσαι 12 μπλε χάντρες και 10 πράσινες.

Σωστό **ή** **Λάθος** (κύκλωσε το σωστό)

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

4. Για να φτιάξεις σιρόπι για λουκουμάδες χρειάζεσαι 10 ποτήρια νερό και 6 ποτήρια ζάχαρης. Για να φτιάξεις ισοδύναμη μικρότερη ποσότητα σιροπιού χρειάζεσαι 5 ποτήρια νερό και 3 ποτήρια ζάχαρης.

Σωστό **ή** **Λάθος** (κύκλωσε το σωστό)

Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

5. Δύο αρτοποιεία πωλούν τα ίδια κουλούρια σε δύο διαφορετικές προσφορές.

Προσφορά Α

4 κουλούρια

€2,00

Προσφορά Β

3 κουλούρια

€1,50

Ποια από τις δύο προσφορές θα προτιμούσες; <u>*Βάλε ✓ σε αυτή που θα διάλεγες:*</u>

Προσφορά Α …… Προσφορά Β …… Οι δύο προσφορές είναι ίδιες ……

Γιατί; ……………………………………………………………………………………

Μέρος Β

Να λύσεις τα προβλήματα:

1. Ο Χρίστος χρειάζεται 4 λεπτά για να καθαρίσει ένα παράθυρο. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να καθαρίσει 8 παράθυρα με τον ίδιο ρυθμό; Ποια πράξη πρέπει να κάνει;

   Πόσο χρόνο χρειάζεται για να καθαρίσει 12 παράθυρα; Ποια πράξη πρέπει να κάνει;

2. Δύο αγόρια, ο Φώτης και ο Αλέξης, έτρεχαν στο γήπεδο. Για κάθε 2 χιλιόμετρα που έτρεχε ο Φώτης, ο Αλέξης έτρεχε 3 χιλιόμετρα. Ο Φώτης έτρεξε συνολικά 6 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα έτρεξε ο Αλέξης;

   Απάντηση: …………………………. χιλιόμετρα

   Πώς το βρήκες;

3. Τα πιο κάτω υλικά χρησιμοποιούνται για να ετοιμαστεί μια συνταγή για **8** άτομα.

   Η Στέλλα θέλει να κάνει αυτή τη συνταγή για **2** άτομα.

   Συμπλήρωσε τον πίνακα.

Κρεμμυδόσουπα	
Υλικά για 8 άτομα	**Υλικά για 2 άτομα**
8 κρεμμύδια	2 κρεμμύδια
16 ποτήρια νερό	
4 κύβους ζωμό κότας	
12 κουταλάκια βούτυρο	

4. Ένας εκτυπωτής εκτυπώνει σε 2 λεπτά 30 σελίδες. Πόσες σελίδες θα εκτυπώσει σε 4 λεπτά, αν συνεχίσει να εργάζεται με τον ίδιο ρυθμό;

   Πώς το σκέφτηκες;

5. Ο Μάριος αγόρασε 3 μπαλόνια με €9. Η Έλενα αγόρασε από το ίδιο κατάστημα 5 μπαλόνια. Πόσα πλήρωσε;

   Πόσα μπαλόνια έχει αγοράσει αν πλήρωσε €90;

   Πόσα θα πλήρωνε αν αγόραζε 40 μπαλόνια;

Παράρτημα 3: Σχέδιο μαθήματος για 1ο εφαρμογίδιο-σύγκριση ποσοτήτων

Περίληψη

Οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν κάποια μείγματα και να τα συγκρίνουν. Μαθαίνουν να συγκρίνουν ζευγάρια ποσοτήτων, να μελετούν τη σχέση μεταξύ τους, να αναγνωρίζουν αν υπάρχει αναλογία μεταξύ τους ή όχι κι αν υπάρχει αναλογία με ποιο τρόπο έχει αυτή δημιουργηθεί.

Διάρκεια

2 διδακτικές περίοδοι (80 λεπτά)

Υλικά – Μέσα

- Εφαρμογίδιο εγκατεστημένο σε οθόνες αφής-tablet τύπου android (1 tablet ανά μαθητή)
  ↳ https://drive.google.com/file/d/1xATs4oXJd6j9Z5I6qgGBVACjLxP9bs2f/view?ts=5e8b3a46
- Δελτίο εισόδου (πριν την παρέμβαση)
- Δελτίο εξόδου (μετά την παρέμβαση)
- Φύλλα εργασίας
- Παρουσίαση PowerPoint (με οδηγίες για κάθε φάση μάθησης, απαντήσεις και επεξηγήσεις σχετικά με δραστηριότητες του εφαρμογιδίου)

Στόχοι

Οι επιδιωκόμενοι στόχοι μέσα από το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο είναι:

1. Οι μαθητές να αναγνωρίζουν ότι υπάρχουν δύο ζευγάρια ποσοτήτων σε κάθε μείγμα.
2. Να εντοπίζουν τη διαφορά μεταξύ των δύο μειγμάτων (αν αυξάνονται και οι δύο ποσότητες σε κάθε μείγμα, αν μειώνονται και οι δύο, αν αυξάνεται η μία και η άλλη μειώνεται, αν αυξάνεται/μειώνεται η μια ποσότητα και η άλλη παραμένει ίδια) και να περιγράφουν την αλλαγή.
3. Να κατανοήσουν και να εφαρμόζουν τη στρατηγική «εντός» σχέσεων.
4. Να αντιλαμβάνονται πότε τα ζευγάρια ποσοτήτων είναι ίσα και πότε είναι άνισα.

Διαδικασία

- Εξηγούμε στους μαθητές τι θα κάνουμε (τον τρόπο εργασίας) και τους δίνουμε να συμπληρώσουν το δελτίο εισόδου.

- Ακούμε τις οδηγίες στο εφαρμογίδιο (μοντελοποίηση), εξηγούμε τα σύμβολα ισότητας (=) και ανισότητας (≠) και επεξηγούμε τυχόν απορίες τους.

- *Φάση διερεύνησης*: ο κάθε μαθητής εργάζεται μόνος του με το εφαρμογίδιο (το πρώτο επίπεδο περιλαμβάνει τρεις δραστηριότητες). Στόχος εδώ είναι οι μαθητές να αντιληφθούν ότι υπάρχουν δύο ζευγάρια ποσοτήτων σε κάθε μείγμα που θα κατασκευάσουν όπου οι ποσότητες τους μειώνονται ή αυξάνονται, να μελετήσουν τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων και να παρατηρήσουν ότι κάποιες είναι ίσες ποσότητες και κάποιες άνισες.

- Αφού ολοκληρωθούν και οι τρεις δραστηριότητες της διερευνητικής φάσης από όλους τους μαθητές, συζητάμε στην ολομέλεια της τάξης τις παρατηρήσεις τους. Στόχος είναι να αντιληφθούν την έννοια της αναλογίας (ότι όταν δύο ζευγάρια ποσοτήτων είναι ίσα μεταξύ τους, τότε σχηματίζουν μια αναλογία).

- *Φάση οικοδόμησης της γνώσης*: το δεύτερο επίπεδο του εφαρμογιδίου (πάλι με τρεις δραστηριότητες) θα πραγματοποιηθεί σε επίπεδο τάξης. Οι μαθητές κατασκευάζουν πρώτα τα διάφορα μείγματα και συμπληρώνουμε στην ολομέλεια το αντίστοιχο φυλλάδιο (φύλλο εργασίας 1: Μαθαίνω). Κατά τη φάση αυτή θέτουμε διάφορες ερωτήσεις σχετικά με τις ποσότητες για να τους βοηθήσουμε να εστιάσουν την προσοχή τους στην αλλαγή των ποσοτήτων:

  π.χ. Οι ποσότητες των υλικών έχουν αλλάξει ή έχουν μείνει ίδιες;
  Αλλάζει μόνο η μια ποσότητα ή και οι δύο;
  Τι έχει συμβεί; Ποια είναι η αλλαγή;
  Ποια ποσότητα έχει αυξηθεί; Κατά πόσο;
  Ποια ποσότητα έχει μειωθεί; Κατά πόσο;
  Έχουν διπλασιαστεί; Τριπλασιαστεί;

  Στη συνέχεια απαντούν στην ερώτηση που εμφανίζεται στο εφαρμογίδιο σχετικά με τα μείγματα που κατασκευάζουν κάθε φορά και λαμβάνουν την ανάλογη ανατροφοδότηση από εκεί.

  Στις περιπτώσεις που είναι ίσες οι δύο ποσότητες, στην ανατροφοδότηση μέσω εφαρμογιδίου παρουσιάζεται η στρατηγική «εντός» σχέσεων. Ζητάμε από τους μαθητές να σκεφθούν ένα δικό τους αντίστοιχο παράδειγμα με αυτό που μόλις έχουν επιλύσει στο εφαρμογίδιο που να αναπαριστά τη συγκεκριμένη στρατηγική και το κάνουν στο αντίστοιχο φυλλάδιο (φύλλο εργασίας 1 για κατανόηση στρατηγικής). Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις στο εφαρμογίδιο με ίσες ποσότητες (διπλασιασμός ποσοτήτων, τριπλασιασμός ποσοτήτων και μείωση των ποσοτήτων στη μέση). Οπότε υπάρχουν και τρία αντίστοιχα μικρά φυλλάδια για κατανόηση της συγκεκριμένης στρατηγικής.

- *Φάση εμπέδωσης*: οι μαθητές εργάζονται ατομικά με το εφαρμογίδιο χωρίς τη βοήθεια καθοδηγητικών φυλλαδίων (τρία τελευταία επίπεδα εφαρμογιδίου με τρεις δραστηριότητες σύγκρισης το καθένα). Τους ζητάμε να συμπληρώνουν τις σωστές και τις λανθασμένες απαντήσεις τους (φύλλο εργασίας 2 – δεν είναι καθοδηγητικό φυλλάδιο, το χρησιμοποιούμε απλά για έλεγχο των απαντήσεών τους).

- Στο τέλος οι μαθητές συμπληρώνουν το δελτίο εξόδου για να αντιληφθούμε καλύτερα τι αποκόμισαν με το πέρας της συγκεκριμένης παρέμβασης.

Φύλλο εργασίας 1: Μαθαίνω

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………………………

1η αποστολή: Φτιάχνω δύο τσάγια

1. Φτιάξε τα δύο τσάγια στο εφαρμογίδιο και πάτησε το ✓.

2. Απάντησε στις πιο κάτω ερωτήσεις:

- Υπάρχει αλλαγή στην ποσότητα του τσαγιού; ______________________________
- Τι αλλαγή υπάρχει; ____
- Υπάρχει αλλαγή στην ποσότητα της ζάχαρης; __________________________________
- Τι αλλαγή υπάρχει; ____
- Οι ποσότητες που χρησιμοποιήσαμε στα δύο τσάγια είναι ίσες **ή** άνισες; _____________

2η αποστολή: Φτιάχνω δύο ταψιά μπισκότα

1. Φτιάξε τα δύο ταψιά μπισκότα στο εφαρμογίδιο και πάτησε το ✓.

2. Απάντησε στις πιο κάτω ερωτήσεις:

- Υπάρχει αλλαγή στην ποσότητα του αλευριού; ______________________________
- Τι αλλαγή υπάρχει; ____
- Υπάρχει αλλαγή στην ποσότητα της κανέλας; __________________________________
- Τι αλλαγή υπάρχει; ____
- Οι ποσότητες που χρησιμοποιήσαμε στα δύο ταψιά είναι ίσες **ή** άνισες; _____________

3η αποστολή: Φτιάχνω δύο λεμονάδες

1. Φτιάξε τις δύο λεμονάδες στο εφαρμογίδιο και πάτησε το ✓.

2. Απάντησε στις πιο κάτω ερωτήσεις:

- Υπάρχει αλλαγή στην ποσότητα του νερού; ______________________________
- Τι αλλαγή υπάρχει; ____
- Υπάρχει αλλαγή στην ποσότητα του χυμού λεμονιού; ______________________________
- Τι αλλαγή υπάρχει; ____
- Οι ποσότητες που χρησιμοποιήσαμε στις δύο λεμονάδες είναι ίσες **ή** άνισες; ___________

Φύλλο εργασίας 2: Εμπεδώνω

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………………………………………….

Οδηγίες

- Εργάζομαι στο εφαρμογίδιο μόνος/η μου και κατασκευάζω τα μείγματα.
- Όταν τα φτιάξω, κυκλώνω τη σωστή απάντηση στο φυλλάδιο.
- Ακούω την επεξήγηση στο εφαρμογίδιο και ελέγχω αν βρήκα τη σωστή απάντηση (δίπλα στο κουτάκι βάζω ✓ ή **x**).

1η ομάδα εμπέδωσης

Κυκλώνω τη σωστή απάντηση	*Το βρήκα;* ✓ *ή* **x**
1η αποστολή: Φτιάχνω δύο μπογιές ↳ Οι ποσότητες στις δύο μπογιές είναι: ίσες / άνισες	
2η αποστολή: Φτιάχνω δύο πίτσες ↳ Οι ποσότητες στις δύο πίτσες είναι: ίσες / άνισες	
3η αποστολή: Φτιάχνω δύο τσάγια ↳ Οι ποσότητες στα δύο τσάγια είναι: ίσες / άνισες	

2η ομάδα εμπέδωσης

Κυκλώνω τη σωστή απάντηση	*Το βρήκα;* ✓ *ή* **x**
1η αποστολή: Φτιάχνω δύο ταψιά μπισκότα ↳ Οι ποσότητες στα δύο ταψιά είναι: ίσες / άνισες	
2η αποστολή: Φτιάχνω δύο λεμονάδες ↳ Οι ποσότητες στις δύο λεμονάδες είναι: ίσες / άνισες	
3η αποστολή: Φτιάχνω δύο μπογιές ↳ Οι ποσότητες στις δύο μπογιές είναι: ίσες / άνισες	

3η ομάδα εμπέδωσης

Κυκλώνω τη σωστή απάντηση	*Το βρήκα;* ✓ *ή* **x**
1η αποστολή: Φτιάχνω δύο πίτσες ↳ Οι ποσότητες στις δύο πίτσες είναι: ίσες / άνισες	
2η αποστολή: Φτιάχνω δύο τσάγια ↳ Οι ποσότητες στα δύο τσάγια είναι: ίσες / άνισες	
3η αποστολή: Φτιάχνω δύο ταψιά μπισκότα ↳ Οι ποσότητες στα δύο ταψιά είναι: ίσες / άνισες	

<u>Φυλλάδιο 1 (για κατανόηση στρατηγικής)</u>

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………………………………….

Φτιάχνω ένα δικό μου παράδειγμα που να αφορά μείωση των ποσοτήτων
(συμπληρώνω όποιους αριθμούς θέλω)

1ο τσάι		2ο τσάι
τσάι		τσάι
ζάχαρη	÷ 2	ζάχαρη

$1^{ο}$ τσάι $2^{ο}$ τσάι

<u>Φυλλάδιο 2 (για κατανόηση στρατηγικής)</u>

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………………………………….

Φτιάχνω ένα δικό μου παράδειγμα που να αφορά τριπλασιασμό των ποσοτήτων
(συμπληρώνω όποιους αριθμούς θέλω)

αλεύρι		αλεύρι
κανέλα	**x 3**	κανέλα

$1^{ο}$ ταψί μπισκότων $2^{ο}$ ταψί μπισκότων

<u>Φυλλάδιο 3 (για κατανόηση στρατηγικής)</u>

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………………………………….

Φτιάχνω ένα δικό μου παράδειγμα που να αφορά διπλασιασμό των ποσοτήτων
(συμπληρώνω όποιους αριθμούς θέλω)

νερό		νερό
λεμόνι	**x 2**	λεμόνι

$1^{η}$ λεμονάδα $2^{η}$ λεμονάδα

Δελτίο εισόδου

Ονοματεπώνυμο: ………………………………………………………………………………………

Σήμερα θα δουλέψουμε στα μαθηματικά στο tablet με ένα εφαρμογίδιο που ονομάζεται σύγκριση ποσοτήτων.

Τι περιμένεις ότι θα μάθεις με το εφαρμογίδιο;

____

____

____

– –

Δελτίο εξόδου

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………………………………

Έχουμε τελειώσει το μάθημα μας με το εφαρμογίδιο.

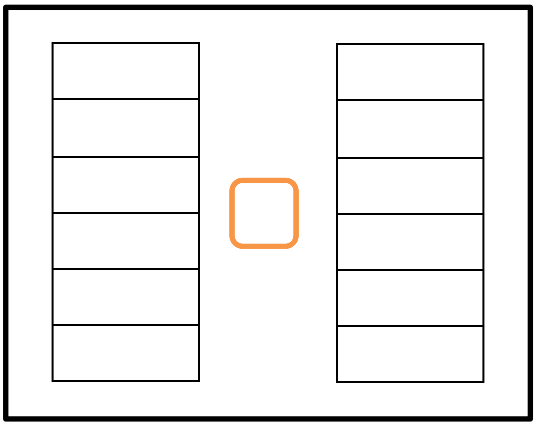
Τι έχεις μάθει από αυτό;

____

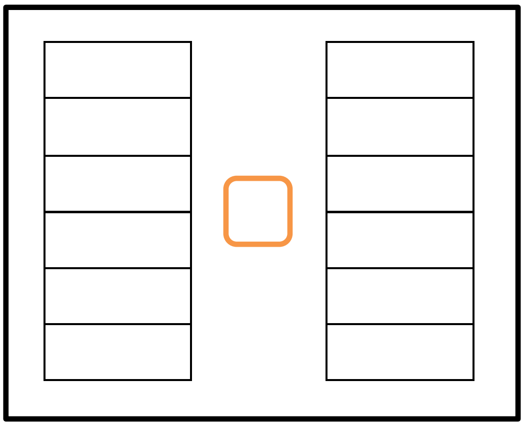
____

Φτιάξε δύο δικά σου παραδείγματα (1 με ίσες ποσότητες και 1 με άνισες ποσότητες):

Διάλεξε 2 χρώματα



κλασματική εξίσωση:



κλασματική εξίσωση:

Μεταξύ των δύο μειγμάτων γράψε τα κατάλληλα σύμβολα ισότητας (=) ή ανισότητας (≠) και παρουσίασε τη στρατηγική που έχεις μάθει σε μορφή κλασματικής εξίσωσης.

Παράρτημα 4: Σχέδιο μαθήματος για 2^{ο} εφαρμογίδιο-αναλογίες

Περίληψη

Οι μαθητές μαθαίνουν με διαδραστικό τρόπο για την έννοια της αναλογίας με ευθέως ανάλογα ποσά (δηλαδή ποσότητες/μεγέθη που αυξάνονται ταυτόχρονα μαζί ή μειώνονται μαζί). Ακολούθως εξασκούνται σε προβλήματα άγνωστης αξίας όπου στόχος τους είναι να εντοπίσουν άγνωστες τιμές ποσοτήτων που οδηγούν στη δημιουργία αναλογιών.

Διάρκεια

2 διδακτικές περίοδοι (80 λεπτά)

Υλικά – Μέσα

- Εφαρμογίδιο εγκατεστημένο σε οθόνες αφής-tablet τύπου android (1 tablet ανά μαθητή)
  ↳ https://drive.google.com/file/d/13HnPVI8U5FX_g4u2dFCK4cohrQKXF6aF/view
- Δελτίο εισόδου (πριν την παρέμβαση)
- Δελτίο εξόδου (μετά την παρέμβαση)
- Φύλλα εργασίας
- Παρουσίαση PowerPoint (με οδηγίες για κάθε φάση μάθησης, απαντήσεις και επεξηγήσεις σχετικά με δραστηριότητες του εφαρμογιδίου)

Στόχοι

Οι επιδιωκόμενοι στόχοι μέσα από το συγκεκριμένο εφαρμογίδιο είναι:

1. Οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της αναλογίας.
2. Να υπολογίζουν άγνωστες τιμές ποσοτήτων σε προβλήματα αναλογίας.
3. Να κατανοήσουν και να εφαρμόζουν τη στρατηγική «εκτός» σχέσεων.

Διαδικασία

- Εξηγούμε στους μαθητές τι θα κάνουμε (τον τρόπο εργασίας) και επεξηγούμε τυχόν απορίες τους. Μετά τους δίνουμε να συμπληρώσουν το δελτίο εισόδου.

- *Φάση διερεύνησης*: ο κάθε μαθητής εργάζεται μόνος του με το εφαρμογίδιο στη συγκεκριμένη φάση, η οποία αποτελείται από δύο στάδια: αύξηση ποσοτήτων και μείωση ποσοτήτων. Όταν οι μαθητές τελειώσουν με το στάδιο της διερεύνησης που αφορά στην ταυτόχρονη αύξηση ποσοτήτων, τότε προχωράνε στο στάδιο που αφορά την ταυτόχρονη μείωση ποσοτήτων. Στόχος εδώ είναι οι μαθητές να αντιληφθούν με διαδραστικό τρόπο την έννοια της αναλογίας με ευθέως ανάλογα ποσά (δηλαδή ποσότητες/μεγέθη που αυξάνονται ταυτόχρονα μαζί ή μειώνονται μαζί και είναι ισοδύναμες).

- Αφού ολοκληρωθούν και τα δύο μέρη της διερευνητικής φάσης από όλους τους μαθητές, συζητάμε στην ολομέλεια της τάξης τις παρατηρήσεις τους. Στόχος είναι να αντιληφθούν μέσω καθοδηγούμενης διερεύνησης την έννοια και τον ορισμό της αναλογίας, αλλά και με ποιο τρόπο αλλάζουν κάθε φορά οι ποσότητες.

- *Φάση οικοδόμησης της γνώσης*: προχωράμε στην οθόνη μάθησης/εμπέδωσης του εφαρμογιδίου. Το πρώτο επίπεδο αυτής της οθόνης περιλαμβάνει πέντε προβλήματα αναλογίας και θα επιλυθούν στην ολομέλεια της τάξης. Τα βήματα επίλυσης του πρώτου προβλήματος πραγματοποιούνται από τον/την εκπαιδευτικό για αναπαράσταση του τρόπου επίλυσης κάθε προβλήματος, παρουσίαση και εξήγηση του πίνακα αναλογιών, επεξήγηση των δύο εκπαιδευτικών βοηθειών που περιλαμβάνονται στο εφαρμογίδιο και αναφορά του σημειωματάριου που ενσωματώνεται (σε περίπτωση που κάποιοι μαθητές χρειαστεί να το χρησιμοποιήσουν).

  Στη συνέχεια οι μαθητές ακούνε κάθε ένα πρόβλημα στο εφαρμογίδιο, εντοπίζουν την αλλαγή ανάμεσα στις δύο ποσότητες, δηλαδή κατά ποιον αριθμό αυξάνονται ή μειώνονται (φύλλο εργασίας 1: Μαθαίνω), υπολογίζουν τις άγνωστες ποσότητες που απουσιάζουν από τον πίνακα αναλογιών στο εφαρμογίδιο και ακολουθεί η επεξήγηση του προβλήματος στον πίνακα από τον εκπαιδευτικό, όπου τονίζεται η στρατηγική για τις «εκτός» σχέσεις. Στο τέλος οι μαθητές ελέγχουν την ορθότητα των απαντήσεών τους στο εφαρμογίδιο. Ακολουθείται η ίδια διαδικασία και για τα τέσσερα προβλήματα του $1^{ου}$ επιπέδου.

- *Φάση εμπέδωσης*: συνεχίζουμε με το $2^{ο}$ επίπεδο της οθόνης μάθησης/εμπέδωσης του εφαρμογιδίου, στο οποίο πάλι περιλαμβάνονται πέντε προβλήματα. Σ' αυτό το στάδιο οι μαθητές εργάζονται μόνοι τους με το εφαρμογίδιο συμπληρώνοντας το φύλλο εργασίας 2: Εμπεδώνω. Όταν τελειώσουν προχωράνε στο τρίτο και τελευταίο επίπεδο της οθόνης μάθησης/εμπέδωσης, όπου θα επιλύσουν πέντε προβλήματα αναλογικού συλλογισμού μόνο στο εφαρμογίδιο, χωρίς κάποιο βοηθητικό φυλλάδιο.

- Στο τέλος οι μαθητές συμπληρώνουν το δελτίο εξόδου για να αντιληφθούμε καλύτερα τι αποκόμισαν με το πέρας της συγκεκριμένης παρέμβασης.

Φυλλάδιο εργασίας 1: Μαθαίνω

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………………………

Οδηγίες επίλυσης για όλα τα προβλήματα:

1. Διαβάζω προσεκτικά το πρόβλημα στο εφαρμογίδιο.
2. Απαντώ στην 1η ερώτηση του φυλλαδίου.
3. Συμπληρώνω τον πίνακα αναλογιών στο εφαρμογίδιο.
4. Απαντώ στη 2η ερώτηση του φυλλαδίου.
5. Πατώ στο εφαρμογίδιο το σύμβολο ☑ για να ελέγξω τις απαντήσεις μου.

1ο πρόβλημα

κατά ποιον αριθμό;

α) Κατά πόσο αλλάζουν οι δύο ποσότητες (μπουκάλια-μπάλες): ________________________________

β) Τι συμβαίνει στις δύο ποσότητες: ____

αυξάνονται ή μειώνονται;

2ο πρόβλημα

α) Κατά πόσο αλλάζουν οι δύο ποσότητες (εισιτήρια- ευρώ): ___________________________________

β) Τι συμβαίνει στις δύο ποσότητες: ____

3ο πρόβλημα

α) Κατά πόσο αλλάζουν οι δύο ποσότητες (μπανάνες-μάφινς): _________________________________

β) Τι συμβαίνει στις δύο ποσότητες: ____

4ο πρόβλημα

α) Κατά πόσο αλλάζουν οι δύο ποσότητες (βραχιόλια-χάντρες): ________________________

β) Τι συμβαίνει στις δύο ποσότητες: ____

5ο πρόβλημα

α) Κατά πόσο αλλάζουν οι δύο ποσότητες (λεωφορεία- μαθητές): ________________________

β) Τι συμβαίνει στις δύο ποσότητες: ____

Φυλλάδιο εργασίας 2: Εμπεδώνω

Ονοματεπώνυμο: …………………………………………………………………………………

Οδηγίες επίλυσης για όλα τα προβλήματα:

1. Διαβάζω προσεκτικά το πρόβλημα στο εφαρμογίδιο.
2. Εντοπίζω τη στήλη που περιέχει δύο αριθμούς.
3. Βρίσκω κατά ποιον αριθμό αλλάζουν οι δύο ποσότητες και το γράφω στο φυλλάδιο (στους κύκλους δεξιά κι αριστερά του πίνακα αναλογιών).
4. Συμπληρώνω τον πίνακα αναλογιών στο εφαρμογίδιο.
5. Αντιγράφω προσεκτικά τους αριθμούς που έγραψα στο εφαρμογίδιο στον πίνακα του φυλλαδίου.
6. Πατώ στο εφαρμογίδιο το σύμβολο ☑ για να ελέγξω τις απαντήσεις μου.
7. Βάζω ✓ ή x σε κάθε στήλη του πίνακα αναλογιών (στο φυλλάδιο).

   ↳ ✓ αν βρω σωστά τον αριθμό που απουσιάζει

   x αν δεν τον βρω

*Αν δυσκολευτείς κάπου, μπορείς να χρησιμοποιήσεις τις δύο βοήθειες και το σημειωματάριο.

1ο πρόβλημα

x

κρέμες	4	5	7		
αυγά	20			40	45

÷

2ο πρόβλημα

x

λεπτά	10	30	60		
κονσέρβες	100			800	900

÷

3ο πρόβλημα

x

γάλα	12	10	4		
τούρτες		60		18	12

÷

4ο πρόβλημα

x

φάκελοι	4	8	9		
αυτοκόλλητα			36	44	72

÷

5ο πρόβλημα

x

τετράδια	15	12	9		5
κόστος (ευρώ)			27	18	

÷

Δελτίο εισόδου

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………………………

Σήμερα θα δουλέψουμε στα μαθηματικά με ένα εφαρμογίδιο στο tablet που ονομάζεται αναλογίες.

Τι νομίζεις είναι οι αναλογίες;

____

____

____

\- -

Δελτίο εξόδου

Ονοματεπώνυμο: ……………………………………………………………………………..

Έχουμε τελειώσει το μάθημα μας με το εφαρμογίδιο.

Τι καινούργιο έχεις μάθει σήμερα;

____

____

____

Σκέψου ένα παράδειγμα με 2 ποσότητες που **αυξάνονται** ταυτόχρονα:

Όνομα υλικού:				
Όνομα υλικού:				

Κατά πόσο αυξάνονται οι ποσότητες κάθε φορά:

______

Σκέψου ένα παράδειγμα με 2 ποσότητες που **μειώνονται** ταυτόχρονα:

Όνομα υλικού:				
Όνομα υλικού:				

Κατά πόσο μειώνονται οι ποσότητες κάθε φορά:

______

Παράρτημα 5: Πρωτόκολλο συνέντευξης

Δίνουμε στους μαθητές κάποια προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και παρατηρούμε τον τρόπο που τα επιλύουν. Με διάφορες προτροπές και καθοδηγητικές ερωτήσεις τους βοηθάμε να εκφράσουν δυνατά τις σκέψεις τους. Παράλληλα, κατά την επίλυση των προβλημάτων τους θέτουμε και κάποιες ερωτήσεις εννοιολογικής κατανόησης που σχετίζονται με την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού.

Μέρος Α – Προβλήματα σύγκρισης

Το πρόβλημα σύγκρισης στηρίζεται στην έρευνα του Noelting (1980) και θα αποτελείται από 4 στάδια. Το πρόβλημα θα είναι το ίδιο και στα τέσσερα στάδια, απλά κάθε φορά θα αλλάζουν οι αριθμοί στις ποσότητες. Το 1^{ο} στάδιο αφορά διπλασιασμό των ποσοτήτων και μπορεί να λυθεί και με τις δύο στρατηγικές που διδάχθηκαν οι μαθητές στα εφαρμογίδια (στρατηγική «εντός» σχέσεων και στρατηγική «εκτός» σχέσεων). Το 2^{ο} στάδιο αφορά τριπλασιασμό των ποσοτήτων και μπορεί να λυθεί μόνο με την στρατηγική των «εκτός» σχέσεων. Το 3^{ο} στάδιο αφορά άνισα ζευγάρια ποσοτήτων και μπορεί να λυθεί μόνο με την στρατηγική των «εντός» σχέσεων. Το 4^{ο} στάδιο αφορά μείωση των ποσοτήτων κατά 3 φορές και μπορεί να λυθεί και με τις δύο στρατηγικές (εντός σχέσεων και εκτός σχέσεων).

Μέρος Β – Προβλήματα άγνωστης αξίας

Το 1^{ο} πρόβλημα σε αυτό το μέρος στηρίχθηκε στην έρευνα των Burgos και Godino (2019). Οι αριθμοί στις ποσότητες διαφοροποιήθηκαν για να συμβαδίζουν με το επίπεδο των μαθητών στην Δ’ τάξη δημοτικού. Αφορά αύξηση των ποσοτήτων κατά διάφορους αριθμούς και μπορεί να λυθεί και με τις δύο στρατηγικές (εντός και εκτός σχέσεις).

Το 2^{ο} πρόβλημα εντοπίζεται στην ιστοσελίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου στην ενότητα για προετοιμασία των μαθητών στην έρευνα TIMSS. Αφορά τετραπλασιασμό των ποσοτήτων και μπορεί να λυθεί μόνο με την στρατηγική των «εντός» σχέσεων.

Το 3^{ο} πρόβλημα στηρίχθηκε στην έρευνα του Singh (1998). Το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποίησαν και στην δική τους έρευνα οι Misailidou και Williams (2003). Κι εδώ οι αριθμοί στις ποσότητες διαφοροποιήθηκαν για να συμβαδίζουν με το επίπεδο των μαθητών στη Δ’ τάξη δημοτικού. Αφορά μείωση των ποσοτήτων κατά 2 φορές και μπορεί να λυθεί μόνο με την στρατηγική των «εκτός» σχέσεων.

Ερωτήσεις εννοιολογικής κατανόησης κατά την επίλυση των προβλημάτων:

1. Αυτό είναι πρόβλημα σύγκρισης ή πρόβλημα άγνωστης αξίας; Γιατί;
2. Τι παρατηρείς; / Τι αλλάζει; / Αλλάζει κάτι;
3. Ποιες ποσότητες έχουν αλλάξει; / Ποια η σχέση μεταξύ τους; / Πώς αλλάζουν οι δύο ποσότητες;
4. Αλλάζει μόνο η μία ποσότητα;
5. Η αλλαγή στη μια ποσότητα εξαρτάται από την αλλαγή στην άλλη ποσότητα;
6. Υπάρχουν κάποιες σχέσεις που δεν έχουν αλλάξει; Κάποιες σχέσεις που έχουν μείνει σταθερές;
7. Μπορείς να παρουσιάσεις την αλλαγή που συμβαίνει με τοξάκια;
8. Οι ποσότητες που αλλάζουν, τι παθαίνουν (π.χ. αυξάνονται ή μειώνονται;)
9. Η αλλαγή αφορά τις ποσότητες του ίδιου είδους ή είναι αλλαγή των ποσοτήτων διαφορετικού είδους (δηλαδή η αλλαγή αφορά τις εντός σχέσεις ή τις εκτός σχέσεις;)

   ↳ η ερώτηση αυτή αφορά τη στρατηγική επίλυσης που θα ακολουθήσουν οι μαθητές (βέβαια δεν γίνεται αναφορά στους όρους «εκτός σχέσεις» και «εντός σχέσεις» καθώς δεν γνωρίζουν την επίσημη μαθηματική τους ονομασία. Γίνεται αναφορά σε αυτούς ως στρατηγική της στήλης και στρατηγική της γραμμής αντίστοιχα)
10. Υπάρχει κάποιος άλλος τρόπος που μπορείς να λύσεις αυτό το πρόβλημα; / Με ποιο άλλο τρόπο μπορείς να περιγράψεις την αλλαγή;
11. Ποιο από τους δύο τρόπους επίλυσης προτιμάς; Γιατί;
12. Με ποιο τρόπο μπορείς να υπολογίσεις τη μονάδα, δηλαδή το ένα; (με ποια μαθηματική πράξη) → στρατηγικής της αναγωγής στη μονάδα
13. Τι σημαίνει είναι ίσες; / Τι σημαίνει είναι άνισες;
14. Τι σημαίνει η λέξη αναλογίες;

Προτροπές / Καθοδηγητικές ερωτήσεις κατά την επίλυση των προβλημάτων:

1. Μπορείς να λύσεις αυτό το πρόβλημα; / Πώς θα λύσεις αυτό το πρόβλημα;
2. Μπορείς να πεις δυνατά με ποιο τρόπο σκέφτεσαι να το λύσεις;
3. Μπορείς να εξηγήσεις πώς το βρήκες;
4. Μπορείς να εξηγήσεις πως έχεις δουλέψει;
5. Τι κάνεις τώρα;
6. Πώς έχεις οδηγηθεί σε αυτή την απάντηση;
7. Πώς το σκέφτηκες;
8. Πώς έχεις δουλέψει;
9. Πώς το έλυσες αυτό;
10. Γιατί έχεις γράψει αυτό τον αριθμό;
11. Πώς έφθασες σε αυτή την απόφαση;

Παράρτημα 6: Προβλήματα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού που δόθηκαν στους μαθητές κατά τις συνεντεύξεις

<u>Μέρος Α</u>

1. Ο Ιωάννης και η Μαρία θέλουν να φτιάξουν δύο πορτοκαλάδες.

   Ο καθένας θα χρησιμοποιήσει διαφορετικές ποσότητες στα υλικά.

<u>ΙΩΑΝΝΗΣ</u>	**<u>ΜΑΡΙΑ</u>**
2 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού	4 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού
4 ποτήρια νερό	8 ποτήρια νερό

<u>Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού; Βάλε ✓ στο σωστό:</u>

Ιωάννης …… Μαρία …… Οι δύο πορτοκαλάδες είναι ίδιες ……

✂- -

2. Τώρα ο Ιωάννης και η Μαρία αποφάσισαν να αλλάξουν τις ποσότητες στα υλικά.

<u>ΙΩΑΝΝΗΣ</u>	**<u>ΜΑΡΙΑ</u>**
2 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού	5 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού
6 ποτήρι νερό	15 ποτήρια νερό

<u>Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού; Βάλε ✓ στο σωστό:</u>

Ιωάννης …… Μαρία …… Οι δύο πορτοκαλάδες είναι ίδιες ……

✂- -

3. Αυτή τη φορά ο Ιωάννης και η Μαρία θα χρησιμοποιήσουν άλλες ποσότητες στα υλικά.

<u>ΙΩΑΝΝΗΣ</u>	**<u>ΜΑΡΙΑ</u>**
4 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού	12 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού
3 ποτήρια νερό	10 ποτήρια νερό

<u>Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού; Βάλε ✓ στο σωστό:</u>

Ιωάννης …… Μαρία …… Οι δύο πορτοκαλάδες είναι ίδιες ……

✂- -

4. Ο Ιωάννης και η Μαρία θα δοκιμάσουν ακόμη μια φορά να φτιάξουν δύο πορτοκαλάδες.

<u>ΙΩΑΝΝΗΣ</u>	**<u>ΜΑΡΙΑ</u>**
9 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού	3 ποτήρια χυμό πορτοκαλιού
3 ποτήρια νερό	1 ποτήρια νερό

<u>Ποια από τις δύο πορτοκαλάδες θα έχει πιο έντονη γεύση πορτοκαλιού; Βάλε ✓ στο σωστό:</u>

Ιωάννης …… Μαρία …… Οι δύο πορτοκαλάδες είναι ίδιες ……

<u>Μέρος Β</u>

1. Η Ειρήνη φτιάχνει βραχιόλια χρησιμοποιώντας μπλε και πράσινες χάντρες. Για κάθε 2 μπλε χάντρες χρησιμοποιεί 4 πράσινες χάντρες.

α) <u>Πόσες πράσινες χρειάζεται:</u>

- αν υπάρχουν 6 μπλε χάντρες;

- αν υπάρχει 18 μπλε χάντρες;

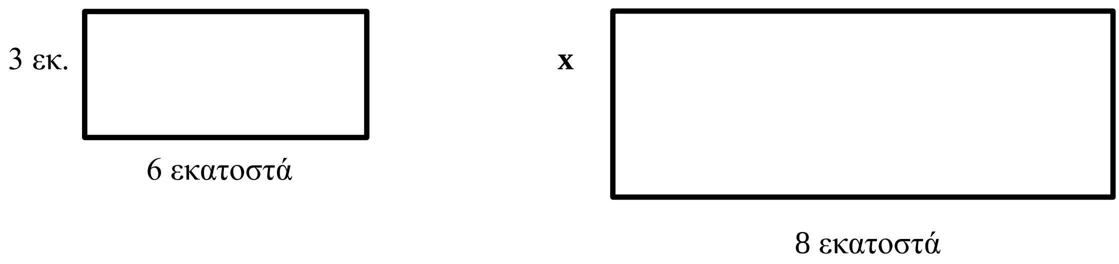
β) <u>Πόσες μπλε χρειάζεται:</u>

- αν υπάρχουν 44 πράσινες χάντρες;

- αν υπάρχουν 60 πράσινες χάντρες;

2. Ο Φώτης και η Μαρία μαζεύουν τενεκεδάκια αναψυκτικών για ανακύκλωση. Για κάθε 2 τενεκεδάκια που μαζεύει ο Φώτης, η Μαρία μαζεύει 5. Ο Φώτης μάζεψε συνολικά 8 τενεκεδάκια. Πόσα τενεκεδάκια μάζεψε συνολικά η Μαρία;

3. Έχω σχεδιάσει 2 ορθογώνια. Το μεγάλο ορθογώνιο είναι ίδιο με το μικρό, αλλά βρίσκεται σε μεγέθυνση. *Βρες το μήκος της πλευράς x που λείπει.*



Παράρτημα 7: Σχήμα κωδικοποίησης συνεντεύξεων

Επίπεδα Εννοιολογικής Κατανόησης Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού	
Επίπεδα	Ενδείξεις
Επίπεδο 0 (απουσία αναλογικού συλλογισμού)	-καμία ή λανθασμένη απάντηση -αδυναμία αναγνώρισης πολλαπλασιαστικής σχέσης -λανθασμένες στρατηγικές πρόσθεσης -τυχαία χρήση αριθμών και πράξεων -αδυναμία κατανόησης ισότητας (αναλογία)
Επίπεδο 1 (άτυπος αναλογικός συλλογισμός)	-παρατήρηση κάποιας σχέσης ανάμεσα στα ζευγάρια ποσοτήτων -σωστές απαντήσεις με τη χρήση διαισθητικών στρατηγικών ή τη χρήση σχεδίων -ποιοτική σύγκριση (ο μαθητής δηλαδή εστιάζεται μόνο στις ποσότητες, αν είναι περισσότερες ή λιγότερες, χωρίς να παρατηρεί και τη σχέση μεταξύ των αριθμών)
Επίπεδο 2 (ποσοτικός αναλογικός συλλογισμός)	-παρατήρηση και αναπαραγωγή ενός μοτίβου ή μιας σχέσης μεταξύ των αριθμών -αναγνώριση πολλαπλασιαστικής σχέσης -χρήση ποσοτικού αναστοχασμού (δηλαδή ο μαθητής αιτιολογεί ποσοτικά και συνδέει τις ποσότητες με αριθμητικούς υπολογισμούς) -σωστές μαθηματικές πράξεις / ορθοί μαθηματικοί υπολογισμοί χωρίς όμως κάποια επεξήγηση -εντοπισμός των «εντός» ή των «εκτός» σχέσεων (μία εκ των δύο)
Επίπεδο 3 (επίσημος αναλογικός συλλογισμός)	-πλήρης αντίληψη & κατανόηση των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των αριθμών -χρήση διάφορων στρατηγικών (εντός σχέσεις, εκτός σχέσεις, αναγωγή στη μονάδα) -δημιουργία και χρήση πίνακα λόγων-ποσοτήτων χωρίς βοήθεια/καθοδήγηση -ορθή επεξήγηση για μαθηματικές πράξεις -κατανόηση έννοιας αναλογίας -αναγνώριση ισότητας / ανισότητας -σωστή και ολοκληρωμένη επεξήγηση με κατάλληλο μαθηματικό λεξιλόγιο (π.χ. διπλασιασμός ποσοτήτων, μείωση ποσοτήτων κατά 3 φορές, κ.ά.)

Παράρτημα 8: Έντυπο συγκατάθεσης γονέων/κηδεμόνων

<u>Έρευνα για το μάθημα των μαθηματικών μέσω τεχνολογίας</u>

Έντυπο συγκατάθεσης γονέων / κηδεμόνων

Αγαπητοί γονείς και κηδεμόνες,

Ονομάζομαι Βιργινία Τριλλίδου, είμαι δασκάλα Ειδικής Εκπαίδευσης και μεταπτυχιακή φοιτήτρια στο τμήμα Επικοινωνίας και Σπουδών Διαδικτύου. Παρακολουθώ το μεταπτυχιακό πρόγραμμα «Νέες τεχνολογίες μάθησης και επικοινωνίας», στο Τεχνολογικό Πανεπιστήμιο Κύπρου (ΤΕΠΑΚ).

Στα πλαίσια του μεταπτυχιακού μου προγράμματος θα πραγματοποιήσω μια έρευνα για τα ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια. Η έρευνα θα πραγματοποιηθεί στο μάθημα των Μαθηματικών και στοχεύει στην ανάπτυξη αναλογικού συλλογισμού. Θα αφιερωθούν 4 διδακτικές περίοδοι στα μαθηματικά όπου οι μαθητές θα εκπαιδευτούν μέσω δύο εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων σε οθόνες αφής (tablet) ως προς την επίλυση προβλημάτων αναλογιών. Το συγκεκριμένο θέμα εντάσσεται στην ύλη του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών της Δ’ τάξης.

Σκοπός

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να διαπιστωθεί κατά πόσο η τεχνολογία μπορεί να είναι αποτελεσματική σε σχέση με τη μάθηση των παιδιών και πιο συγκεκριμένα τα ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια σε ποιο βαθμό μπορούν να συμβάλλουν σ’ αυτήν την αποτελεσματικότητα.

Οφέλη από την έρευνα

Οι μαθητές θα έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν δύο ψηφιακά εκπαιδευτικά εφαρμογίδια και να ανακαλύψουν-διερευνήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες με ένα πιο διασκεδαστικό και αλληλεπιδραστικό τρόπο. Επίσης, θα τους δοθεί η δυνατότητα να συνεργαστούν και να ανταλλάξουν σκέψεις και ιδέες τους, βοηθώντας ο ένας τον άλλο και αναλαμβάνοντας ενεργό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία.

Τρόπος συλλογής δεδομένων

Οι μαθητές θα:

1) Συμπληρώσουν ένα διαγνωστικό δοκίμιο (τεστ) πριν και μετά τη χρήση των δύο εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων (μια διδακτική περίοδος για το καθένα).
2) Δώσουν συνεντεύξεις πριν και μετά τη χρήση των δύο εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων, οι οποίες θα ηχογραφηθούν (15-20 λεπτά η κάθε μια).

Εμπιστευτικότητα

Τα διαγνωστικά δοκίμια θα συμπληρωθούν **ανώνυμα** από όλους τους μαθητές και οποιαδήποτε αναφορά σε δεδομένα μαθητή από τις συνεντεύξεις θα δίνεται με τη χρήση ψευδωνύμου. Όλα τα δεδομένα θα χρησιμοποιηθούν μόνο για τους σκοπούς της συγκεκριμένης έρευνας και θα ληφθούν τα απαραίτητα μέτρα για τη φύλαξη των δεδομένων.

Είναι υποχρεωτική η συμμετοχή του παιδιού μου;
Η συμμετοχή του παιδιού σας στην έρευνα είναι εθελοντική και μπορεί να αποχωρήσει οποιαδήποτε στιγμή χωρίς συνέπειες. Η έρευνα προϋποθέτει και τη σύμφωνη γνώμη του παιδιού ανεξάρτητα από το αν ο/η γονέας/κηδεμόνας έχει δώσει τη συγκατάθεσή του/της για τη συμμετοχή του.

Για οποιεσδήποτε διευκρινήσεις ή ερωτήσεις μη διστάσετε να επικοινωνήσετε μαζί μου:
Κινητό: Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο: trillidouvirginia@gmail.com

Έχω διαβάσει και κατανοήσει την περιγραφή της έρευνας. Έχω πληροφορηθεί ότι η αξιοποίηση των δεδομένων που θα ληφθούν από το παιδί μου για ερευνητικούς σκοπούς είναι **εθελοντική** και επιτρέπω τη χρησιμοποίησή τους. Κατανοώ ότι το όνομα του παιδιού μου δεν θα εμφανιστεί σε οποιαδήποτε δημοσίευση, αλλά τα δεδομένα της έρευνας θα αξιοποιηθούν για ερευνητικούς σκοπούς.

Παρακαλώ σημειώστε με «Χ» σε **ένα** κουτί (επιστρέψτε αυτή τη σελίδα και κρατήστε την πρώτη σελίδα για το δικό σας αρχείο):

☐ **ΔΙΝΩ** τη συγκατάθεση μου για τη συμμετοχή του παιδιού μου (γράψτε το όνομα του παιδιού σας).. στην έρευνα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω ψηφιακού εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων με τη χρήση οθονών αφής.

☐ **ΔΕΝ ΔΙΝΩ** τη συγκατάθεση μου για τη συμμετοχή του παιδιού μου (γράψτε το όνομα του παιδιού σας).. στην έρευνα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσω ψηφιακού εκπαιδευτικών εφαρμογιδίων με τη χρήση οθονών αφής.

Ονοματεπώνυμο γονέα/ κηδεμόνα: ....

Υπογραφή γονέα/ κηδεμόνα: ....

Ημερομηνία: ....